

逻辑常项可以消失吗?

宋鹏飞

摘要: 本文以逻辑常项的可归约性为起点, 逐步探讨逻辑常项能否消失这一问题。对于可归约性, 本文论述了谢弗竖作为单一元素的联结词充分集的一系列性质, 并举例说明以谢弗竖作为唯一逻辑常项的逻辑系统的不足之处, 进而提出建构逻辑系统需要在奥卡姆剃刀原则和表达式的繁琐冗长之间寻找平衡。对于逻辑常项能否消失这一问题, 本文以根岑的矢列演算为基础在元语言层面提出了“前逻辑”这一概念, 在前逻辑中不存在任何逻辑常项。本文进一步对扩充逻辑和变异逻辑加以辨析, 提出所有的逻辑都是在前逻辑的基础上经过扩充得到的。最后, 本文讨论了几条判定逻辑常项的原则, 论证了这些原则对前逻辑提供了支持。

关键词: 逻辑常项; 矢列演算; 前逻辑

中图分类号: B81 **文献标识码:** A

1 逻辑常项的可归约性

通常认为逻辑只关注命题和论证因其逻辑结构或形式而具有的特征。命题或论证的逻辑形式由其句法或语义结构以及某些“逻辑常项”来决定。人们普遍认为“否定 (\neg)”“合取 (\wedge)”“析取 (\vee)”“如果……那么…… (\rightarrow)”“任意一个 (\forall)”和“存在 (\exists)”应该算作逻辑常项, 而像“红色”“更高”“男孩”和“美国总统”这样的词不应该算作逻辑常项。

逻辑常项的可归约性即某一个逻辑常项可由其他逻辑常项定义。例如, 在一阶逻辑系统中, 有如下定义:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \stackrel{def}{=} \neg(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$$

$$\exists x.\mathcal{A} \stackrel{def}{=} \neg\forall x.\neg\mathcal{A}$$

上面第一个表达式用“否定”和“合取”定义了“析取”, 第二个表达式用“否定”和“任意一个”定义了“存在”。其中, 花体字母表示任意合式公式, x 为个体变元。

收稿日期: 2025-03-01

作者信息: 宋鹏飞 上海师范大学哲学与政法学院
pfsong@shnu.edu.cn

基金项目: 国家社科基金重大项目“逻辑词汇的历史演进与哲学问题研究”(20&ZD046), 上海市哲学社会科学规划课题“社会集体觉知的逻辑研究”(2023BZX003)。

由于逻辑常项的可归约性，在构建公理系统¹时，只需要选择较少的逻辑常项，即可定义其他的逻辑常项。以命题逻辑为例，可选择“ \neg ”和“ \rightarrow ”作为初始逻辑常项，公理和推理规则如下：（[8]，第28页）

- L1 $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$
 L2 $((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})))$
 L3 $((\neg \mathcal{A}) \rightarrow (\neg \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$
 MP 从 \mathcal{A} 和 $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ 推出 \mathcal{B} 。

其中，花体大写字母表示命题逻辑的任意合式公式。本文接下来也会用花体大写字母表示某逻辑的任意合式公式，对此不再加以说明。

考虑到公理的简洁性，通常来说，要尽量避免定义多余的逻辑常项，因为，演绎系统必须为每一个初始常项给出相应的公理以规定它的行为。对于命题逻辑，如果只考虑 \neg 、 \wedge 、 \vee 和 \rightarrow 这几个较为符合直观的联结词²，那么，最小的联结词的充分集有三组： $\{\neg, \wedge\}$ 、 $\{\neg, \vee\}$ 、 $\{\neg, \rightarrow\}$ 。其含义是，其中任意一组联结词可以定义其他的联结词。值得注意的是，这里所说的“充分”指的是任意一组联结词可以定义任意根据真值表规定的 n 元联结词，其中， $n \in \mathbb{N}_+$ 。

事实上，联结词的最小充分集并不是上面几个二元素集合，逻辑学家给出了两个可以单独构成充分集的二元联结词，分别是谢弗竖“ $|$ ”（[15]）和皮尔士箭头“ \downarrow ”（[14]）。它们等价于由上述充分集中的联结词构成的公式：

$$p|q \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

$$p \downarrow q \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

由于皮尔士箭头是谢弗竖的对偶，且两者都可单独构成联结词的充分集，本文接下来只针对谢弗竖展开讨论。

以充分集 $\{\neg, \wedge\}$ 为例，使用谢弗竖的定义如下：

$$\neg p \stackrel{def}{=} (p|p)$$

$$p \wedge q \stackrel{def}{=} ((p|q)|(p|q))$$

谢弗竖的发现得到了维特根斯坦（[18]）和罗素（[17]）的高度称赞，其对于形式系统的重要性不言而喻。在数学领域，研究者总是尽可能减少理论的初始假设。根

¹在现代逻辑的研究中，我们常说的公理系统为希尔伯特风格的演绎系统（Hilbert-style deductive system），其产生可归结于弗雷格、卢卡希维茨、罗素和怀德海、希尔伯特的工作。它最常见于一阶逻辑的研究，也应用在其他不同类型的演绎系统。一个公理系统通常由一些公理和若干推理规则构成。它们不是唯一的，也就是说，对于同一个公理系统，不同的研究者可以选择使用不同的公理和推理规则。

²因为命题逻辑中的逻辑常项只有联结命题的逻辑词，不包括量词这类逻辑常项，所以，这里把命题逻辑中的逻辑常项称为逻辑联结词，简称联结词。

据奥卡姆剃刀原理，规定的实体数量不应超出构建理论所需的最低限度。这不仅值得提倡的理论优点，而且在方法论上是必需的。通常来说，在等价的两种理论中，一般应该采用更简约的一个，因为简约本身就是一个好的理论必须满足的要求。

但是，使用谢弗竖构建逻辑系统的尝试非常少。造成这一结果的原因主要是，它会使公式的表达变得非常繁琐且不直观。比较著名的是组合逻辑的创始人之一申芬科（Schönfinkel）将谢弗竖与存在量词组合在一起（[1]）定义了一个新的逻辑常项 \dagger_x ：

$$\mathcal{A} \dagger_x \mathcal{B} \stackrel{def}{=} \exists x(\mathcal{A}|\mathcal{B})$$

