逻辑学研究　2026 年第 2 期，60–74
文章编号：1674-3202(2026)-02-0060-15

作为数学基础的一价基础及其自主性辩护

叶发扬　　　李娜

摘　要：数学基础是数学哲学研究中的重要问题，而数学基础的评价标准问题又是数学基础研究的一个核心议题。在数学基础的评价标准中，自主性是一个必要的标准。数学基础的自主性表明，作为数学基础的基础理论不能在逻辑和概念上依赖其他理论，其具有终极意义上的初始性。近年来，沃沃夫斯基（V. Voevodsky）等人提出一个被称作一价基础的研究计划，该计划以同伦类型论作为理论基础，旨在为数学建立一个不同于集合论的新数学基础。一价基础是否满足数学基础的自主性标准？通过分析与研究发现，无论是从逻辑自主还是概念自主视角来看，一价基础都具有完全的自主性。

关键词：数学基础；一价基础；同伦类型论；集合论；自主性

中图分类号：B81　　　**文献标识码：**A

1　引言

数学基础是数学哲学研究中的一个重要问题，目前学界一般将含有选择公理的策梅洛–弗兰克尔集合论（Zermelo-Fraenkel Set Theory with the Axiom of Choice，简记作 ZFC）视作数学的“官方”基础。但是，“一种健全的数学哲学最起码要与数学实践密切相关，否则只能成为文字游戏。”（[20]，第 88 页）因此，随着数学实践的不断发展、数学基础研究的日渐深入以及集合论在数学基础问题上面临的诸多困境，20 世纪 60 年代，劳威尔（F. W. Lawvere）等人基于结构主义数学实践，提出用范畴论（Category Theory）代替集合论作为数学的新基础，并分别于 1964 年和 1966 年建立了两个具体的公理化范畴理论，即集合范畴的初等理论（Elementary Theory of the Category of Sets，[7]）和作为基础的范畴的范畴理论（Category of Categories as a Foundation，[8]）。近年来，随着数学实践中机器证明与机器检查工作的大力兴起与发展，沃沃夫斯基（V. Voevodsky）等人又提出用一价基础（Univalent Foundations）代替集合论作为数学的新基础，并将该数学基础计

收稿日期：2024-12-17
作者信息：叶发扬　中共青海省委党校马克思主义学院
fayangye@163.com
李娜　南开大学哲学院
linawii@nankai.edu.cn
基金项目：国家社会科学基金重点项目“基于哲学逻辑的集合论研究”（16AZD036），天津市教委社会科学重大项目（2020JWZD27）。

划称为一价基础计划。([12, 14–16]) 那么这一全新的数学基础计划是否具有合理性与可行性呢？其中一个关键的问题在于，它是否符合数学基础的评价标准。虽然目前尚不存在一个被广泛接受与认可的系统性评价标准，但其中的自主性似乎是不可或缺的，因为该标准蕴含于数学基础的基本涵义之中。可以说，任何一个数学的候选基础理论，如果不符合自主性标准，它就不可能被视作数学基础。因此，本文将基于自主性视域，探讨一价基础作为新数学基础的合理性。

2　数学基础的自主性标准

数学基础的自主性标准内蕴于数学基础本身，因此对自主性标准的理解理应始于数学基础的基本涵义。然而，对“数学基础”的理解，又应当从对“基础”的认识开始。“基础”一词一般喻指一个事物存在与发展的根基、起点或必要条件。根据这一基本的内涵阐释，“基础”无疑具有本体论上的终极意义。正因为如此，在哲学领域也就产生了一个关于基础主义的基本立场。在不同的哲学分支学科与领域中，关于基础问题的探讨都不同程度地、隐性或显性地受到基础主义思想的支配与影响。当然，基础主义并非基于本体论意义，而是立足于认识论或知识论视域的，其表明所有知识或信念都有一个共同的、唯一的、确定的基础。([19]; [21]，第 133−160 页) 例如，就整个科学大厦而言，数学被视作所有科学的基础。而数学基础主义是基础主义在数学领域的具体体现，其旨在为所有数学寻找一个唯一且可靠的基础理论，并将整个数学大厦建立在这一具体基础理论之上。因此，基于基础主义的基本涵义，我们实质上可以将数学基础主义的基本观点简要概述为：数学理论存在基础理论与非基础理论之分，非基础理论基于基础理论得到认识论上的构建或解释。换言之，我们以基础理论作为认识和理解非基础理论的前提，通过这种认识进而构建一座认识论意义上的数学知识大厦。

