逻辑学研究　2026 年第 2 期，1–24
文章编号：1674-3202(2026)-02-0001-24

模糊限制语的逻辑学研究：语义模型与完备性

王军涛　　王梅　　贺鹏飞

摘　要：本文以代数化逻辑的研究方法为指引建立了基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语公理系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的代数语义系统，引入了模糊限制 MTL-代数簇，得到了逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 成为半线性逻辑的充分必要条件，在此基础之上证明了其线性完备性。其次，研究了模糊限制 MTL-代数的相关代数性质，刻画了可表示的模糊限制 MTL-代数，解决了模糊限制 MTL-代数的次直积分解问题，这为逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的最小半线性扩张提供了代数基础。最后，研究了次直不可约模糊限制 MTL-代数，利用余原子刻画了次直不可约模糊限制 MTL-代数，证明了在可表示的前提下，次直不可约模糊限制 MTL-代数与线性序模糊限制 MTL-代数等价。

关键词：模糊逻辑；模糊限制 MTL-代数；次直积表示；次直不可约分解；半线性扩张；完备性

中图分类号：B81　　**文献标识码：**A

1　引言

经典逻辑推理中，已知前提所使用的概念和提供的信息都是精确的，就能保证推得的结果也是准确无误的，这种精确的、严格的逻辑推理是计算机科学中普遍采用的研究方法。然而传统计算机通常只能按照经典逻辑进行识别，对模糊概念无能为力。为了克服经典逻辑在计算机应用中的不足，1965 年，美国控制专家 L. A. Zadeh（[17]）提出了模糊逻辑的概念，从而使计算机不但可以对模糊概念进行处理，还可以在信息有限的情况下，提供精确的答案。在模糊逻辑理论研究中，长期占主导地位的是基于三角模的模糊逻辑，在这类逻辑系统中，使用某个（左）连续三角模作为合取联结词的解释，并由此解释其它命题联结词（[11]），

收稿日期：2025-09-02
作者信息：王军涛　西安石油大学理学院
wjt@xsyu.edu.cn
王梅　西安航空学院理学院
wangmeimaath@163.com
贺鹏飞　陕西师范大学数学与统计学院
hepengf1986@126.com
基金项目：国家自然科学基金项目（No.12501647），教育部人文社会科学研究一般项目“一元子结构谓词逻辑的命题形式化研究”（No.24XJC72040001）。

如蕴涵、析取联结词分别解释为由上述三角模诱导的剩余蕴涵、对偶的三角余模，而否定联结词通常由蕴涵可以自然解释。目前，基于三角模的模糊逻辑已取得了丰富的研究成果，如：王国俊和裴道武两位教授建立的基于修正的 Kleene 蕴涵算子逻辑系统 $\mathbf{L}^*$；（[20]）P. Hájek 建立的基于连续三角模的逻辑系统 **BL**；（[11]）F. Esteva 和 L. Godo 建立的基于左连续三角模的逻辑系统 **MTL**（[7]）等，在这些逻辑系统中，**MTL** 备受国内外学者关注，已经发展成为模糊逻辑研究的主流对象之一，究其原因有以下几点：（1）它是一类最基本的满足剩余律的基于三角模逻辑系统；（2）它是一类范围最广的线性完备性可证的基于三角模逻辑系统；（3）它在不同类模糊逻辑系统之间建立了联系、为系统、全面地研究模糊逻辑提供了途径。模糊逻辑主要采用代数逻辑的研究方法，而后者则以逻辑代数为工具来进行研究。MTL-代数是 F. Esteva 和 L. Godo 于 2001 年为逻辑系统 **MTL** 匹配的代数语义，目前来看，MTL-代数成功地推广了 BL-代数，极大地拓宽了模糊逻辑的应用范围。**MTL** 和 MTL-代数在模糊逻辑的研究中发挥重要作用，取得了丰富的研究成果。（[8, 9, 15]）

为了更恰当的表达日常语言语气的模糊性，1973 年，美国学者 G. Lakoff（[12]）基于模糊集理论提出了模糊限制语（hedge）的概念，它主要包括一些“能够使语言模糊化的词语”，如非常、十分、可能、大概等。模糊限制语最初主要应用在社会语言学、语用学以及语篇分析等语言语义学方面，并取得了一系列的研究成果。（[1, 2, 16]）随着模糊逻辑理论研究的不断深入，越来越多的学者开始关注模糊限制语所具有的逻辑性质，如：L. A. Zadeh（[18]）从广义模糊逻辑的角度给出了描述模糊逻辑中模糊限制语对应的模糊限制函数（hedge function）$h : L \to [0, 1]$，它是一个单调递增、压缩且保持最值的函数，并通过其将命题的真值根据大小分为非常真（very true），十分真（quite true），可能真（probably true）等，然而需要指出的是上述方法具有如下的局限性：一是模糊限制函数是一类特殊的隶属度函数，它的构建在很大程度上依赖于专家个人的实际经验，具有很强的主观性；二是尽管模糊限制函数在模糊逻辑及模糊推理中有着广泛的应用，遗憾的是不能从逻辑和代数两方面共同去研究对应的理论，这是因为模糊限制函数 h 的取值总是取单位区间 $[0, 1]$ 中的值，所以逻辑代数与其上的模糊限制函数 h 不是一个代数簇，因此也不能从泛代数角度去研究相关问题，从而导致具有模糊限制函数的逻辑代数不再构成可代数化意义下的逻辑代数。考虑到公理化方法是数理逻辑构造形式系统最有效的方法，因此自然要问能否从狭义模糊逻辑的角度出发，给出描述模糊逻辑中模糊限制语的公理系统。为了解决上述问题，捷克著名逻辑学专家 P. Hájek 构建了描述基本模糊逻辑 **BL** 中模糊限制语的公理系统 $\mathbf{BL}_{\mathbf{vt}}$（[10]），其是由模糊真值联结词 vt 对基本模糊逻辑 **BL** 扩张而得到的。受此启发，I. Leuştean 建立了非可换 Łukasiewicz 命题逻辑中模糊限制语对应的公理系统 $\mathbf{PŁ}_{\mathbf{vt}}$（[13]），并

证明了其是非可换 Łukasiewicz 命题逻辑 **PŁ** 的自然扩张，随后 A. Ciabattoni 等建立了 **MTL** 中模糊限制语相应的公理系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$（[4]），并将其成功应用于形式概念分析中的数据约简中去。尽管现有文献在基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语的公理化系统构建方面进行了开创性的研究工作（[4, 10, 13]），然而已有研究工作的重点主要聚焦在逻辑系统中的推理规则，相应逻辑系统的线性完备性的问题并没有被彻底解决，其主要原因是其对应代数语义系统的性质和结构并未得到充分挖掘和深入探究。

上述研究工作表明，目前基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语的研究备受广大学者关注，相应研究成果也不断地涌现，这为基于三角模的模糊逻辑中命题变元真值度的研究提供了坚实的逻辑推理基础。然而特别需要指出的是，当前基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语的研究主要集中在推理规则以及其应用方面，而对其相应代数语义系统的性质和结构的研究却较少涉及，这也是基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语公理系统的完备性未得到彻底解决的根本原因。基于上述分析，考虑到 **MTL** 是一类最基本的基于三角模的模糊逻辑系统，本文以逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 为主要研究对象，以代数化逻辑和泛代数相关理论方法为主要的研究指引，建立逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 相应的代数语义系统模糊限制 MTL-代数簇，并研究模糊限制 MTL-代数簇的次直积表示定理，进而解决逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 最小半线性扩张问题，证明其链完备性定理，为处理基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语提供统一的代数公理化框架，实现基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语的代数语义和逻辑推理的深层次统一，这是本文的主要研究动机。

本文第 2 节简单介绍了基于三角模的模糊逻辑中最一般逻辑系统 **MTL** 及其相应代数语义系统 MTL-代数簇的相关知识；第 3 节构建了基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语相应公理系统的代数语义系统模糊限制 MTL-代数簇，证明了逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的线性完备性，解决了逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的最小半线性扩张问题；第 4 节研究了模糊限制 MTL-代数的代数性质，刻画了可表示模糊限制 MTL-代数，解决了模糊限制 MTL-代数簇次直积分解问题；第 5 节研究了次直不可约模糊限制 MTL-代数，证明了次直不可约可表示的模糊限制 MTL-代数与线性序模糊限制 MTL-代数等价；第 6 节总结了本文的成果并对其进行了展望。

2　预备知识

回顾文献 [7] 中关于逻辑系统 **MTL** 及其相应代数语义 MTL-代数簇的相关知识。

定义 2.1. 逻辑系统 **MTL** 的公理集及推理规则如下，

公理集：

（MTL1）$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$， （MTL2）$\varphi \Rightarrow (\varphi \sqcup \psi)$，