并且证明了仅使用“ \dagger_x ”作为逻辑常项即可构建一阶逻辑。

作者没有给出以“ \dagger_x ”作为唯一逻辑常项的公理系统，而是列出了“ \dagger_x ”与已知逻辑常项的等价关系：

$$\begin{aligned} \neg \mathcal{A} &\leftrightarrow \mathcal{A} \dagger_x \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} &\leftrightarrow (\mathcal{A} \dagger_y \mathcal{A}) \dagger_x (\mathcal{B} \dagger_y \mathcal{B}) \\ \mathcal{A} \vee \mathcal{B} &\leftrightarrow (\mathcal{A} \dagger_x \mathcal{B}) \dagger_y (\mathcal{A} \dagger_x \mathcal{B}) \\ \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} &\leftrightarrow ((\mathcal{A} \dagger_y \mathcal{A}) \dagger_x \mathcal{B}) \dagger_z ((\mathcal{A} \dagger_y \mathcal{A}) \dagger_x \mathcal{B}) \\ \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} &\leftrightarrow ((\mathcal{A} \dagger_z \mathcal{A}) \dagger_y \mathcal{B}) \dagger_x ((\mathcal{B} \dagger_z \mathcal{B}) \dagger_y \mathcal{A}) \\ \forall x \mathcal{A}(x) &\leftrightarrow (\mathcal{A}(x) \dagger_x \mathcal{A}(x)) \dagger_y (\mathcal{A}(x) \dagger_x \mathcal{A}(x)) \\ \exists x \mathcal{A}(x) &\leftrightarrow (\mathcal{A}(x) \dagger_y \mathcal{A}(x)) \dagger_x (\mathcal{A}(x) \dagger_y \mathcal{A}(x)) \end{aligned}$$

不难看出，以“ \dagger_x ”代替其他逻辑常项会导致原本简单的公式变得极为冗长且晦涩难懂。需要注意的是，在使用“ \dagger_x ”重构一阶逻辑公式时，可能需要不止一个个体变元。

上面给出的是谢弗竖与量词组合构成的逻辑常项与一阶逻辑系统的关系。读者可能会好奇，如果只是使用谢弗竖来构建命题逻辑，其繁琐程度能否停留在人们可以接受的范围？下面给出以谢弗竖作为唯一逻辑常项的命题逻辑的例子。

公理： $(\mathcal{A}|(\mathcal{A}|(\mathcal{B}|(\mathcal{A}|\mathcal{A}))))$

替换规则： 设合式公式 \mathcal{A} 包含子公式 \mathcal{B} 的一个或多个实例。如果 $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ ，则把 \mathcal{A} 中 \mathcal{B} 的一个或多个实例替换为 \mathcal{C} 不改变 \mathcal{A} 的真值。

交换： $(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ 等价于 $(\mathcal{B}|\mathcal{A})$

对偶： 如果形如 \mathcal{A} 和 $(\mathcal{A}|\mathcal{A})$ 的字符串都出现在一个定理中，则如果对换这两个字符串在这个定理中的所有出现，结果也是个定理。

双重否定： $((\mathcal{A}|\mathcal{A})|(\mathcal{A}|\mathcal{A}))$ 等价于 \mathcal{A}

模仿-1: $(\mathcal{A} | (\mathcal{B} | \mathcal{B}))$ 等价于 $(\mathcal{B} | (\mathcal{B} | \mathcal{A}))$

模仿-2: $(\mathcal{A} | (\mathcal{A} | (\mathcal{B} | (\mathcal{B} | \mathcal{C}))))$ 等价于 $(\mathcal{B} | (\mathcal{B} | (\mathcal{A} | (\mathcal{A} | \mathcal{C}))))$

MP: 从 \mathcal{A} 和 $(\mathcal{A} | (\mathcal{B} | \mathcal{C}))$ 推出 \mathcal{C} 。

对比前面提到的以“ \neg ”和“ \rightarrow ”作为初始联结词构建的命题逻辑的公理和推理规则，以谢弗竖作为唯一逻辑常项的命题逻辑显著增加了公理和推理规则的繁琐程度。虽然公理由三个减少到一个，但是其缺乏可读性。如果不考虑替换规则，其他的推理规则有六条，大多数晦涩难懂。这足以解释为什么谢弗竖没有被广泛采用作为形式系统的初始联结词。也就是说，在实际应用中，研究者并未彻底贯彻奥卡姆剃刀的原则，而是在尽可能少的逻辑常项与表达式的冗长和违背常识之间寻找一种平衡。

2 逻辑常项、逻辑“真”与推理

由第1节的讨论可以看到，希尔伯特风格的演绎系统不可避免的要使用逻辑常项，因为逻辑常项及其性质是逻辑公理和定理能够保真的核心要素。研究者能做的只是减少逻辑常项的数量，但减少到以谢弗竖作为单一逻辑常项时，反而产生了较大的副作用。

实际上，希尔伯特风格的演绎系统预设了一个前提，即“逻辑是关于‘真’的科学”，这一思想起源于弗雷格。弗雷格认为，逻辑规律是思想的规律，是最具普遍性的规律，规定了人们应当如何思考。而这些规律就是“真”的规律，不需要考虑它们为什么是真的，因为它们构成了“真”本身。正如弗雷格所说，“真”这个词为逻辑指引方向。([23]，第129页)这一思想得到奎因的支持，他在逻辑学的入门教材中暗指逻辑是关于“真”的科学。([13]，第1页)

一旦接受上述观点，逻辑常项的消失似乎成为不可能。因为，在表达逻辑“真”时，不可避免的要引入逻辑常项。维特根斯坦更是将逻辑常项的地位提升到逻辑真理之上，认为逻辑真理只是使用逻辑常项产生的副产品。奎因也指出，逻辑“真”是那些只有逻辑常项本质出现的真理。一个词语在一个陈述中可以说有本质出现，如果用另一个词语替换该词语就能使该陈述变成假的。([12]，第2页)由此可见，逻辑常项对于逻辑“真”发挥着核心的作用。