具体而言，基于某一作为数学基础的基础理论，所有的数学对象都能够得到解释，所有的数学概念都能够得到定义，所有的数学定理都能够得到证明。例如，就集合论作为数学基础而言，恩德顿 (H. B. Enderton) 在《集合论要素》中将集合论的基础作用阐述为：“‘数学可以嵌入到集合论中’。这意味着数学对象（如数和可微函数）可以被定义为特定的集合。并且数学定理（如微积分的基本定理）可以视作关于集合的陈述。此外，这些定理将从我们的公理中得到证明。”([4]，第 10−11 页) 杨睿之将其阐释为：“人们是在下述意义上称公理化集合论是数学的基础的。首先，几乎所有的数学概念都可以在集合论语言中被定义。在这些定义之下，几乎所有的数学定理都可以被看作是集合论公理系统 ZFC 的内定理，并且涉及的数学对象都被定义成一个个集合。”([24]，第 12 页) 根据这些阐述不难发现，其中的“可以被定义”“可以视作”等表述都充分说明，关于数学基础的认识与理解是基于认识论视域而进行的。也就是说，所谓的数学基础并不是以某一具体数

学学科为起点或地基，从而在此基础上直接发展出全部数学；而是以某一具体数学学科为起点或地基，从而实现对全部数学的重构与解释。以作为数学基础的公理化集合论 ZFC 和作为非基础理论的自然数理论为例，自然数理论显然早于集合论得到更成熟的发展，但我们不能说自然数理论是基于集合论发展起来的，因为这不符合真实的数学实践。从数学基础的角度来说，以 ZFC 为基础，我们确实可以将自然数解释为某个具体的集合，如 $0 = \varnothing$，$1 = \{\varnothing\}$，$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$，……但这种解释并不表明自然数就是集合，抑或自然数理论的研究对象是集合，即其并非基于本体论意义的。对此的正确理解理应是，我们可以通过集合认识和理解自然数，这才是数学基础旨在表达的认识论内涵。

由上分析可知，在数学基础视域下，数学理论被分成了基础理论与非基础理论，并且非基础理论基于基础理论而在认识论上得以构建。因此，作为数学基础的基础理论势必不能再基于任何其他理论得以建立和理解，其具有终极意义上的初始性，这实质上就是我们所说的数学基础的自主性。数学基础的自主性可以简单理解为，作为数学基础的基础理论在相关维度或意义上不依赖于其他数学理论。由此可见，关于数学基础的自主性标准实质上是数学基础基本涵义的内在表征。因此，要判断一个数学理论能否作为合适的数学基础，尤其是在多个相互竞争的候选基础理论中进行选择时，自主性必然是一个重要的评价标准。

基于对数学基础自主性内涵的基本认识，林博（Ø. Linnebo）和佩蒂格鲁（R. Pettigrew）对其进行了更加深入的审视。他们在探讨范畴论作为数学基础的自主性时，曾作了较为系统的阐释，总结提出了数学基础的三大自主性标准，分别是逻辑自主（logical autonomy）、概念自主（conceptual autonomy）和辩护自主（justificatory autonomy）。具体而言，假设存在两个理论 A 和 B，如果 A 是在不诉诸 B 的相关概念的情况下构建的，那么称 A 相对于 B 具有逻辑自主性；如果 A 可以在不必须依赖 B 的相关概念的情况下进行理解，那么称 A 相对于 B 具有概念自主性；如果 A 可以在不诉诸 B 或 B 的辩护理由的情况下进行辩护，那么称 A 相对于 B 具有辩护自主性。（[9]，第 241–242 页）更概括地说，“逻辑自主强调基础理论在理论构建和概念定义中不依赖于其他理论，概念自主强调对基础理论的理解不诉诸其他理论，而辩护自主旨在表明对基础理论的辩护不诉诸其他理论及其相应的辩护理由”。（[22]，第 46 页）然而，在这些标准中，最没有争议的是逻辑自主，因为基础理论中的数学概念、公理与规则都具有初始性，对其进行的定义与构建必然不依赖于任何其他理论。概念自主虽然具有一定的争议性，但大多数学者仍然接受将其作为一条自主性标准，不过对其关注与重视程度远低于逻辑自主。最不为学者们所认可的是辩护自主，学者们在探讨数学基础的自主性问题时，几乎不论及该标准。基于上述分析，本文在为一价基础的自主性提供辩护时，将只考虑逻辑自主性和概念自主性两个方面，并重点聚焦于逻辑自主性，仅对概念自主性作简要澄明。