（MTL3）$\psi \Rightarrow (\varphi \sqcup \psi)$，

（MTL4）$(\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\phi \sqcup \psi) \Rightarrow \chi))$，

（MTL5）$(\varphi \sqcap \psi) \Rightarrow \varphi$，

（MTL6）$(\varphi \sqcap \psi) \Rightarrow \psi$，

（MTL7）$(\varphi \& \psi) \Rightarrow \varphi$，

（MTL8）$(\varphi \& \psi) \Rightarrow (\psi \& \varphi)$，

（MTL9）$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \sqcup \chi)))$，

（MTL10） $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \& \psi) \Rightarrow \chi)$，

（MTL11）$((\varphi \& \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$，

（MTL12）$(\varphi \Rightarrow \psi) \sqcup (\psi \Rightarrow \varphi)$，

（MTL13）$\bar{0} \Rightarrow \varphi$，

推理规则：**MP** 规则即从 φ 和 $\varphi \Rightarrow \psi$ 推出 ψ。

逻辑系统 **MTL** 中赋值、证明、理论、定理及重言式等定义与经典逻辑类似，不再赘述。特别记 $\vdash_{\mathbf{MTL}} \varphi$ 为公式 φ 在逻辑系统 **MTL** 中可由一个空集推理得到。

逻辑系统 **MTL** 上其它相关逻辑联接词 $\sim, \leftrightarrow$ 可定义如下

$$\sim \varphi \equiv \varphi \Rightarrow \bar{0},\ \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \& (\psi \Rightarrow \varphi)。$$

注 1. 一个具有蕴涵联结词的逻辑系统称为蕴涵逻辑（[6]）若其满足：

（1）$\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$，

（2）$\varphi, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \psi$，

（3）$\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \chi \vdash \varphi \Rightarrow \chi$，

（4）$\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \varphi \vdash c(\chi_1, \cdots, \chi_i, \varphi, \cdots, \chi_n) \Rightarrow c(\chi_1, \cdots, \chi_i, \psi, \cdots, \chi_n)$，

（5）$\varphi \vdash \psi \Rightarrow \varphi$。

需要指出的是蕴涵逻辑都是是 W. J. Blok 和 D. Pigozzi（[13]）意义下的可代数化逻辑，而 C. Noguera（[14]）指出了 **MTL** 及其形式扩张均属于蕴涵逻辑，从而其也是一类可代数化逻辑，其所相应代数语义系统可以形成一个代数簇。

定义 2.2 ([7]). 一个 MTL-代数是 $(2,2,2,2,0,0)$ 型代数 $(L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ 满足：

（1）$(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ 是一个有界格，其中 0 和 1 分别为 L 的最小元和最大元，

（2）$(L, \odot, 1)$ 是一个可换幺半群，

（3）$x \odot y \leq z$ 当且仅当 $x \leq y \rightarrow z$，

（4）$(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$。

本文将 MTL-代数 $(L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ 简记为 L。在 MTL-代数 L 上定义运算如下：

$$\neg x = x \to 0, \neg\neg x = \neg(\neg x), x^0 = 1, x^n = x^{n-1} \odot x, n \geq 1。$$

命题 2.1. 设 L 是一个 MTL-代数，则以下结论成立：$\forall x, y, z \in L$,

（1）$x \leq y$ 当且仅当 $x \to y = 1$,

（2）$x \to x = 1$，$x \to 1 = 1$，$1 \to x = x$,

（3）$x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$,

（4）$x \vee y \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$,

（5）$x \odot y \to z = x \to (y \to z)$,

（6）$x \wedge y \leq ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$,

（7）$x \leq y \to x$。

滤子理论在研究逻辑代数完备性的过程中扮演着非常重要的角色，尤其是在逻辑代数次直积表示定理的研究中起着非常重要的作用，下面介绍 MTL-代数滤子的相关概念。

定义 2.3 ([19])**.** 设 L 是一个 MTL-代数，F 是 L 的一个非空子集。若 $\forall x, y \in L$，

（1）当 $x, y \in F$，有 $x \odot y \in F$，

（2）当 $x \in F$ 且 $x \leq y$ 时，有 $y \in F$，则称 F 是 L 的滤子。

定义 2.4 ([19])**.** 设 L 是一个 MTL-代数，F 是 L 的一个滤子，则 F 称为：

（1）真滤子若 $F \neq L$。

（2）素滤子若 F 满足对任意的 $x, y \in F$，都有 $x \to y \in F$，或 $y \to x \in F$。

（3）极大滤子若 L 中不存在严格包含 F 的真滤子。

（4）极小素滤子若 F 是全体素滤子之集关于包含关系的极小元。

定义 2.5 ([3])**.** 称 MTL-代数 L 是一簇 MTL-代数 $(L_i)_{i\in I}$ 的次直积。若满足以下条件：

（1）$L \leq \prod_{i\in I} L_i$，

（2）对于每个 $j \in I$，$\pi_j(L) = L_j$，其中 $\pi_j : \prod_{i\in I} L_i \to L_j$ 是投射映射。

若 $\alpha(L)$ 是 $(L_i)_{i\in I}$ 的次直积，则称嵌入映射 $\alpha : L \to \prod_{i\in I} L_i$ 是次直的。

定义 2.6 ([7])**.** 设 L 是一个 MTL-代数。若 L 同构于一族线性序 MTL-代数的次直积，则称 L 是一个可表示的 MTL-代数。

定理 2.1 ([3])**.** 设 L 是一个 MTL-代数且 F 是 L 的滤子，则下列事实等价。

（1）F 是一个极小素滤子，

（2）$F = \cup\{a^\perp | a \in F\}$，其中 $a^\perp = \{x \in L | a \vee x = 1\}$。

3 基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语的代数语义

本节借助代数逻辑的研究方法证明了基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语公理系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 是可代数化的，得到了 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 关于全体模糊限制 MTL-代数簇是完备的，并给出了 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 成为半线性逻辑的充要条件，在此基础之上证明了 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 线性完备性。

为了公理化模糊逻辑中模糊限制语，A. Ciabattoni 等通过引入逻辑连接词 vt（相应真值函数完全保持了模糊限制函数代数性质）对逻辑系统 **MTL** 进行形式扩张而得到了模糊逻辑中模糊限制语公理化系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$（[4]），其公理集包括逻辑系统 **MTL** 的公理集和如下公理：

（VT1）$vt\varphi \Rightarrow \varphi$，

（VT2）$vt(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (vt\varphi \Rightarrow vt\psi)$，

（VT3）$vt\varphi \Rightarrow vt(vt\varphi)$。

推理规则集：**MP** 规则：由 φ 和 $\varphi \Rightarrow \psi$ 得到 ψ 和推广规则 $\mathbf{Nec_{vt}}$：由 φ 得到 $vt\varphi$。

逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 中相关概念与逻辑系统 **MTL** 相似，不再赘述。

注 2. 本文所研究的 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 是逻辑系统 **MTL** 更一般化的一种模态化扩张，现有的模态扩张 $\mathbf{MTL}_{\triangledown}$ 和 $\mathbf{MTL}_{\triangle}$ 均为 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 形式扩张，其详细关系描述如下：

（1）时慧娴和王国俊教授在文献（[21]）中提出的 **MTL** 的模态扩张逻辑 $\mathbf{MTL}_{\triangledown}$ 是 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的形式扩张，其中 $\mathbf{MTL}_{\triangledown}$ 的公理集包括 **MTL** 的公理集和如下公理：

（∇ 1）$\nabla(\varphi \sqcup \psi) \Rightarrow (\nabla\varphi \sqcup \nabla\psi)$，

（∇ 2）$\nabla(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\nabla\varphi \Rightarrow \nabla\psi)$，

（∇ 3）$\nabla\varphi \Rightarrow \varphi$，

（∇ 4）$\nabla\varphi \Rightarrow \nabla\nabla\varphi$。

推理规则集： **MP** 规则和推广规则 $\mathbf{Nec}_{\triangledown}$： 从 φ 得出 $\nabla\varphi$。

（2）F. Esteva 和 L. Godo 在文献（[7]）中提出的 $\mathbf{MTL}_{\triangle}$ 也是 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的形式扩张。事实上，$\mathbf{MTL}_{\triangle}$ 的公理集包括 **MTL** 的公理集及如下公理：

（$\triangle$ 1）$\triangle\varphi \sqcup \sim \triangle\psi$，

（$\triangle$ 2）$\triangle(\varphi \sqcup \psi) \Rightarrow (\triangle\varphi \sqcup \triangle\psi)$，