事实上，关于逻辑的本质，历史上有另外一种被广为接受的立场，即逻辑是关于推理的科学。这一观点最早由达米特提出，他对弗雷格的理论提出了直言不讳的批评：“逻辑的呈现与句子的特征——‘真’相关联，而不是关系到句子到句子的过渡，这对逻辑和哲学都有非常有害的影响。”([4]，第433页)在这里，达米特提到的句子到句子的过渡即是推理，或者逻辑后承关系。达米特将这一理论上的修正归功于根岑在证明论方面的工作。

根岑提出了两种逻辑演算方法：自然演绎和矢列演算。〔6〕后者即是为达米特的观点提供理论支持的演算方法。³根岑用矢列演算规则重构了一阶逻辑的公理系统，从这个意义上讲，矢列演算可以被看作是对象语言的元理论。研究者在元语言层面讨论形式系统，逻辑常项的功能体现为相应的联结词规则，这使得逻辑常项在元语言层面消失成为可能。值得注意的是，根岑最初的想法并不是使用矢列演算的方法定义逻辑，进而证明逻辑常项对于推理不是必要的。根岑只是使用矢列演算的方法描述一个现有的形式系统，加深人们对于形式系统及逻辑常项的认识。但是，只要抛弃对命题逻辑和一阶逻辑等公理系统的认识，以矢列演算为起点重新定义逻辑，便可以实现本文的理论目标，即建立一个不含逻辑常项的逻辑，本文称之为“前逻辑”。

在元语言层面讨论对象语言的推理关系时，需要使用推出符号“ \vdash ”。令大写希腊字母 Γ 、 Θ 等表示有限的合式公式集（可能为空），那么，“从 Γ 可推出 \mathcal{A} ”记作“ $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ ”。可能有读者会质疑，“ \vdash ”也可视作某种意义上的逻辑常项。对此有两点值得说明，第一，“ \vdash ”是元语言层面的符号，并非对象语言中的逻辑常项，因此，“ \vdash ”不会出现在形式系统中；第二，与其说“ \vdash ”是逻辑符号，不如说它表示“逻辑”本身。前文将逻辑定义为推理，也就是命题间的逻辑后承关系，而“ \vdash ”只是表示这种关系的习惯记法。只要能够准确表达命题间的逻辑后承关系，研究者可以约定使用其他符号，甚至可以将其省略。

在消去逻辑常项后，随之而来的问题是，在前逻辑中，该如何增加逻辑常项？逻辑常项的本质是什么？塔斯基认为，不存在逻辑常项的描述。〔16〕因此，我们最多只能把它们列举出来。这就类似太阳系的行星，我们只能列举出来它们，但是找不到一种通用的原则说明一个天体是不是太阳系的行星。基于这样的看法，研究者对于逻辑常项可涵盖的对象产生了较大的分歧。除了没有争议的命题逻辑联结词和一阶量词外，元素属于符号（ \in ）、集合间的包含于符号（ \subseteq ）、等词（ $=$ ）、模态词必然（ \square ）以及逻辑“真”等是否应该被视为逻辑常项，研究者持有不同的看法。尽管塔斯基后来提出“置换不变性”以尝试刻画逻辑常项，但是置换不变性对于模态词是否适用，研究者仍然持有不同意见。对此，根岑给出的回答是，逻辑常项是通过矢列演算的联结词规则定义的。具体来说，通过在矢列演算中引

³这里简单解释为什么自然演绎不可以为达米特的观点提供理论支持？虽然达米特在其著作中多次使用根岑的自然演绎系统来说明证明论语义的思想，但他所强调的逻辑本质——“句子与句子之间的过渡关系”——在形式上并非自然演绎所能充分体现，而是由矢列演算所表达。达米特强调“语义应从证明而非真理出发”。矢列演算作为一个纯粹的推理关系系统，完全不依赖真值赋值或模型结构，因此成为“证明论语义”的自然基础。自然演绎虽然在技术上直观，但它更像是对“推理实践”的形式化，而不是对“推理关系”本身的分析。它展示了“如何从前提得到结论”，但未将“从前提出结论”的关系本身对象化。而矢列演算正是把这种关系本身当作逻辑的分析单位。根岑的矢列演算明确揭示了逻辑常项在推理中的结构性角色，因此更直接地为达米特的“逻辑即关于推理的科学”这一立场提供理论支撑。换言之，自然演绎展示的是“推理的过程”，而矢列演算刻画的是“推理的结构”。达米特关注的正是后者。

入新的规则,就可以定义一个新的逻辑常项。这一规则表达了该逻辑常项的含义,逻辑常项也可以分析为相应的规则。从这个意义上讲,根岑通过矢列演算的方式给出了判定逻辑常项的方法。且不论该方法是否为定义逻辑常项的权威理论,但相较于塔斯基的理论而言,根岑的理论对于加深人们对逻辑常项的认识有重要的意义。

3 没有逻辑常项的逻辑

根据上一节的论述,可以总结出关于前逻辑的几个要点:

- 用矢列演算的形式在元语言层面定义一个不含逻辑常项的逻辑,再通过联结词规则给出逻辑常项的定义;
- 逻辑常项是通过联结词规则的方式添加到逻辑中的,他们不是这个逻辑的必要组成部分;
- 矢列演算是关于对象语言的元语言,在元语言层面用“ \vdash ”表示命题间的逻辑后承关系。

这个逻辑唯一的公理是下面的同一公理:

$$(1) \text{ 同一公理: } \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$$

矢列演算系统是由同一公理、结构规则和联结词规则构建的。结构规则从结构的层面刻画逻辑推理的特性,不显示逻辑联结词;联结词规则表述推理过程中联结词的引入和消去方式,揭示联结词的逻辑特性。任何矢列演算或者是同一公理,或者是由同一公理出发,运用这两类规则推得的结论。([22], 第3页)