3　一价基础的基本思想

本文的重点是对一价基础作为数学基础的自主性进行辩护，而辩护的展开需要以对一价基础的基本理论认识为前提。因此，本节旨在对一价基础的产生背景及其基本思想作简要介绍，并且不会涉及该理论的过多技术性细节问题。

3.1　一价基础的产生背景

沃沃夫斯基之所以提出一价基础计划，主要原因在于他认为："现有的基础系统存在两个主要问题，这使得它们不够完善。首先，现有的数学基础是基于谓词逻辑语言的，这类语言存在局限性。其次，现有基础不能用来直接表达关于这类对象的陈述，如我在 2-理论方面的工作。"（[15]）概言之，在沃沃夫斯基看来，集合论作为数学基础不具有完全的充分性，某些数学语言、数学对象和数学理论仍然无法基于它而得到解释与构建。那么何种理论可以替代集合论作为数学的新基础呢？他的回答是一价基础或同伦类型论（Homotopy Type Theory）。[1] 当然，对该问题的回答，根本上依赖于我们对数学本质的深刻认识。关于数学的本质问题，可谓见仁见智。集合论基础主义者认为，数学本质上研究的是个体对象；范畴论基础主义者认为，数学本质上研究的是结构。与集合论基础主义和范畴论基础主义不同，一价基础主义者则认为，数学的研究对象本质上是同伦类型（homotopy types）或 ∞-群胚（∞-groupoids）。（[15]）根据沃沃夫斯基的观察，数学世界实质上被划分成不同的层级，而数学对象就分布在这些层级上。总体而言，可以将其分为元素级、集合级、群胚级，而且这些层级是累积的，即它是一个累积层次结构。具言之，元素层级的数学主要研究数、多项式等对象，集合层级的数学研究的是带结构的集合，下一个层级的研究对象是带结构的群胚，群胚的下一个层级是 2-群胚，以此类推，进而出现 n-群胚，一直到 ∞-群胚。（[16]，第 1278 页）

根据该累积层次结构发现，除了我们熟悉的元素和集合层级之外，之后的层级都在研究不同维度的群胚，尤其是高维群胚成为数学的重要研究对象。另外，沃沃夫斯基还专门对范畴和群胚进行了特别区分与阐释。按照我们对范畴论及其层级结构的认识与理解，元素级研究的是集合的元素，而集合级研究的是集合，集合级的下一个层级应该是范畴，如类理论中的真类就是一个典型的范畴。遵从此构造，扩张范畴层级，范畴的下一个层级则是 2-范畴，等等。乍看起来，这种认识似乎并不存在任何问题。但沃沃夫斯基认为，将集合的下一个层级称为范畴级具有误导性，范畴并非下一个维度的集合，而是下一个维度的偏序集，下一个维度的集合

[1] 在数学基础视域下，一价基础和同伦类型论（含有一价公理的同伦类型论）是完全相同的理论，一价基础可以理解为数学基础意义上的同伦类型论。从国外学者目前的表述与使用方式来看，主要存在三种：一价基础、同伦类型论、一价基础或同伦类型论。因此，在后文的行文过程中，尤其是在第四节探讨一价基础作为数学基础的自主性时，我们将采取和国外学者一致的处理方式，根据语境或理解的需要对一价基础和同伦类型论进行选择性或同时使用。当然，在非必要的情况下，我们将始终保持和本文的主题一致，使用"一价基础"这一表述。