（$\triangle$ 3）$\triangle\varphi \Rightarrow \varphi$，

（$\triangle$ 4）$\triangle\varphi \Rightarrow \triangle\triangle\varphi$，

（$\triangle$ 5）$\triangle(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\triangle\varphi \Rightarrow \triangle\psi)$。

推理规则集： **MP** 规则和推广规则 $\mathbf{Nec}_{\triangle}$： 从 φ 得出 $\triangle\varphi$。

接下来探讨 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 可代数化问题，建立其对应的代数语义模糊限制 MTL-代数。

由可代数化逻辑的相关理论可知蕴涵逻辑是一类具有蕴涵联结词的形式最简的可代数化逻辑，因此要说明 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 是可代数化的，只需验证其是一类蕴涵逻辑即可。显然逻辑系统 **MTL** 是一类蕴涵逻辑，因此说明 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 是蕴涵逻辑的关键在于证明逻辑连接词 vt 同样满足（Cong）条件，见命题3.1（2）。

命题 3.1. 下列公理在逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 中均可证，

（1）$\vdash_{\mathbf{MTL_{vt}}} \sim vt\bar{0}$,

（2）$\varphi \Rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{MTL_{vt}}} vt\varphi \Rightarrow vt\psi$。

因此 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 是一类可代数化逻辑，本文称其等价代数语义为模糊限制 MTL-代数。

定义 3.1. 设 L 是一个 MTL-代数，称一元算子 $h : L \to L$ 是 L 上的模糊限制算子，若其满足如下条件：$\forall x, y \in L$，

（HMTL1）$h(1) = 1$，

（HMTL2）$h(x) \leq x$，

（HMTL3）$h(x \to y) \leq h(x) \to h(y)$，

（HMTL4）$h^2(x) = h(x)$，其中 $h^2(x) = h(h(x))$，

并称序对 (L, h) 为一个模糊限制 MTL-代数，显然全体模糊限制 MTL-代数能够形成一个簇。

下面给出模糊限制 MTL-代数的一些例子。

例 1.（1）恒等映射 $id_L : L \to L$ 是 MTL-代数 L 上的模糊限制算子，(L, id_L) 是一个模糊限制 MTL-代数，这说明一个 MTL-代数 L 可以视为一个模糊限制 MTL-代数。

（2）设 L 是一个线性序 MTL-代数，定义映射 $h : L \to L$ 如下：

$$h(x) = \begin{cases} 1, x = 1 \\ 0, x \neq 1 \end{cases}$$

则 h 是 L 上的模糊限制算子，因此 (L, h) 是一个模糊限制 MTL-代数。

（3）设 L 是 R_0 单位区间 $L = ([0,1], \wedge, \vee, \odot, \to)$。特别令

$$L_n = \{0, \tfrac{1}{n-1}, \tfrac{2}{n-1}, \cdots, \tfrac{n-2}{n-1}, 1\}。$$

显然 L_n 关于上述代数运算作成一个 MTL-代数。定义映射 $h : L_n \to L_n$ 如下所示：

$$h(x) = \max\{y \in L_n | y \leq x\},$$

则 (L_n, h) 是一个模糊限制 MTL-代数。

（4）设 $L = \{a, b, c, d, 1\}$ 具有序关系 $0 \le a, b; a \le c, d; b \le c; c, d \le 1$。定义 L 上的二元运算 $\odot$ 和 $\to$ 如下：

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	a
b	0	0	b	b	0	b
c	0	0	b	b	a	c
d	0	0	0	0	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	c	1	c	1	1	1
b	d	d	1	1	d	1
c	a	d	c	1	d	1
d	b	c	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

容易验证 $(L, \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ 是一个 MTL-代数。定义映射 $h : L \to L$ 如下：

$$h\,(x) = \begin{cases} x, x = 0, b, d, 1 \\ b, x = c \end{cases},$$

则 (L, h) 是一个模糊限制 MTL-代数。

需要指出的是每个模糊限制 MTL-代数 (L, h) 都满足：$\forall x, y \in L$，

$$x \to x = y \to y。$$

因此其对应逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 可通过添加一个可定义的常变元 $\bar{1} = \varphi \Rightarrow \varphi$ 来扩张，同时也可直接得到关于 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的完备性定理，若需要了解相关知识，读者可参阅文献 [3] 中相关结论。

定理 3.1. 设 φ 是 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的一个公式，则以下结论等价：

（1）$\vdash_{\mathbf{MTL_{vt}}} \varphi$，

（2）对任意的模糊限制 MTL-代数 (L, h) 和任意的模型 e，$e(\varphi) = 1$，

（3）$[\varphi] = [\bar{1}]$。

基于上述完备性来证明逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 是 **MTL** 的保守扩张。

定理 3.2. 设 φ 是 **MTL** 的一个公式，则 $\vdash_{\mathbf{MTL}} \varphi$ 当且仅当 $\vdash_{\mathbf{MTL_{vt}}} \varphi$。

证明. 例1（1）表明 id_L 是 MTL-代数上的一个模糊限制算子，从而由 $\vdash_{\mathbf{MTL_{vt}}} \varphi$ 推导 $\vdash_{\mathbf{MTL}} \varphi$ 显然可证。反之，假设 $\nvdash_{\mathbf{MTL}} \varphi$，则存在一个线性序 MTL-代数 L 和一个赋值 e 使得 $e(\varphi) \neq 1$。注意到上述线性序 MTL-代数 L 可按例 1（2）的形式扩展成为一个线性序模糊限制 MTL-代数 (L, h)，从而上述 (L, h) 和 e 说明 $\nvdash_{\mathbf{MTL_{vt}}} \varphi$ 矛盾。 $\square$

模糊逻辑称为半线性（[6]）的当其关于一簇线性序代数完备，从代数角度来看，即就是对应逻辑代数的次直积表示定理成立。需要指出的是并非所有模糊逻辑都是半线性逻辑，然而可按如下方式将其扩张成为半线性逻辑。

逻辑系统 $\mathcal{L}$ 中二元逻辑联结词 $\sqcup$ 的称为 $\mathcal{L}$ 中析取联结词,若其满足如下条件：

$$\text{(PD)}\ \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \sqcup \psi,\ \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \sqcup \psi,$$
$$\text{(PCP)}\ \text{若}\ \Gamma, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \chi\ \text{且}\ \Gamma, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \chi,\ \text{则}\ \Gamma, \varphi \sqcup \psi \vdash_{\mathcal{L}} \chi。$$

给定析取联结词 $\sqcup$ 和有限推理规则 (R) : $\Gamma \vdash \varphi$，推理规则 ($\mathrm{R}^{\sqcup}$) 的定义形式为

$$(\mathrm{R}^{\sqcup}):\ \Gamma \sqcup p \vdash \varphi \sqcup p，\text{其中}\ p\ \text{是一个未在集合}\ \Gamma \cup \{\varphi\}\ \text{的命题变元。}$$

命题 3.2 ([5]). 设逻辑系统 $\mathcal{L}_1$ 具有析取联结词 $\sqcup$ 且逻辑系统 $\mathcal{L}_2$ 是由有限推理规则集 $\mathcal{C}$ 对 $\mathcal{L}_1$ 扩张而成,则 $\sqcup$ 仍是 $\mathcal{L}_2$ 的析取联结词当且仅当对任意推理规则 (R) $\in \mathcal{C}$，推理规则 ($\mathrm{R}^{\sqcup}$) 在逻辑系统 $\mathcal{L}_2$ 中可证。特别地，$\sqcup$ 均是逻辑系统 $\mathcal{L}_1$ 任何形式扩张的析取联结词。

定理 3.3 ([5]). 设 $\mathcal{L}$ 是一个具有二元联结词 $\sqcup$ 的蕴涵逻辑且满足条件（PD）。考虑

$$(\mathrm{P}_{\sqcup})\ \vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \Rightarrow \psi) \sqcup (\psi \Rightarrow \varphi),$$
$$(\mathrm{MP}_{\sqcup})\ \varphi \Rightarrow \psi, \varphi \sqcup \psi \vdash_{\mathcal{L}} \psi\ \text{且}\ \varphi \Rightarrow \psi, \psi \sqcup \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi。$$