同一公理对于形式系统的意义与逻辑主义者对分析命题的探索有密切的联系。弗雷格在《算术基础》提出,算术真理都可以还原为逻辑和定义。他认为如果一个真命题的核证仅仅诉诸逻辑和定义,那么这个命题就是分析真理。实际上,这一思想最早可以追溯到莱布尼茨的学说,即所有必然的真理都可以经过有限的步骤追溯到逻辑的同一性。弗雷格则是将这一思想第一次以形式化的方式准确表述,使得研究者可以将其证实或证伪。根岑最终将莱布尼茨的理念付诸实践。莱布尼茨提出的逻辑“真”的本质在矢列演算中得到证实。基于这一思想的逻辑“真”的概念与奎因的“只有逻辑常项本质出现”有明显的差异。前者的“真”概念先于逻辑常项,而后者需要先定义逻辑常项,才能给出何为“真”。

第一条结构规则确保矢列演算符合经典逻辑推理方式:

$$(2) \text{ 稀释规则: } \quad \frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma, \mathcal{A} \vdash \Theta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{A}}$$

上面的两个表达式即矢列演算的推导图示，横线之上是已知的推理形式，横线之下是从已知的推理形式能够得到的推理形式。注意到在这两个图示中，推理形式中的逻辑后承不是单个公式，而是公式集，这是因为根岑的矢列演算适当拓展了推理这一概念：形如 $\Gamma \vdash \Theta$ 的推理是有效的，当且仅当， Γ 中的每一个公式都为真时， Θ 中存在公式为真。关于多结论推理，尽管人们在日常推理中几乎不会用到，但是它已经在三段论省略式中得到应用。通常来说，三段论省略式是省略了某些真前提的三段论，类似的，可以称任意一个三段论是省略了错误结论的三段论省略式。

这两个图示的含义是，增加无关的前提和结论不会影响原本的推理关系。这是针对经典逻辑而言的，因此，稀释规则表达了经典推理在增加无关前提或结论时的稳定性。

值得注意的是，稀释规则对于这一通过元语言描述的逻辑而言不是必要的。事实上，只要有同一公理，前逻辑已经得到了完整的表述。但是，在这样的逻辑中不能做除了命题与自身同一之外的任何判断，因为它没有规定任何推理方式。而稀释规则确定了经典逻辑的推理方式——允许多个结论的单调推理。

如果逻辑常项不是必要的，那么，如何定义“扩充逻辑”这一问题就有了更多值得探讨的空间。通常认为，扩充逻辑是在经典逻辑的基础上，通过引入新的逻辑常项以及与这些常项相关的新的公理和推理规则而构成的系统。([19], 第9页) 这一观点背后隐含的思想是，经典逻辑是最基础的逻辑，是扩充逻辑系统前需要承认的前提性条件。但是，这一看法似乎与变异逻辑的定义有冲突。变异逻辑是由否定或修改经典逻辑的一个或多个假定而导致的系统，它们至少在某些定理上与经典逻辑不一致：经典逻辑的某些定理不再是它们的定理，它们的某些定理也不是经典逻辑的定理。([19], 第10页) 也就是说，经典逻辑并不是我们必须作为前提接受的最基础的逻辑，其中的定理和公理也不是绝对的“真”。因此，如果肯定了变异逻辑的定义，那么，扩充逻辑以经典逻辑作为基础就是不太合理的。按照本文的观点，经典逻辑也应当算作扩充逻辑，是在元语言层面的同一公理的基础上增加稀释规则得到的逻辑。尽管在只有同一公理的情况下，我们不能做什么有价值的推理，但是不能回避的是，这样一个既没有逻辑常项也没有推理规则的，只有命题与自身同一能够得到肯定的逻辑才应当是其他逻辑系统必须要接受的理论前提。

第二条结构规则是对于矢列演算非常重要的切割规则：

$$(3) \text{ 切割规则: } \quad \frac{\Gamma \vdash \mathcal{A}, \Theta \quad \Gamma, \mathcal{A} \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{A}}$$

通过稀释规则很容易证明，切割规则等价于下面的传递性规则：

$$\text{传递性规则: } \frac{A \vdash B \quad B \vdash C}{A \vdash C}$$

注意到在 (1)-(3) 中没有出现任何逻辑常项，也就是说，它们不依赖逻辑常项而成立。这为前逻辑提供了佐证。

实际上，切割规则并不是研究者引入的结构规则，它可由有限的演算步骤被消去。也就是说，切割规则可由同一公理和稀释规则经有限步推出。切割规则对于矢列演算有重要的意义，因为，除切割规则外，稀释规则和下文会介绍的联结词规则都只能增加公式的复杂度，只有切割规则能够降低公式的复杂度。通过这一性质可以证明该逻辑是一致的。不妨假设该逻辑不一致，那么，可以同时推出 $\vdash A$ 和 $A \vdash$ 。由切割规则可以得到 \vdash ，即任何前提可推出任何结论。这是不可能的，因为在不使用切割规则的情况下，其他规则都不能降低公式的复杂度。另外，通过联结词规则引入逻辑常项后，需要保持切割规则可被消去，这是判定逻辑常项标准之一。

至此，消除逻辑常项的工作似乎已经完成。但是，在自然语言中，即使没有任何逻辑常项，命题间也可能存在推理关系。例如，由“小王是哥哥”可推出“小王有兄弟姐妹”。令这两个命题分别为 p 和 q ，则该推理在元语言层面可表述为 $p \vdash q$ 。这与 $p \wedge q \vdash q$ 的涵义有本质的不同，后者的成立是由联结词的性质决定的，而前者成立相当于在逻辑中增加了一条关于原子命题 $p \vdash q$ 的新的公理。考虑到自然语言中有无限多个这样的推理关系，这意味着即使消除了所有的逻辑常项，也不可避免的要接受无限多个公理，这有悖于莱布尼茨的设想。但是，逻辑语言与自然语言不同，它可以设定存在彼此独立的原子命题或公式。也就是说，如果只考虑逻辑语言，那就不需要担忧可能存在无限多个公理的问题。