是群胚，范畴仅仅是群胚中的一种。与此同时，由于格罗滕迪克（A. Grothendieck）研究表明 ∞-群胚与同伦类型是相同的，因此沃沃夫斯基认为同伦类型或 ∞-群胚才是整个数学的研究对象。（[15]；[16]，第 1278 页）

沃沃夫斯基将一价基础或同伦类型论作为数学的新基础，还在于该理论中的形式系统能够满足计算机中数学形式化的需要。沃沃夫斯基认为，当前数学实践中的一些长证明，尤其是高维数学中的复杂证明，依靠传统的人工检查难以保证其正确性，机器证明与检查才是最可靠、最严谨的方法。因此，沃沃夫斯基特别突出机器证明在证明检查中的重要地位。他对此说道：

> 现在，我利用证明助手做数学。虽然对如何优化这个工具还有很多期待，但至少我无须回家后还在担心自己的工作存在错误。我知道，如果我完成了某件事，那就是完成了。既不用返工复查，也不必担心自己的论证过于复杂，或如何让他人信服我的论证正确无误。我可以完全信任计算机。 （[15]）

根据这段论述可知，机器检查至少具有两个方面的作用：一是确保数学证明的正确性，二是为数学证明及其结论的正确性提供充分的辩护理由。然而，要实现对数学证明的机器检查，其中最关键的一步是将原有的数学证明形式化到计算机中，这就是数学实践中对数学的形式化需要。从数学基础的角度来看，这也对作为数学基础的基础理论提出了形式化诉求，从而引起了我们对数学基础的重新审视。正如阿沃迪（S. Awodey）所说：

> ……直到最近，当越来越多地使用计算机证明助手和形式验证系统等计算工具时，数学证明比通常的非形式数学证明需要更高程度的精确度和严密性（这一点尤其重要，特别是对于非常大和极其难的证明）。这激发了参与构建此类计算机验证系统的实践数学家、逻辑学家和计算机科学家对数学基础的重新审视。 （[2]，第 1499 页）

另外，沃沃夫斯基选择证明助手 Coq 作为形式化工具，之所以如此，实际上还考虑到在数学实践中数学形式化的可行性。具言之，在目前所开发的定理证明助手中，较为流行和成熟的证明助手 Coq 可以确保系统的安全性，而 Coq 是基于内涵的马丁−洛夫类型论（Martin-Löf Type Theory）设计的，故而数学基础的语言应该是马丁−洛夫类型论。根据沃沃夫斯基的合作者格雷森（D. R. Grayson）介绍，早在 2002 年沃沃夫斯基就开始考虑用计算机进行数学证明的形式化与检查工作，2006 年选定类型论作为合适的形式语言系统，并于 2010 年在 Coq 中写了一些证明。（[5]，第 430 页）同时，他似乎还旨在使数学基础能够更接近真实的数学实践，进而实现对数学形式化的自然性诉求，并使得数学家广泛接受数学的形式化。关于这个问题，维迪克（F. Wiedijk）曾分析到，数学形式化未被广泛接受的其中

一个重要原因是："形式化还不够接近现有的数学实践，对大多数数学家来说还不够有吸引力。"（[17]，第 1414 页）由于一价基础或同伦类型论不仅可以非形式地使用，而且能够较容易地形式化到计算机中，因此将其作为数学的基础理论，并基于 Coq 对数学进行形式化，一定程度上实现了对该问题的有效解决。阿沃迪对此也明确指出："相比之下，Coq 及其相关系统是基于现代类型论系统的，事实证明，这更符合日常数学推理的形式化。"（[2]，第 1499 页）