则以下结论等价：

（1）$\sqcup$ 是一个析取联结词且满足 ($\mathrm{P}_{\sqcup}$)，

（2）$\mathcal{L}$ 是一个半线性逻辑且满足 ($\mathrm{MP}_{\sqcup}$)。

显然常见的模糊逻辑系统如，**BL** 以及 **MTL** 等都是半线性逻辑，主要因为这些逻辑系统不仅是蕴涵逻辑且满足条件 ($\mathrm{P}_{\sqcup}$) 和 ($\mathrm{MP}_{\sqcup}$)，从而由定理 3.3 便自然可得，然而需要指出的是，其模态扩张 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 并非是半线性逻辑，从推理角度来看逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 不是半线性逻辑的主要原因是其所对应的推理规则 ($\mathrm{R}^{\sqcup}_{\mathrm{vt}}$) 不可证（例2可说明这个问题），其中推理规则 ($\mathrm{R}^{\sqcup}_{\mathrm{vt}}$) 的定义如下：

$$\Gamma \sqcup p \vdash_{\mathbf{MTL_{vt}}} vt\varphi \sqcup p，\text{其中}\ p\ \text{是任意一个未在集合}\ \Gamma \cup \{\varphi\}\ \text{的命题变元。}$$

特别地若 $\Gamma = \emptyset$，则推理规则 ($\mathrm{R}^{\sqcup}_{\mathrm{vt}}$) 可简化为：

$$\varphi \sqcup p \vdash_{\mathbf{MTL_{vt}}} vt\varphi \sqcup p，\text{其中}\ p\ \text{是任意一个不为}\ \{\varphi\}\ \text{的命题变元。}$$

例 2. 设 $L = \{0, a, b, c, 1\}$ 具有序关系 $0 < a < b < 1, 0 < a < c < 1$。定义代数运算 $\odot$ 和 $\to$ 如下：

$\odot$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a
b	0	a	b	a	b
c	0	a	a	c	c
1	0	a	b	c	1

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	c	1	c	1
c	0	b	b	1	1
1	0	a	b	c	1

则 $(L,\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$ 是一个 MTL-代数。定义映射 $h: L\to L$ 为

$$h\left(x\right)=\begin{cases} x, x=0,a,1\\ a, x=b,c\end{cases}$$

则容易验证 (L,h) 是一个模糊限制 MTL-代数。然而事实上，

虽然 $b\vee c=1$，但是 $b\vee h(c)=b\vee a=b\neq 1$。

上例表明一般情况下 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 不是半线性的，因此如何对其进行最小半线性扩张是一个值得探讨的问题。接下来，我们给出使得 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 成为半线性逻辑的的充分必要条件。

定理 3.4. 逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 是半线性的当且仅当推理规则 $(\mathrm{R}^{\sqcup}_{\mathrm{vt}})$ 可证。

证明. 记逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt\ell}}$ 是由逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 经推理规则 $(\mathrm{R}^{\sqcup}_{\mathrm{vt}})$ 扩张后所得。由逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 具有析取联结词 $\sqcup$ 且逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt\ell}}$ 是逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的公理扩张，由命题 3.2 可得逻辑联结词 $\sqcup$ 也为 $\mathbf{MTL_{vt\ell}}$ 的析取联结词且推理规则 $(\mathrm{R}^{\sqcup}_{\mathrm{vt}})$ 在逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt\ell}}$ 可证。此外，由推理规则 $(\mathrm{P}_{\sqcup})$ 也在逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt\ell}}$ 中可证，进而由定理 3.3 可得逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt\ell}}$ 是半线性逻辑。反之若逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 成为半线性逻辑，则由定理 3.3 自然可得推理规则 $(\mathrm{R}^{\sqcup}_{\mathrm{vt}})$ 可证。 □

由半线性逻辑的定义结合定理 3.4 的结论，如下线性完备性自然成立。

定理 3.5. 设 φ 是 $\mathbf{MTL_{vt\ell}}$ 的一个公式，则以下结论等价：

（1）$\vdash_{\mathbf{MTL_{vt\ell}}}\varphi$，

（2）对任意的线性序模糊限制 MTL-代数 (L,h) 和任意的模型 e，$e(\varphi)=1$，

（3）$[\varphi]=[\bar{1}]$。

考虑 $\mathbf{MTL}_{\triangledown}$，$\mathbf{MTL}_{\triangle}$ 是 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 分别经 $(\mathrm{R}^{\sqcup}_{\triangledown})$ 和 $(\mathrm{R}^{\sqcup}_{\triangle})$ 推广而得，可得如下结论。

推论 1. 逻辑系统 $\mathbf{MTL}_{\triangledown}$, $\mathbf{BL}_{\triangledown}$, $\mathbf{Ł}_{\triangledown}$ 都是半线性逻辑。

推论 2. 逻辑系统 $\mathbf{MTL}_{\triangle}$, $\mathbf{BL}_{\triangle}$, $\mathbf{Ł}_{\triangle}$ 都是半线性逻辑。

4　可表示模糊限制 MTL-代数的刻画

本节通过研究模糊限制 MTL-代数的相关性质，借助模糊限制滤子探讨了模糊限制剩余格的次直积表示定理，解决了模糊限制剩余格簇的次直积分解问题，所得结论为逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的最小半线性扩张提供了代数基础。

首先给出模糊限制 MTL-代数的相关代数性质。

命题 4.1. 设 (L,h) 是一个模糊限制 MTL-代数，则下列结论成立：$\forall x,y\in L$，

（1） $h(0)=0$，

（2） $h(x)=1$ 当且仅当 $x=1$，

（3）若 $x\leq y$，则 $h(x)\leq h(y)$，

（4） $h(\neg x)\leq\neg h(x)$，

（5） $h(x)\odot h(y)\leq h(x\odot y)$，

（6） $h(x)\leq y$ 当且仅当 $h(x)\leq h(y)$，

（7） $h(L)=$$\mathrm{Fix}_h(L)$，其中 $\mathrm{Fix}_h(L)=\{x\in L|h(x)=x\}$，

（8） $h(L)=L$ 当且仅当 $h=id_L$。

证明.（1）由（HMTL2）可得 $h(0)\leq 0$，从而 $h(0)=0$。

（2）若存在 $x\in L$ 使得 $h(x)=1$，则由（HMTL2）得 $1=h(x)\leq x$，从而 $x=1$。反之显然。

（3）若 $x\leq y$，则 $x\to y=1$，进而由（HMTL1）和（HMTL3）可得

$$1=h(x\to y)\leq h(x)\to h(y),$$

这说明 $h(x)\to h(y)=1$，即 $h(x)\leq h(y)$。

（4）在（HMTL3）中令 $y=0$ 可得 $h(\neg x)\leq\neg h(x)$。

（5）由 $x\odot y\leq x\odot y$ 可得 $y\leq x\to(x\odot y)$，再由（HMTL3）和（3）可得

$$h(y)\leq h(x\to(x\odot y))\leq h(x)\to h(x\odot y),$$

进而由定义 2.2 可得 $h(x)\odot h(y)\leq h(x\odot y)$。

（6）$\forall x,y\in L$，若 $h(x)\leq y$，则由（3）可得 $h(h(x))\leq h(y)$，进而由（HMTL4）可得 $h(x)\leq h(y)$。反之若 $h(x)\leq h(y)$，则由（HMTL2）可得 $h(x)\leq h(y)\leq y$。

（7）若 $y\in h(L)$，则存在 $x\in L$ 使得 $y=h(x)$，从而

$$h(y)=h(h(x))=h(x)=y,$$

这表明 $y\in$$\mathrm{Fix}_h(L)$。反之若 $y\in$$\mathrm{Fix}_h(L)$，则 $y\in h(L)$。

（8）$\forall x\in L$，存在 $x_0\in L$ 使得 $h(x_0)=x$。又由（HMTL4）可得

$$h(x)=h(h(x_0))=h(x_0)=x,$$

这表明 $h = id_L$。反之显然成立。 □

MTL$_{\mathbf{vt}}$ 的可代数化性自然可以得到模糊限制 MTL-代数对应的滤子即模糊限制滤子的概念,其实际上逻辑系统 **MTL$_{\mathbf{vt}}$** 中全体可证公式所形成集合的语义版本。

给定一个模糊限制 MTL-代数 (L, h)，MTL-代数 L 上的一个滤子 F 称为模糊限制 MTL-代数 (L, h) 的一个模糊限制滤子若其关于模糊限制算子 h 是封闭的。若 X 是 MTL-代数 L 的非空子集，记 $\langle X\rangle_h$ 为由 X 生成的模糊限制滤子，即 $\langle X\rangle_h$ 是包含 X 的最小模糊限制滤子，具体生成式为

$$\langle X\rangle_h = \{x \in L | x \geq h(x_1) \odot h(x_2) \odot \cdots \odot h(x_n), x_i \in X, n \geq 1\}。$$

特别地，

$$\langle a\rangle_h = \{x \in L | x \geq (h(a))^n, n \geq 1\}。$$

此外，若 F 是模糊限制 MTL-代数 (L, h) 的模糊限制滤子且 $a \notin F$，则

$$\langle F, a\rangle_h := \langle F \cup \{a\}\rangle_h = \{x \in L | x \geq f \odot (h(a))^n, f \in F\} = F \vee [h(a))。$$