如果要前逻辑应用于某一种自然语言，就需要针对该语言做出限定。维特根斯坦在《逻辑哲学论》中设想了一种语言，其中所有的基本命题不仅不包含任何逻辑常项，而且它们之间不存在推理关系。哈金称这样的语言为“前逻辑语言”。([7]) 这样的语言并不真实存在，只是一种虚构 (myth)。逻辑联结词作为附加成分被添加到前逻辑语言中，其句法规则得到规定，语义由真值表来解释。这样，复杂命题的真值条件与构成它的简单命题的真值建立了联系。⁴

⁴尽管维特根斯坦没有十分肯定这一虚构的意义，但是它对于人们理解逻辑与哲学有指导性的作用，因为它是关于纯粹可描述的语言片段的最纯粹的理念形式。([7]) 它能够促使研究者思考，能够通过联结词规则增加逻辑常项的语言得以成立的最小条件是什么？关于前逻辑语言的主要质疑是，维特根斯坦没有给出原子命题的真值条件。也就是说，该如何理解前逻辑语言中的原子命题，是否需要建立一个形式语义，抑或提出一种真值理论，这些问题没有一个公认的答案。对此，研究者假设，前逻辑语言中的原子命题可以直接被理解，因为前逻辑语言本身就是一个虚构，其中的原子命题被理解也应当作为虚构的一部分。笔者认为，前逻辑语言不是真实存在的语言，它只是一种理论假设。这一假设的意义在于帮助我们理解逻辑以及逻辑常项的本质，以及没有逻辑常项的逻辑能

4 联结词规则与变异逻辑

这一节将以常见的联结词的引入规则为例,说明引入逻辑常项时需要注意的问题。另外,本节也会在结构规则的层面讨论经典逻辑和变异逻辑的区别和联系。本文关注的重点不是这些逻辑常项以及不同逻辑系统的性质,而是逻辑常项和结构规则能否与前文提出的逻辑完全“隔离”,进而论证前逻辑的可行性。

这里通过合取引入规则来解释逻辑常项与逻辑系统的关系:

$$\begin{array}{c} \text{合取引入规则:} \\ \frac{\Gamma, \mathcal{B} \vdash \Theta}{\Gamma, \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vdash \Theta} \\ \frac{\Gamma, \mathcal{A} \vdash \Theta}{\Gamma, \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vdash \Theta} \quad \frac{\Gamma \vdash \mathcal{A}, \Theta \quad \Gamma \vdash \mathcal{B}, \Theta}{\Gamma \vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \Theta} \end{array}$$

上面几个图式的涵义是,可以将推理的前提中某一命题替换为以该命题为合取肢的合取命题,也可以把结论中只有一个命题不同的两个推理合并为一个推理,并这两个命题由合取符号联结。

在增加了合取词之后,为确保前逻辑不被破坏,需要保证在增加了合取词之后的新的逻辑系统中,不含合取词的片段与合取词之间是可以被隔离的,相互独立的。这种独立性被描述为逻辑常项的引入具有保守性。其含义是,对于一个语言片段,如果某一个逻辑常项不在其中出现,那么,以定义的方式将它加入到这个语言片段中之后,只要我们不使用该逻辑常项,在原语言片段中能够得到的表达式不会改变。简而言之,保守扩充不会改变原有的语言片段。本文第2节已经强调,逻辑常项是通过联结词规则定义的,即上面的合取引入规则并不是对我们已经了解的某个联结词的描述,而是以联结词引入规则的方式给出了合取词的定义。

一个著名的反例是普莱尔提出的联结词“*tonk*”([11]),它的定义如下:

$$\begin{array}{c} \mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \text{ tonk } \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \text{ tonk } \mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \end{array}$$

由这两个推理及传递性规则,可以得到 $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ 。但是,后者没有“*tonk*”出现,在不使用上面的关于“*tonk*”的定义的情况下,在原来的逻辑中无法得到 $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ 。也就是说,“*tonk*”的引入导致原语言片段中能够得到的表达式发生了改变。这里也可以用另外一种方式来解释为什么“*tonk*”的引入是不保守的。由于在原来的逻辑中无法得到 $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$,因此,传递性规则不成立。这说明切割规则不能被消去,所以“*tonk*”的引入是不保守的。

够成立的前提条件。因此,前逻辑语言中的原子命题该如何被理解这一问题远没有这一假设的理论价值重要,本文倾向于接受其直接可被理解的观点,或者把更多注意力放在其理论价值上。

普莱尔试图用“*tonk*”来论证逻辑常项不能由一个系统的公理或推理规则唯一决定。哈金认为,保守扩充需要确保同一公理及稀释规则中的复杂命题可以被还原为原子命题,且切割规则可以被消去。保守性存在的意义在于,虽然我们可以通过联结词规则定义一个联结词,但是这种定义不是随意的,它需要满足保守性这一条件。本文认为,无论是普莱尔的论证,还是哈金的观点,都说明逻辑常项的引入不能改变前逻辑中能够得到的表达式。因此,保证前逻辑完好无损是定义逻辑常项的大前提,前逻辑是构建逻辑系统的基础。

其他的命题逻辑联结词的引入规则与合取词的引入规则的形式类似,本文不再赘述,这里只给出一阶逻辑量词“ \forall ”和“ \exists ”的引入规则:

$$\text{量词引入规则:} \quad \frac{\Gamma \vdash F(a), \Theta}{\Gamma \vdash \forall x F(x), \Theta} \quad \frac{\Gamma, F(a) \vdash \Theta}{\Gamma, \exists x F(x) \vdash \Theta}$$

其中, x 不在 Γ 和 Θ 中自由出现,且 a 不在 Γ 和 Θ 中出现。

需要补充的是,在这一规则之前必须定义变量替换的结构规则。([2])量词引入规则说明,当用变元 x 替换个体常量 a 时,如果替换发生在结论中,则可以得到“每一个”;如果替换发生在前提中,则可以得到“存在”。量词也能通过结构规则的方式定义,这说明前逻辑可以很自然地扩充到一阶逻辑,前逻辑不仅是命题逻辑的基础,也是一阶逻辑的基础。