3.2 一价基础的基本思想

一价基础作为解决集合论数学基础之困境的一种全新替代方案，它也被称作同伦类型论。之所以将同伦类型论称为一价基础，主要有两个方面的考虑：一方面是为了突显该理论的数学基础作用，另一方面是为了强调一价性（univalence）特征或表明一价公理（Univalence Axiom）的重要性。一价基础或同伦类型论实质上是同伦论（Homotopy Theory）与马丁–洛夫类型论相互启发、相互交叉而形成的一个新兴学科。从理论结构上来看，其基本理论内容大致可以拆分为三个部分，即马丁–洛夫类型论、马丁–洛夫类型论的同伦论解释以及一价公理。其中，马丁–洛夫类型论提供形式化语言，同伦论提供语义解释。

马丁–洛夫类型论的基本对象是类型与元素，两者之间的关系一般记作 $a : A$，表示 a 是类型 A 的元素，同时其实际上还表明一种唯一性关系，即 a 有且仅属于类型 A。这种表示方式与集合论中的集合与元素之间的隶属关系极其相似，其一般被记作 $a \in A$，表示 a 是集合 A 中的元素。但理应认识到，类型论中的 $a : A$ 和集合论中的 $a \in A$ 存在本质区别。其中，最重要的区别在于它们是对命题与判断的不同表达，$a : A$ 是一个判断，而 $a \in A$ 是一个命题。（[12]，第 17–21 页）关于命题、判断以及彼此之间的关系一直存在争论，但其中一种常见的观点认为，命题存在真假之分，而判断是断定了的命题，其相对于命题突出了断定性（肯定性或否定性）特征。"所有判断都是命题，而有些命题不是判断，二者为包含关系。"（[23]，第 58 页）因此，之所以说 $a : A$ 是一个判断，是因为它明确断定了 a 是类型 A 的元素；之所以说 $a \in A$ 是一个命题，是因为它可能为真也可能为假。

马丁–洛夫类型论是一个自然演绎系统，"非形式地说，一个演绎系统就是用于推导出判断的一系列规则的收集（collection）"。（[12]，第 17 页）因此，其本质上只由推理规则构成。这些推理规则可以大致划分为两类，即结构规则和类型构造规则。关于结构规则的具体内容可参阅《同伦类型论导论》的第 1.3 节（[10]，第 6–9 页）和《同伦类型论：数学的一价基础》的附录（[12]，第 415–431 页）。我们在这里将重点介绍类型构造规则，这是推理规则的核心成分。这类规则表明，基于给定的类型和元素，我们可以构造出相应的新类型和新元素。其主要包括形成规则、引入规则、消去规则和计算规则。形成规则表明如何形成或构造一个新类型，引入规则表明如何引入新类型的元素，消去规则表明如何使用新类型的元

素，计算规则表明引入规则与消去规则之间的相互作用。这些规则与不同的类型构造方法相结合，就分别形成了相应的推理规则。就其中的形成规则而言，例如，给定任意两个类型 A 和 B，我们可以构造出一个乘积类型（product type）$A\times B$，该类型的元素是序对 (a,b)，其中 $a:A$，$b:B$。再如，给定两个类型 A 和 B，其中 B 是类型族（family of types），我们可以构造出一个依赖函数类型（dependent function type），该类型中的元素是依赖函数（dependent functions）。[2]

沃沃夫斯基基于对数学实践的考察认为，数学的研究对象本质上是同伦类型或 ∞-群胚。因此，马丁–洛夫类型论被赋予了同伦语义的新解释。在马丁–洛夫类型论中，类型实际上被解释为集合；然而在同伦类型论中，类型不再被解释为集合而是同伦类型。由此可见，同伦类型论实质上赋予马丁–洛夫类型论一种全新的语义解释，即同伦论解释。同伦论是代数拓扑的一个重要分支，其主要运用群论等抽象代数工具来研究空间的性质，通过计算与空间相关的代数不变量来判断两个空间是否同伦等价是其研究中的一个核心问题。（[12]，第 252 页）在同伦论中，我们关注的是空间与空间中点之间的连续映射（continuous maps），一个空间中的两个点通过路径连接起来，任意两条路径之间形成一个同伦。具体而言，给定两个连续映射 $f:A\to B$ 和 $g:A\to B$，它们之间的一个同伦是连续映射 $H:A\times[0,1]\to B$，使得 $H(x,0)=f(x)$ 并且 $H(x,1)=g(x)$。我们说 f 和 g 是同伦的，记作 $f\sim g$；空间 A 和 B 是同伦等价的，记作 $A\simeq B$。（[12]，第 2 页）简而言之，在同伦类型论中，我们将类型解释为空间，类型中的元素解释为空间中的点，任意两个元素之间的恒等证明解释为同一空间中两个点之间的路径。