本文中将模糊限制 MTL-代数的全体模糊限制滤子的集合记为 $[HF(L, h)]$。

模糊限制 MTL-代数 的模糊限制滤子与 MTL-代数中滤子一般情况下是不同的。

例 3. 设 $L = \{0, a, b, c, 1\}$ 其中 $0 \leq a \leq b, c \leq 1$，定义运算 $\odot$ 和 $\to$ 为

$\odot$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a
b	0	a	b	a	1
c	0	a	a	c	1
1	0	a	b	c	1

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	c	1	1
b	0	a	1	c	1
c	0	b	b	1	1
1	0	a	b	c	1

则 $(L, \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ 是一个 MTL-代数。定义 MTL-代数 L 上一元算子 $h : L \to L$

$$h(x) = \begin{cases} 0, x = 0, a, b \\ c, x = c \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

容易验证 (L, h) 是一个模糊限制 MTL-代数，$\{c, 1\}$，$\{1\}$ 和 L 是 (L, h) 的模糊限制滤子。值得注意的是 $\{a, b, c, 1\}$ 虽然是 MTL-代数 L 的滤子，但其并非是模糊限制 MTL-代数 (L, h) 的模糊限制滤子，这是因为 $h(a) = h(b) = 0 \notin \{a, b, c, 1\}$。

模糊限制 MTL-代数的模糊限制滤子集 $HF[L, h]$ 关于集合包含是一个 Heyting 代数。

定理 4.1. 设 (L,h) 是一个模糊限制 MTL-代数，则 $(HF[L,h],\wedge,\vee,\mapsto,1,L)$ 是一个完备 Heyting 代数，其中对于任意 $F_1,F_2\in HF[L,h]$，

$$F_1\wedge F_2=F_1\cap F_2,$$
$$F_1\vee F_2=\langle F_1\cup F_2\rangle_\mu,$$
$$F_1\mapsto F_2=\{x\in L|h(x)\vee f_1\in F_2,\forall f_1\in F_1\}。$$

证明. 假设 $\{F_i\}_{i\in I}$ 是模糊限制 MTL-代数 (L,h) 的一簇模糊限制滤子，容易验证

$$\bigwedge\{F_i\}_{i\in I}=\cap_{i\in I}F_i$$

且

$$\vee_{i\in I}F_i=\{x\in L|x\geq f_{i_1}\odot f_{i_2}\odot\cdots f_{i_m},f_{i_j}\in F_{i_j},i_j\in I,1\leq j\leq m\}。$$

因此，$(HF[L,h],\subseteq,\wedge,\vee,1,L)$ 是一个完备格。其次，对于任意 $F_1,F_2\in HF[L,h]$，定义

$$F_1\mapsto F_2=\{x\in L|h(x)\vee f_1\in F_2\},$$

可以验证 $F_1\cap F_2\subseteq F_3$ 当且仅当 $F_2\subseteq F_1\mapsto F_3$，也就是说，$(HF[L,h],\wedge,\vee,\mapsto,1,L)$ 是一个完备 Heyting 代数。为了得到这个结论，首先证明 $F_1\mapsto F_2$ 是 (L,h) 的模糊限制滤子。

首先证明 $F_1\mapsto F_2$ 是 (L,h) 的模糊限制滤子。显然 $1\in F_1\mapsto F_2$，所以 $F_1\mapsto F_2$ 非空。若 $x\in F_1\mapsto F_2$ 且 $x\leq y$，则对任意 $f_1\in F_1$ 使得 $h(x)\vee f_1\in F_2$，进一步由 $h(x)\vee f_1\leq h(y)\vee f_1\in F_2$ 可得：$h(y)\vee f_2\in F_1\mapsto F_2$，因此 $y\in F_1\mapsto F_2$。假设 $x,y\in F_1\mapsto F_2$，则 $\forall f_1\in F_1$ 使得 $h(x)\vee f_1,h(y)\vee f_1\in F_2$。从而 $f_1\vee h(x\odot y)\in F_2$。故 $x\odot y\in F_1\mapsto F_2$。又由 h 是幂等知 $x\in F_1\mapsto F_2$，可得 $h(x)\in F_1\mapsto F_2$。故 $F_1\mapsto F_2$ 是 (L,h) 的模糊限制滤子。

其次，证明 $F_1\wedge F_2\leq F_3$ 当且仅当 $F_1\leq F_2\mapsto F_3$。假设 $F_1\wedge F_2\leq F_3$，若 $f_1\in F_1$，则 $h(f_1)\in F_1$，于是 $\forall f_2\in F_2$ 使得 $f_2\vee h(f_1)\geq h(f_1)$，$f_2\vee h(f_1)\geq f_2$，因此 $f_2\vee h(f_1)\in F_1\wedge F_2\leq F_3$，从而 $f_1\in F_2\mapsto F_3$，故 $F_1\subseteq F_2\mapsto F_3$。另一方面，假设 $F_1\leq F_2\mapsto F_3$，若 $x\in F_2\wedge F_3$，于是 $\forall y\in F_2$，都有 $y\vee h(x)\in F_3$。取 $y=x\in F_2$ 可得：$x\vee h(x)=x\in F_3$。因此，$F_1\leq F_2\mapsto F_3$。

综上可证 $(HF[L,h]\wedge,\vee,\mapsto,1,L)$ 是一个完备的 Heyting 代数。 □

接下来，我们研究模糊限制 MTL-代数的次直积表示定理，这是第二章中研究逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 半线性扩张的代数基础，注意到 MTL-代数是次直积可表示的，即 MTL-代数簇可以表示成一系列线性序 MTL-代数的次直积，这主要是因为预线性等式

$$(x \to y) \vee (y \to x) = 1$$

在 MTL-代数中成立，然而需要特别注意的是模糊限制 MTL-代数并非是可表示的。因此下面有必要研究模糊限制 MTL-代数的次直积表示定理，给出模糊限制 MTL-代数次直积表示定理可证的充分必要条件，这为 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 半线性扩张提供了代数基础。

定义 4.1. 一个模糊限制 MTL-代数称为可表示的若其能够表示成一簇线性序模糊限制 MTL-代数的次直积，或者说，其与一簇线性序模糊限制 MTL-代数同构。

下面给出可表示模糊限制剩余格的例子。

例 4. 例1（4）中模糊限制 MTL-代数是可表示的。然而并非所有的模糊限制 MTL-代数都是可表示的，如例 2 中的模糊限制 MTL-代数就不可表示。

下面定理给出了一个模糊限制 MTL-代数可表示的等价刻画。

定理 4.2. 设 (L,h) 是一个模糊限制 MTL-代数，则以下结论等价：$\forall x, y \in L$，

（1） (L,h) 是一个可表示的模糊限制 MTL-代数，

（2） $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$，

（3） $h(x \to y) \vee (y \to x) = 1$，

（4）由 $x \vee y = 1$ 得到 $x \vee h(y) = 1$，

（5）模糊限制 MTL-代数 (L,h) 的任何一个极小素滤子是一个模糊限制滤子。

证明.（1）$\Rightarrow$（2）若 (L,h) 是一个可表示的模糊限制 MTL-代数，则一个等式在这个模糊限制 MTL- 代数中成立当且仅当其在线性序模糊限制 MTL-代数中成立。在线性序模糊限制 MTL-代数中等式 $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$ 显然可证。

（2）$\Rightarrow$（3）若 (L,h) 是一个模糊限制 MTL-代数满足等式 $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$，则 $1 = h((x \to y) \vee (y \to x)) = h(x \to y) \vee h(y \to x) \leq h(x \to y) \vee (y \to x)$，因此 $h(x \to y) \vee (y \to x) = 1$。

（3）$\Rightarrow$（4）若 $x \vee y = 1$，则由命题 4.1（6）和（7）可得 $x \to y = y$，$y \to x = x$，再由（3）可得

$$x \vee h(y) = h(x \to y) \vee (y \to x) = 1。$$

因此由 $x \vee y = 1$ 可得 $x \vee h(y) = 1$。

（4）$\Rightarrow$（5）假设 F 是一个极小素滤子且 $x, y \in F$，则存在 $z \in L$ 使得 $z \notin F$ 且 $z \wedge x = 1$。由于 F 是一个素滤子且 $z \notin F$，由 $z \vee h(x) = 1 \in F$，可得 $h(x) \in F$，同理可证 $h(y) \in F$，进而由命题 4.1（5）可得 $h(x \odot y) \in F$，从而 F 是模糊限制 MTL-代数 (L,h) 的模糊限制滤子。