接下来本文以直觉主义逻辑和相干逻辑来讨论前逻辑与变异逻辑的关系。根据变异逻辑的定义,这两个逻辑都是在修改了经典逻辑的某些假定而导致的系统。“直觉主义命题演算是经典命题演算的真子系统,排中律在其中是无效的,但是,如果把排中律作为公理添加到直觉主义命题演算中去,立即可得到经典的命题演算系统”。([20],第50页)而排中律为 $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$,这说明,在希尔伯特风格的演绎系统中,只能先定义否定和析取联结词,再通过联结词以公理的方式区分经典逻辑和直觉主义逻辑。在矢列演算系统中,在限定推理只能有单个命题作为结论的情况下,也可以用联结词规则的方式区分这两个逻辑。冯棉指出,直觉主义矢列演算系统有四个初始联结词 \neg, \wedge, \vee 和 \rightarrow ,对这些联结词作直觉主义解释时,它们是彼此独立的,不能相互定义,在直觉主义矢列演算系统中加入双重否定消去规则便可以得到经典逻辑矢列演算系统。([22],第26页)

实际上,直觉主义逻辑与经典逻辑的区分在定义联结词之前就能够得到体现:如果允许多命题结论的推理,则为经典逻辑;如果限定推理只有单一命题结论,则为直觉主义逻辑。这一限定等价于保留或删除稀释规则的第二部分,即如果结论不能被稀释,则为直觉主义逻辑。这说明直觉主义逻辑与经典逻辑的差异可以在前逻辑中通过结构规则区分出来,不需要借助逻辑联结词。这也证明了直觉主义逻辑作为一种变异逻辑是以前逻辑为基础经过结构规则的限定得到的,而不是在

经典逻辑的基础上构建的。这两种逻辑的区别体现为元语言层面的结构推理方式的不同。

众所周知，在希尔伯特风格的公理系统中，经典逻辑和直觉主义逻辑的区别体现为对排中律的不同观点。直觉主义逻辑拒斥排中律，而经典逻辑接受排中律作为公理。既然如此，稀释规则的第二部分，即是否容许推理存在多个结论，与排中律有何联系？实际上，只要容许推理存在不止一个结论，就很容易得到排中律。这是因为，多个结论表示的是在结论中至少有一个公式为真，这代表结论是一个析取式，进而由否定引入规则，很容易得到 $\vdash \mathcal{A}, \neg \mathcal{A}$ 。相反的，如果不接受多个结论，就不能得到上述结果。

这一差异在哲学语义层面也能得到体现。经典逻辑接受“实无穷”的观点（即承认无限集合是一个完成了的实体），而直觉主义反对“实无穷”而支持“潜无穷”的观点，即把无穷看作为不断创造着的又完成不了的一个过程。（[20]，第48页）直觉主义认为，“存在必须被构造”。这意味着，在经典逻辑中，真理是“存在于世界”的；而在直觉主义逻辑中，真理是“存在于证明中的”。如果接受多个结论，意味着真命题存在于结论中，这是存在于世界的客观事实，符合经典逻辑的观点。而直觉主义中的“证明”对应于一个具体的构造（一个证明对象），所以一个推理的结论只能代表“我们已经构造出 \mathcal{A} 的证明”。如果右侧同时有 \mathcal{A}, \mathcal{B} ，就意味着“我们已经构造出 \mathcal{A} 或 \mathcal{B} 的证明”，但实际上我们并不知道是哪一个——这在直觉主义语义上是非法的。

多森认为，变异逻辑是由于“不同的结构推理方式但相同的逻辑常项的分析方式”。（[3]）尽管在作为对象语言的希尔伯特风格的演绎系统中，直觉主义逻辑与经典逻辑的逻辑常项有不同的含义，但是，如果考虑这些逻辑常项在元语言层面的结构规则定义，则它们是等价的。多森提出，这是因为不同的变异逻辑存在“共同分母”。但是，他没有明确指出这一共同分母具体是什么，只是说这是变异逻辑之间的“模糊的相似性”。以本文的立场，多森提出的共同分母指的就是前逻辑。

相干命题逻辑的公理系统较经典命题逻辑复杂很多，极小系统也有七条公理和八条推理规则，并且需要定义“ \neg, \vee, \rightarrow ”三个联结词，其中，“ \rightarrow ”被解释为相干蕴涵。这些公理和推理规则的具体形式本文不再赘述。从这些事实可以了解到，为了刻画相干推理，研究者需要为演绎系统提出较多的前提假设。由此引出了一个问题：是否有更为简洁的方式刻画相干推理？矢列演算的方法给出了答案。刻画相干推理时，只需要将两条稀释规则都去掉即可，即推理的前提和结论都不能被稀释。其直观含义也很容易理解，因为相干推理的前提和结论都必须是相关的，所以前提和结论中都不能随意增加无关的命题。

相干逻辑“坚持演绎推理的相干性，拒斥‘结论的推导未实际使用前提’的推理方式”。（[21]，第8页）这一特性通过公理和推理规则反映在希尔伯特风格

的相干逻辑系统中，也在逻辑的矢列演算中得到体现。首先，以同一律作为唯一公理相干逻辑矢列演算的推理前提很显然符合这一要求，因为前提与结论是同一公式，前提确实得到使用。其次，如果稀释规则的第一条成立，就可以在前提中增加无关的公式，而这就不再满足这一要求。

由于相干逻辑在矢列演算中只允许单结论，这使得相干逻辑不接受排中律，这一点与直觉主义逻辑是相似的。这是否意味着相干逻辑也是建立在构造主义的基础之上呢？答案是，不完全是。在相干逻辑中，“相干”是指“前提的每个有限子集都有共同可满足模型”。相干逻辑只允许“从一致的前提导出一个具体、相干的结论”，不允许“从一致的前提推出一个模糊的择一结论”。也就是说，单结论不仅是构造主义的约束，更是语义上一种“相干性保持约束”，即推理的结论必须与前提共享同一相干模型。因此，相干逻辑的单结论形式，既是构造主义的证明论体现，也是相干语义的一致性保障。