（5）⇒（1）设 (L,h) 是一个模糊限制 MTL-代数且 $\mathcal{F}$ 是 MTL-代数 L 上全体极小素滤子集合。由定理 2.1 可得任意 MTL-代数都可以视为一簇线性序 MTL-代数 $\{L/\sim_F|F\in\mathcal{F}\}$ 的次直积按照如下的表示投射

$$\imath: L\to \Pi_{F\in\mathcal{F}}L/F。$$

由 $\mathcal{F}$ 中的任意 F 都是相应模糊限制 MTL-代数 (L,h) 的模糊限制滤子，由泛代数可知商 MTL-代数上可自然诱导模糊限制 MTL-代数 $(L/F,h_F)$，$\imath$ 是模糊限制 MTL-代数 (L,h) 到一簇模糊限制 MTL- 代数 $\{L/\sim_F|F\in\mathcal{F}\}$ 的次直积，因此 (L,h) 是可表示模糊限制 MTL-代数。 □

例 1（2）表明任何一个线性序的 MTL-代数，都可以通过赋予恰当的模糊限制算子成为一个模糊限制 MTL-代数，其实也是一个可表示的模糊限制 MTL-代数。

定理 4.3. 设 L 是一个 MTL-代数，则以下结论等价：

（1） (L,h) 是一个可表示的模糊限制 MTL-代数，h 是例 1（2）中模糊限制算子；

（2） L 是一个线性序 MTL-代数。

证明.（1）⇒（2）设 (L,h) 是一个可表示的模糊限制 MTL-代数。$\forall x,y\in L$，若 $x\not\leq y$，则 $x\to y\neq 1$，从而 $h(x\to y)=0$，进而由定理 4.2（3），可得 $y\to x=1$，因此 $y\leq x$。另一方面，若 $y\not\leq x$，则 $y\to x\neq 1$，从而 $h(x\to y)=1$，进而由定理 4.2（3），可得 $x\to y=1$，因此 $x\leq y$。综上可知 L 是一个线性序 MTL-代数。

（2）⇒（1）设 L 是一个线性序 MTL-代数且 x,y 是 L 中任意两个元。若 $x\leq y$，则 $x\to y=1$，若 $y\leq x$，则 $y\to x=1$，在这两种情况下都有 $h(x\to y)\vee(y\to x)=1$。因此 (L,h) 是一个可表示的模糊限制 MTL-代数。 □

作为定理 4.2 和 4.3 的应用，给出下面注记。

注 3. （1）显然在可表示的模糊限制 MTL-代数中，下列等式自然成立

$$h(x\wedge y)=h(x)\wedge h(y)，h(x\vee y)=h(x)\vee h(y)，$$

并将满足上述两个等式的模糊限制算子称为强模糊限制算子。

（2）例 1（4）中的模糊限制 MTL-代数是可表示的，其对应 MTL-代数 L 并不是线性序的，这表明定理 4.3 中的结论并不适用于所有的模糊限制 MTL-代数。

（3）若将定理 4.3（2）改为 L 是可表示的 MTL-代数，则该定理未必成立。事实上，确实存在这样的模糊限制 MTL-代数 (L,h)，它不是可表示的，然而相应的 MTL-代数 L 是可表示的但并非是线性序的，见例 2。

（4）每一个可表示的 MTL-代数都可以嵌入到一个可表示的模糊限制 MTL-代数。事实上，若 L 是一个可表示的 MTL-代数，则 L 与一簇线性序 MTL-代数的次

直积是同构的。由定理 4.3可知，线性 MTL-代数都可以提升为一个可表示的模糊限制 MTL-代数。显然全体可表示的模糊限制 MTL-代数可以生成一个代数簇，从而可表示模糊限制 MTL-代数的次直积仍然是一个可表示的模糊限制 MTL-代数。

一般来说，$Fix_h(L)$ 未必是 MTL-代数 L 的子代数。

例 5. 设 $L=\{0,a,b,1\}$ 其中 $0\leq a\leq b\leq 1$，定义二元运算 $\odot$ 和 $\rightarrow$ 为

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	1	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

则 $(L,\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1)$ 是一个 MTL-代数。定义剩余格 L 上一元算子 $h:L\rightarrow L$

$$h\left(x\right)=\begin{cases}0,x=0\\a,x=a,b\\1,x=1\end{cases}.$$

则 (L,h) 是一个模糊限制 MTL-代数且 $Fix_h(L)=\{0,a,1\}$ 并不是 L 的子代数，这是因为

$$a\rightarrow 0=b\notin Fix_h(L)。$$

下面的定理说明在可表示模糊限制 MTL-代数的基础之上重新定义蕴涵运算之后，$Fix_h(L)$ 也能形成一个 MTL-代数，这在某种程度上揭示了不动点之集的本质。

定理 4.4. 设 (L,h) 是一个可表示的模糊限制 MTL-代数，则 $(Fix_h(L),\wedge,\vee,\odot,\rightsquigarrow,0,1)$ 是一个 MTL-代数，其中，$\forall x,y\in Fix_h(L)$, $x\rightsquigarrow y=h(x\rightarrow y)$。

证明. 首先证明 $(Fix_h(L),\wedge,\vee,0,1)$ 是一个有界格，其中 0 和 1 分别是最小元和最大元。由注 3（1）可知 $Fix_h(L)$ 关于运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 封闭。因此，$(Fix_h(L),\wedge,\vee)$ 是一个格，$\forall x\in Fix_h(L)$，容易验证 $x\vee 1=1$ 和 $x\wedge 0=0$。因此，0 和 1 分别是 $Fix_h(L)$ 最小元和最大元。故 $(Fix_h(L),\wedge,\vee,0,1)$ 是一个有界格。

其次，我们证明 $(Fix_h(L),\odot,1)$ 是一个可换含幺半群，其中 1 是单位元。由命题 4.1（5）可知 $Fix_h(L)$ 关于运算 $\odot$ 封闭，从而 $(Fix_h(L),\odot)$ 是一个可换半群。又 $\forall x\in Fix_h(L)$，$x\odot 1=x$，也就是说，1 是一个单位元。

其次证明 $\rightsquigarrow$ 和 $\odot$ 构成伴随对。对 $\forall x,y\in Fix_h(L)$，定义

$$x\rightsquigarrow y=h(x\rightarrow y)。$$

只需证明 $\forall x, y, z \in Fix_h(L)$，

$$x \odot y \leq z \Leftrightarrow y \leq x \rightsquigarrow z。$$

由命题 4.1（6）可得：

$$h(x) \leq y \Leftrightarrow h(x) \leq h(y)。$$

从而 $\forall x, y, z \in Fix_h(L)$，

$$\begin{aligned} x \odot y \leq z \quad &\Leftrightarrow \quad y \leq x \rightarrow z \\ &\Leftrightarrow \quad h(y) \leq x \rightarrow z \\ &\Leftrightarrow \quad h(y) \leq h(x \rightarrow z) \\ &\Leftrightarrow \quad h(y) \leq x \rightsquigarrow z \\ &\Leftrightarrow \quad y \leq x \rightsquigarrow z \end{aligned}$$

最后证明预线性成立。$\forall x, y \in Fix_h(L)$。由注 3（1）可得：

$$(x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x) = h(x \rightarrow y) \vee h(y \rightarrow x) = 1。$$

综上可证 $(Fix_h(L), \wedge, \vee, \odot, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 也是一个 MTL-代数。 □

作为不动点之集的应用，我们引入单模糊限制 MTL-代数并基于上述结论对其进行刻画。

定义 4.2. 设 (L, h) 是一个模糊限制 MTL-代数。若 (L, h) 只有两个模糊限制滤子：$\{1\}$ 和 L，则称 (L, h) 是一个单模糊限制 MTL-代数。

例 6. 例 1（2）中的模糊限制 MTL-代数 (L, h) 是一个单模糊限制 MTL-代数。

定理 4.5. 设 (L, h) 是一个可表示的模糊限制 MTL-代数，则以下事实等价：

（1）(L, h) 是单的，

（2）$h(L)$ 是一个单 MTL-代数，

（3）$h(L) = \{0, 1\}$，

（4）$\langle 1 \rangle_h$ 是模糊限制 MTL-代数 (L, h) 中唯一的一个真模糊限制滤子。

证明.（1）⇒（2）假设 F 是 $h(L)$ 的一个模糊限制滤子且 $F \neq \{1\}$。欲证 $h(L)$ 是一个单 MTL-代数，只需证明 $F = h(L)$。考虑集合

$$F_f = \{z \in L | z \geq f，\text{ 存在 } f \in F\}。$$

若 $x, y \in F_f$，则存在 $f_1, f_2 \in F$ 使得 $x \geq f_1$，$y \geq f_2$，从而 $x \odot y \geq f_1 \odot f_2$，因此，$x \odot y \in F_f$。若 $x \in F_f$ 且 $x \leq y$，则容易验证 $y \in F_f$。又若 $x \in F_f$，则存在 $f \in F$ 使得 $x \geq f$，从而 $h(x) \geq h(f) = f$，即 $h(f) \in F_f$。故 F_f 是模糊限制 MTL-代数 (L, h) 的一个模糊限制滤子。又因为 (L, h) 是一个单 MTL-代数且 $F_f \neq \{1\}$，从而 $F_f = L$。故 $F = \mu(L)$。

（2）$\Rightarrow$（1）假设 F 是 (L, h) 的一个模糊限制滤子，则 $F \cap \mu(L)$ 是 $h(L)$ 的一个滤子，从而 $F \cap h(L) = \{1\}$ 或 $F \cap h(L) = h(L)$。若 $F \cap h(L) = h(L)$，则 $h(L) \subseteq F$，又由于 $0 \in h(L)$，从而 $F = L$。另一方面，若 $F \cap h(L) = \{1\}$ 且 $x \in F$，则 $h(x) \in F \cap h(L)$，从而 $h(x) = 1$，又由命题 4.1（2）可知 $x = 1$。故 $F = \{1\}$。因此，(L, h) 是一个单模糊限制 MTL-代数。

（2）$\Leftrightarrow$（3）显然成立。

（1）$\Leftrightarrow$（4）由定义 4.2 可证。 □

5 次直不可约模糊限制 MTL-代数

本节通过模糊限制滤子研究了次直不可约模糊限制 MTL-代数，证明了次直不可约可表示的模糊限制 MTL-代数与线性序模糊限制 MTL-代数等价，深入刻画了模糊限制 MTL-代数的次直积分解问题。

首先给出次直不可约模糊限制 MTL-代数的定义。

定义 5.1. 一个模糊限制 MTL-代数 (L, h) 称为次直不可约的若其有最小的非平凡的模糊限制同余。

注 4. 若 (L, h) 是一个模糊限制 MTL-代数，则显然可得必然存在一个模糊限制滤子 F 使得其与最小的非平凡的模糊限制同余相对应，也就是说 F 是模糊限制 MTL-代数的最小模糊限制滤子且 $F \neq \{1\}$，可自然可得到一个模糊限制 MTL-代数 (L, h) 称为次直不可约的当且仅当其存在一个最小的非平凡模糊限制滤子，即

$$\cap\{F \in HF[L, h] | F \neq \{1\}\} \neq \{1\}。$$

例 7. 例 5 中的模糊限制 MTL-代数 (L, h) 是次直不可约的。

下面将证明次直不可约可表示模糊限制 MTL-代数与线性序模糊限制 MTL-代数等价。

命题 5.1. 设 (L, h) 是一个次直不可约模糊限制 MTL-代数且 $F_1, F_2 \in HF[L, h]$。若 $F_1 \cap F_2 = \{1\}$，则 $F_1 = \{1\}$ 或 $F_2 = \{1\}$。

证明. 假设 $F_1 \neq \{1\}$ 且 $F_2 \neq \{1\}$，即，

$$F_1，F_2 \in \cap\{F \in HF[L,h] | F \neq \{1\}\} \neq \{1\}。$$

从而

$$\cap\{F \in HF[L,h] | F \neq \{1\}\} \neq \{1\} \subseteq F_1 \cap F_2。$$

又由 $F_1 \cap F_2 = \{1\}$ 可得：

$$\cap\{F \in HF[L,h] | F \neq \{1\}\} = \{1\},$$

这与 (L,h) 是次直不可约的相矛盾。因此，$F_1 = \{1\}$ 或者 $F_2 = \{1\}$。 □

定理 5.1. 设 (L,h) 是一个模糊限制 MTL-代数，则以下事实等价：

（1）(L,h) 是一个次直不可约模糊限制 MTL-代数，

（2）存在元素 $a \in L$ 且 $a < 1$ 使得 $\forall x \in L$ 且 $x < 1$ 都有 $a \in \langle x\rangle_h$。

证明.（1）⇒（2）假设 (L,h) 是一个次直不可约模糊限制 MTL-代数，则

$$\cap\{\langle x\rangle_h | x < 1\} \neq \{1\}。$$

令

$$a \in \cap\{\langle x\rangle_h | x < 1\}$$

满足 $a \neq 1$，则 $\forall x \in L$，$x \neq 1$，$a \in \langle x\rangle_h$。又由模糊限制滤子的生成方式可得：存在自然数 $m \in N$ 使得 $a \geq (h(x))^m$。显然，a 就是所需要的元素。

（2）⇒（1）反之，证明对于任意 $F \in HF[L,h]$ 且 $F \neq \{1\}$，$a \in F$。由 $F \neq \{1\}$ 可知存在 $x \in F$，$x < 1$，从而 $a \in \langle x\rangle_h$。又由 $a \in F$ 可得：

$$a \in \cap\{F \in HF[L,h] | F \neq \{1\}\}。$$

因此

$$\cap\{F \in HF[L,h] | F \neq \{1\}\} \neq \{1\}。$$

故 (L,h) 是一个次直不可约模糊限制 MTL-代数。 □

为了刻画次直不可约可表示模糊限制 MTL-代数,探究模糊限制滤子相关结论。

命题 5.2. 设 F_1, F_2 和 F 均是模糊限制 MTL-代数 (L,h) 的模糊限制滤子且 $a \notin F$，则以下结论成立：

（1）$\langle a\rangle_h = \{x \in L | x \geq (h(a))^n, n \geq 1\}$，

（2）$\langle F \cup a\rangle_h = \{x \in L | x \geq f \odot (h(a))^n, f \in F\} = F \vee [h(a))$，

（3）$\langle F_1 \cup F_2\rangle_h = \{x \in L | x \geq f_1 \odot f_2, f_1 \in F_1, f_2 \in F_2\}$，

（4）若 $a \leq b$，则 $\langle b\rangle_h \subseteq \langle a\rangle_h$， （5）$\langle h(a)\rangle_h = \langle a\rangle_h$，

特别地，若 (L, h) 是一个可表示的模糊限制 MTL-代数，则下列结论成立：

（6）$\langle a\rangle_h \vee \langle b\rangle_h = \langle a \wedge b\rangle_h = \langle a \odot b\rangle_h$，

（7）$\langle a\rangle_h \cap \langle b\rangle_h = \langle h(a) \vee h(b)\rangle_h$。

证明.（1）–（5）显然成立，证明略。

（6）由 $a \odot b \leq a \wedge b \leq a, b$ 可得：

$$\langle a\rangle_h，\langle b\rangle_h \subseteq \langle a \wedge b\rangle_h \subseteq \langle a \odot b\rangle_h，$$

从而

$$\langle a\rangle_h \vee \langle b\rangle_h \subseteq \langle a \wedge b\rangle_h \subseteq \langle a \odot b\rangle_h。$$

另一方面，若 $x \in \langle a \odot b\rangle_h$，则存在某个自然数 $n \geq 1$ 使得

$$x \geq (h(a \odot b))^n \geq (h(a) \odot h(b))^n = (h(a))^n \odot (h(b))^n。$$

故 $x \in \langle a\rangle_h \vee \langle b\rangle_h$，从而

$$\langle a \odot b\rangle_h \subseteq \langle a\rangle_h \vee \langle b\rangle_h。$$

因此，$\langle a\rangle_h \vee \langle b\rangle_h = \langle a \wedge b\rangle_h = \langle a \odot b\rangle_h$。

（7）由 $h(a) \leq h(a) \vee h(b)$ 可得：

$$\langle h(a) \vee h(b)\rangle_h \subseteq \langle h(a)\rangle_h = \langle a\rangle_h。$$

类似可证：

$$\langle h(a) \vee h(b)\rangle_h \subseteq \langle h(b)\rangle_h = \langle b\rangle_h。$$

从而

$$\langle h(a) \vee h(b)\rangle_h \subseteq \langle a\rangle_\mu \cap \langle b\rangle_h。$$

另一方面若

$$t \in \langle a\rangle_h \cap \langle b\rangle_h，$$

则存在某个自然数 $n, m \geq 1$ 使得

$$t \geq (h(a))^m，t \geq (h(b))^n，$$

从而

$$t \geq (h(a))^m \vee (h(b))^n \geq (h(a) \vee h(b))^{mn} = (h(a \vee b))^{mn}。$$

故

$$t \in \langle h(a) \vee h(b) \rangle_h,$$

即

$$\langle a \rangle_h \cap \langle b \rangle_h \subseteq \langle h(a) \vee h(b) \rangle_h。$$