根据著名的奥卡姆剃刀的原则，一个科学理论应当“最小化自由参数，无理由的实体和前提、独立的原则和临时的解释并具有最大程度的统一性、可测试性和解释力”。〔9〕简而言之，研究者应当尽可能建立具备简洁性的理论体系。科学史上一个著名的例子是哥白尼日心说的提出。根据托勒密的地心说理论，为了解释行星的无规则和后向运动，天文学家需要假设多个本轮和均轮，而哥白尼的日心说能够移除这些实体，并且避免了相距遥远的天体在运动过程中需要保持同步这一明显荒谬的假设。〔10〕对于相干逻辑，矢列演算的方法避免了希尔伯特风格演绎系统的多个公理和推理规则，符合简洁性的原则。与直觉主义逻辑相类似，上述结果说明前逻辑通过限制结构规则的方式给出了相干逻辑的简洁的刻画，相干逻辑与经典逻辑的差异体现在结构规则上，不需要逻辑联结词就能将这两种逻辑相区分。

5 判定逻辑常项的基本原则

多森以矢列演算为基础提出了将逻辑联结词视为标点符号的理论。他认为，演绎推理独立于用于表达前提和结论的语言中的任意逻辑常项，逻辑常项是推理中除前提和结论之外的部分所依赖的，可以说是充当表示推理结构特征的“标点符号”；这标点符号的函数是以等价形式表示为逻辑常项的分析，被视为逻辑常项的标准。〔3〕多森的理论为本文的前逻辑提供了支持，他总结了几条判定逻辑常项的原则：

〔A〕 逻辑是推理的科学；

〔B〕 基础的形式推理为结构推理；

〔C〕 描述非结构的形式推理要依赖对象语言的常项的存在，任何常项最终可以分

析为结构术语;

[[D]] 逻辑独立于主题;

[[E]] 逻辑话语的层次高于一般话语的层次,在后者中人们根据逻辑原则来处理特定的主题。

其中,[[A]]已在第2节得到论述,[[B]]是对[[A]]的补充,是非常必要的,它规定了结构推理在描述推理方面的合法性。这里所说的结构推理即通过矢列演算在元语言层面表达的推理,只有通过结构推理才能不依靠对象语言中的逻辑常项来表达推理。这里需要说明的是,本文中的大写希腊字母 Γ, Θ, \dots 仅表示公式的集合,但它们也可以表示多重集合、序列等,进而能够刻画正结合演算等其他类型的推理方式。

[[C]]勾画出逻辑形式的统一的图景,多森认为,由[[A]]、[[B]]和[[C]]可以得到下面的定理:([3])

[[I]] 一个常项为逻辑常项当且仅当,它能够最终被分析为结构的术语表述。

其中,“最终”就是递归定义的意思,而“分析”的含义是某一种语言的表达式需要在另一种不包含该表达式的语言中得到与其等价的表述。相对于矢列演算,后者的意思是通过元语言给出对象语言中某个表达式的等价表述。实际上,多森将根岑的观点(即逻辑常项由联结词规则定义)做了更为深入的阐述和解释。

[[D]]也可被称为逻辑具有主题中立性,其含义是,结论的真是基于逻辑的原因由前提的真而得到保证,而与命题的内容无关,更进一步说,逻辑公理及推理规则对于作为其作用对象的命题的主题不作限制。([5],第52页)主题中立性是弗雷格论证逻辑为最具普遍性的科学的重要依据。

主题中立性有两种解释。较弱的解释为:对于逻辑系统而言,只有逻辑常项是本质的,除此以外都是模式化的(schematic),即可用元语言变元来表示。如果采用这一解释,那么主题中立的原则可以说是毫无争议的。较强的解释为:逻辑是独立于其应用对象的,同样的逻辑规律适用于任何对象。这里存在的问题是,根据[[A]],逻辑的应用对象是推理,而推理存在不同的方式(单调或非单调推理、单一结论或多结论推理等),因此,同样的逻辑规律不可能适用于不同的推理方式,除非假设只有一种推理方式是有效的。因为推理方式是由结构规则决定的,所以,只有一种有效的推理方式意味着只能限定一种正确的结构规则。

推理方式是由对象语言及对象语言讨论的对象决定的。举例来说,如果对象语言的任意命题被断定为真当且仅当该命题可被证明,则相应的有效结构推理应当被限定为单结论矢列演算系统;如果对象语言的任意命题被断定当且仅当该命题为真,则相应的有效结构推理应当被限定为多结论矢列演算系统。

以此来看,主题中立性的强解释是不能被接受的。多森对这一问题没有给出

明确的回答,但也认为强解释是值得怀疑的。本文认为,是否应该接受强解释,取决于最基础的逻辑应当被怎样限定。如果最基础的逻辑是经典命题逻辑,那么,逻辑不可能完全独立于其应用对象,因为经典逻辑的推理方式不能适用于直觉主义逻辑的对象语言。但是,如第3节所述,经典逻辑也可被视为扩充逻辑,它是在仅包含同一公理的前逻辑的基础上通过增加稀释公理得到的逻辑。同样的,其他的逻辑也都是在前逻辑的基础上通过限定结构规则或定义某些逻辑常项得到的。从这个意义上讲,主题中立性的强解释是可以被接受的,因为前逻辑适用于任何对象语言、任何主题。或者说,无论在哪一种对象语言中以怎样的方式进行推理,同一律都是必须被遵守的逻辑规律。

对于[E]可有两种理解。第一种理解即[D]的弱解释;第二种理解是:逻辑系统可由一种高层次的语言被恰当地形式化,这种高层次的语言是演绎性的元语言,矢列演算就是这样的语言,研究者通过低层次的语言讨论特定主题,这种低层次的语言是可以表述前提和结论的对象语言。其中,高层次的语言即前文提到的元语言。在推理过程中,元语言中的结构特性以内隐的形式存在,而逻辑常项使得这些结构特性在对象语言中成为外显的形式。如果以第二种理解来看待[E],研究者可以准确把握元语言层次的结构特性与对象语言中的联结词之间的理论联系。