因此，$\langle a \rangle_h \cap \langle b \rangle_h = \langle h(a) \vee h(b) \rangle_h$。 □

一个非单位元 a 称为一个余原子，若 $a \leq b$，则 $b \in \{a, 1\}$，即 $b = a$ 或者 $b = 1$。下面的命题说明了每个次直不可约可表示的模糊限制 MTL-代数至多有一个余原子。

命题 5.3. 设 (L, h) 是一个次直不可约可表示的模糊限制 MTL-代数。$\forall x, y \in L$，若 $x \vee y = 1$，则 $x = 1$ 或 $y = 1$。

证明. $\forall x, y \in L$，若 $x \vee y = 1$，由命题 5.2（7）可得：

$$\langle x \rangle_h \cap \langle y \rangle_h = \langle h(x) \vee h(y) \rangle_h = \langle h(x \vee y) \rangle_h = \langle 1 \rangle_h = \{1\}。$$

又由命题 5.1 可得：

$$\langle x \rangle_h = \{1\} \text{ 或者 } \langle y \rangle_h = \{1\}。$$

故 $x = 1$ 或者 $y = 1$。 □

下面定理说明了每一个次直不可约可表示的模糊限制 MTL-代数是线性序的。

定理 5.2. 设 (L, h) 是一个可表示的模糊限制 MTL-代数，则以下事实等价：

（1）(L, h) 是次直不可约的，

（2）(L, h) 是一个线性序模糊限制 MTL-代数。

证明.（1）⇒（2）假设 (L, h) 是一个次直不可约可表示的模糊限制 MTL-代数。由定义可得：$\forall x, y \in L$，

$$(x \to y) \vee (y \to x) = 1。$$

又由命题 5.3 可得：

$$x \to y = 1 \text{ 或 } y \to x = 1。$$

即

$$x \leq y \text{ 或 } y \leq x。$$

故 (L, h) 是一个线性序模糊限制 MTL-代数。

（2）⇒（1）假设 (L, h) 是一个线性序模糊限制 MTL-代数且 F 是它的一个模糊限制滤子满足 $F \neq \{1\}$，则存在唯一的对偶原子 a 使得 $a \in F$。由 F 选择任意性可得：

$$a \in \cap\{F \in MF[L,h] | F \neq \{1\}\}。$$

因此，

$$\cap\{F \in MF[L,h] | F \neq \{1\}\} \neq \{1\}。$$

故 (L,h) 是一个次直不可约可表示的模糊限制 MTL-代数。 □

由泛代数的理论可知，每一个可表示的模糊限制 MTL-代数都可以表示成为一簇次直不可约模糊限制 MTL-代数的直积，在此基础上通过定理 5.2 可得下面推论。

推论 3. 可表示的模糊限制 MTL-代数簇可由线性序模糊限制 MTL-代数确定。

6 结束语

现有文献对于基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语的研究主要聚焦在逻辑推理方面，对其相应代数语义系统性质和结构的研究很少，这导致基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语公理系统的完备性目前仍然没有得到彻底解决。本文以逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 为主要研究对象，借助代数逻辑的研究方法，建立其对应代数语义系统模糊限制 MTL-代数，刻画模糊限制 MTL-代数的次直积表示定理，同时解决了逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的完备性问题，为实现了基于三角模的模糊逻辑中模糊限制语代数语义和逻辑推理的和谐统一奠定了基础。

本文的主要研究工作就是解决了逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 的一般完备性和链完备性，即证明了相应逻辑系统关于模糊限制 MTL-代数簇和线性序模糊限制剩余格簇是完备的，如何将本文的结论进行深入化推广，证明逻辑系统 $\mathbf{MTL_{vt}}$ 及其公理化扩张的标准完备性，即相应逻辑系统关于标准单位区间 [0,1] 上模糊限制 MTL-代数簇及其子簇完备，而这个问题的解决主要依赖于模糊限制 MTL-代数格序群表示问题的解决，是一个富有挑战性的问题。

参考文献

[1] R. Belohlávek, T. Funiokova and V. Vychodil, 2005, "Fuzzy closure operators with truth stressers", *Logic Journal of IGPL*, **13(5)**: 503–513.

[2] R. Belohlávek and V. Vychodil, 2012, "Formal concept analysis and linguistic hedges", *International Journal of General Systems*, **41(5)**: 503–532.

[3] S. Burris and H. P. Sankappanavar, 1981, *A Course in Universal Algebra*, New York: Springer.

[4] A. Ciabattoni, G. Metcalfe and F. Montagna, 2010, "Algebraic and proof-theoretic characterizations of truth stressers for mtl and its extensions", *Fuzzy Sets and Systems*, **161(3)**: 369–389.

[5] P. Cintula and C. Noguera, 2016, “Implicational (semilinear) logics III: Completeness properties”, *Archive for Mathematical Logic*, **55(3-4)**: 353–372.

[6] P. Cintula and C. Noguera, 2021, *Logic and Implication: An Introduction to the General Algebraic Study of Non-classical Logics*, Cham: Springer.

[7] F. Esteva and L. Godo, 2001, “Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms”, *Fuzzy Sets and Systems*, **124(3)**: 271–288.

[8] W. Fussner and S. Santschi, 2025, “Amalgamation in semilinear residuated lattices”, *Studia Logica*.

[9] J. Gispert, F. Esteva, L. Godo and M. E. Coniglio, 2025, “On nilpotent minimum logics defined by lattice filters and their paraconsistent non-falsity preserving companions”, *Logic Journal of the IGPL*, **33(3)**: jzae126.

[10] P. Hájek, 2001, “On very true”, *Fuzzy Sets and Systems*, **124(3)**: 329–333.

[11] P. Hájek, 1998, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[12] G. Lakoff, 1973, “Hedges: A study in meaning criteria and logic of fuzzy concepts”, *Journal of Philosophical Logic*, **2(4)**: 458–508.

[13] I. Leuştean, 2006, “Non-commutative Łukasiewicz propositional logic”, *Archive for Mathematical Logic*, **45(2)**: 191–213.

[14] C. Noguera, 2006, *Algebraic study of axiomatic extensions of triangular norm based fuzzy logics*, phdthesis, IIIA-CSIC.

[15] J. T. Wang, H. W. Wu, P. F. He and Y. H. She, 2025, “An algebraic proof of completeness for monadic fuzzy predicate logic $\mathbf{MMTL}_\forall$”, *The Review of Symbolic Logic*, **18(1)**: 213–239.

[16] Y. Y. Yang, 2013, “Exploring linguistic and cultural variations in the use of hedges in English and Chinese scientific discourse”, *Journal of Pragmatics*, **50(1)**: 23–36.

[17] L. A. Zadeh, 1965, “Fuzzy sets”, *Information and Control*, **8(3)**: 338–353.

[18] L. A. Zadeh, 1972, “A fuzzy set theoretic interpretation of linguistic hedges”, *Journal of Cybernetics*, **2(3)**: 4–34.

[19] Y. Q. Zhu and Y. Xu, 2010, “On filter theory of residuated lattices”, *Information Sciences*, **180(19)**: 3614–3632.

[20] 裴道武，王国俊，“形式系统 L^* 的完备性及其应用”，中国科学 E 辑，2002 年第 1 期，第 56–64 页。

[21] 时慧娴，王国俊，“逻辑系统 $\mathbf{MTL}_\triangledown$ 及其完备性”，计算机工程与应用，2011 年第 6 期，第 30–33 页。

（责任编辑：执子）

A Logical Study of Hedges: Semantic Models and Completeness

Juntao Wang Mei Wang Pengfei He

Abstract

In this paper, we introduce the algebraic semantics of hedges in monoidal triangular norms based logic **MTL**, the resulting class of algebras called hedge MTL-algebras, and provide the necessary and sufficient condition for the logic $\mathbf{MTL_{vt}}$ to be semilinear, and then prove the chain completeness of this logic. Moreover, we investigate some of their basic algebraic properties of hedge MTL-algebras, and give some characterizations of representable hedge MTL-algebras, and completely solve the problem of subdirect product decomposition of hedge MTL-algebras, which actually provide algebraic foundations for the minimum semilinear extension of $\mathbf{MTL_{vt}}$。Finally, studying subdirectly irreducible hedge MTL-algebras and characterizing them by using of co-atom, proving the subdirectly irreducible hedge MTL-algebras and linearly ordered hedge MTL-algebras are equivalent.

Juntao Wang School of Science, Xi'an Shiyou University
wjt@xsyu.edu.cn

Mei Wang School of Science, Xi'an Aeronautical Institute
wangmeimaath@163.com

Pengfei He School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University
hepengf1986@126.com