本文认为,[A]—[E]这五条原则为前逻辑提供了有力的支持。基于这些原则以及第3节对前逻辑的阐述,不难看出,最基础的矢列演算系统先于逻辑常项而存在。研究者必须先先在元语言层面定义一个结构推理的逻辑,才能通过结构规则引入逻辑常项的定义,而这一逻辑就是仅包含同一公理的前逻辑。这一事实在这五条原则中也得到了体现,即必须先有[A]和[B]对于逻辑的定义,才能通过[C]来定义逻辑常项,而实际上[A]和[B]就是对前逻辑的描述。多森也在文中提到,逻辑常项的共同特性来源于一种特定的逻辑概念。([3])本文提出的前逻辑可以被认为是这一特定的逻辑概念给出定义并加以理论阐述。

6 前逻辑的理论意义

从前文的论述不难得出,在讨论逻辑常项的经典文献中很容易找到关于前逻辑的思想。但是,这一概念一直没有被明确的提出和探讨。笔者认为,这是因为逻辑系统的概念限制了研究者对于“何为最基础的逻辑”这一问题的思考空间。通常认为,一个逻辑由符号集合、形成规则、公理和推理规则构成,并且相对于其语义具有可靠性和完全性。这些约定俗成的原则似乎意味着一个逻辑必然要有逻辑常项,因为,如果没有逻辑常项就无法表达逻辑“真”,也就不可能得到可靠性和完全性的证明。针对这一问题,不妨思考前逻辑和前逻辑语言之间的关系。很容易得到,前逻辑相对于前逻辑语言是具有可靠性和完全性的。因为前逻辑语言

中的不同命题间没有逻辑关系，而前逻辑只能表达命题与自身具有同一关系，所以，对于前语言中的任意命题 p ， $p \vdash p$ 当且仅当 p 在前逻辑语言中与自身同一。当然，这样的可靠性和完全性是不足道 (trivial) 的。但是，不能因为不足道就忽略了这样一个事实——前逻辑具备一个逻辑的全部要素。这一不足道的证明过程反而说明前逻辑是比经典命题逻辑更为基础的逻辑，是构建其他逻辑的前提。当然，也是因为不足道，使得研究者忽略了前逻辑这一概念，只能在定义了逻辑常项的系统中选择一个作为最基础的逻辑。

回到本文的主题，逻辑常项的存在使研究者用了大量笔墨探讨逻辑常项的划界，而逻辑常项的消失使研究者可以在不受“何为逻辑‘真’”这一问题的影响的情况下回到“何为逻辑”这一更为本质的问题。

参考文献

- [1] K. Bimbó, 2010, “Schönfinkel-type operators for classical logic”, *Studia Logica*, **95(3)**: 355–378.
- [2] K. Došen, 1985, “Sequent-systems for modal logic”, *The Journal of Symbolic Logic*, **50(1)**: 149–168.
- [3] K. Došen, 1989, “Logical constants as punctuation marks”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **30(3)**: 362–381.
- [4] M. Dummett, 1981, *Frege: Philosophy of Language*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- [5] J. Fisher, 2007, *On the Philosophy of Logic*, Belmont, CA: Cengage Learning.
- [6] G. Gentzen, 1969, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- [7] I. Hacking, 1979, “What is logic?”, *The Journal of Philosophy*, **76(6)**: 285–319.
- [8] A. G. Hamilton, 1988, *Logic for Mathematicians*, Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [9] K. T. Kelly, 2011, “Simplicity, truth, and probability”, in P. S. Bandyopadhyay and M. R. Forster(eds.), *Philosophy of Statistics*, **Vol. 7**, pp. 983–1024, Amsterdam: North-Holland.
- [10] T. S. Kuhn, 1957, *The Copernican Revolution: Planetary Astronomy in the Development of Western Thought*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- [11] A. N. Prior, 1960, “The runaway inference-ticket”, *Analysis*, **21(2)**: 38–39.
- [12] W. V. O. Quine, 1981, *Mathematical Logic*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- [13] W. V. O. Quine, 1982, *Methods of Logic*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- [14] R. S. Robin, 1971, “The Peirce papers: a supplementary catalogue”, *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, **7(1)**: 37–57.

- [15] H. M. Sheffer, 1913, "A set of five independent postulates for boolean algebras, with application to logical constants", *Transactions of the American Mathematical Society*, **14(4)**: 481–488, Full publication date: Oct., 1913.
- [16] A. Tarski, 1956, "On the concept of logical consequence", in J. H. Woodger(ed.), *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, pp. 409–420, Oxford: Clarendon Press.
- [17] A. N. Whitehead and B. Russell, 1927, *Principia Mathematica*, **Vol. 1**, Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [18] L. Wittgenstein, 1922, *Tractatus Logico-philosophicus*, New York: Harcourt, Brace, Incorporated.
- [19] 陈波, 逻辑哲学, 北京: 北京大学出版社, 2005年。
- [20] 冯棉, 经典逻辑与直觉主义逻辑, 上海: 上海人民出版社, 1989年。
- [21] 冯棉, 相干逻辑研究, 上海: 华东师范大学出版社, 2010年。
- [22] 冯棉, 结构推理, 桂林: 广西师范大学出版社, 2020年。
- [23] 弗雷格(著), 王路(译), 王炳文(校), 弗雷格哲学论著选辑, 北京: 商务印书馆, 1994年。

(责任编辑: 映之)

Can Logical Constants Disappear?

Pengfei Song

Abstract

This paper begins with the reducibility of logical constants and gradually explores the question of whether logical constants can disappear. Regarding reducibility, the paper discusses a series of properties of the Sheffer stroke as a functionally complete set with a single connective, and illustrates, through examples, the limitations of logical systems that take the Sheffer stroke as the only logical constant. It is then argued that the construction of logical systems requires a balance between the principle of Occam's razor and the excessive complexity and length of logical expressions. Concerning the question of whether logical constants can disappear, this paper, based on Gentzen's sequent calculus, proposes the concept of "pre-logic" at the meta-language level, within which no logical constants exist. The paper further distinguishes between extended logics and deviant logics, and argues that all logics are obtained through extensions built upon pre-logic. Finally, several principles for identifying logical constants are discussed, and it is argued that these principles provide support for the notion of pre-logic.