一价基础或同伦类型论实质上还增加了极其重要的一价公理“$(A=B)\simeq(A\simeq B)$”。（[12]，第 4 页）该公理意在表明，恒等类型同伦等价于同伦等价类型。一价公理是基于同伦论解释，根据同伦理论家的直觉与观察而引入的一条新公理。该公理具体由沃沃夫斯基所提出，他发现一价公理为单纯集（simplicial sets）模型所满足，后来又发现在其他模型中成立。于是，沃沃夫斯基将其作为一条基本公理添加到同伦类型论中。该公理的加入使得同伦类型论更具强大的表达力，尤其是“一价公理还进一步强化了类型论的同伦观”。（[12]，第 4 页）更应深刻认识到的是，一价公理是一价基础的一价性的集中表征，它以数学家真实的数学实践为基础，从根本上重塑了我们对“相等”或“同一”的认识。该公理重在强调，如果两个类型是同伦等价的，那么它们一定是相等的。套用结构主义数学实践中的基本原则“同构对象是同一的”，一价公理也旨在揭示现代数学实践中的一条基本原则“等价类型是同一的”。相较于同构概念而言，同伦等价的外延显然更宽泛；相较于传统集合论对等价关系的处理方式而言，一价基础巧妙通过一价公理将等价与相等或同一关系统一起来。

[2]关于类型构造方法及其对应的推理规则的详细内容，可参见 [6]，第 385–389 页；[12]，第 423–427 页。

4　一价基础作为数学基础的自主性辩护

由于一价基础是一个新的数学基础计划，目前学界主要致力于技术性理论构建与发展，对其涉及的相关哲学问题审思甚少，其中就包括重要的自主性问题。但必须明确的是，一价基础的终极目标是为数学提供一个具有自主性的基础理论，该理论不同于传统的集合论、范畴论以及其他数学基础理论。因此，在一价基础的哲学研究中，自主性问题理应被置于重要位置。然而，从目前的研究情况来看，一价基础的自主性目标并未为学界所一致认可，仍然存在不同程度的争议，有些学者为其提供辩护，而有些学者则予以驳斥。在本文中，我们将基于上文提出的自主性标准，从逻辑自主性和概念自主性两个方面为一价基础的自主性提供辩护，从而进一步表明一价基础作为数学基础具有完全的自主性。

4.1　一价基础作为数学基础的逻辑自主性

一价基础的逻辑自主性旨在表明，一价基础的概念定义与理论构建不依赖其他数学理论。从逻辑上来看，对一价基础的逻辑自主性辩护需要分别论证，其相对于除一价基础之外的所有非基础理论都具有自主性。但事实上并不需要如此繁杂，根据一价基础的理论构造以及学者们的关注焦点，我们实际上只需要回答两个关键问题。一是表明一价基础相对于同伦论和马丁–洛夫类型论具有逻辑自主性。因为一价基础是基于这两种理论而形成的新数学理论，该理论的构建问题显然直接与逻辑自主性相关联。二是表明一价基础相对于集合论具有逻辑自主性。因为一价基础旨在替代集合论作为数学的新基础，因此必须论证其相对于原有的基础理论是逻辑自主的，也就是阐明其并不以集合论为基础。

关于一价基础相对于同伦论和马丁–洛夫类型论的逻辑自主性问题。雷迪曼（J. Ladyman）和普雷斯内尔（S. Presnell）认为，作为数学基础的基础理论理应具有前数学意义（pre-mathematical），唯有如此才能实现理论的逻辑自主性。所谓的前数学意义是指，对一些基本思想或原则的解释与证明不依赖其他思想、原则以及数学分支。（[6]，第 384–385 页）根据他们的解释，这些前数学意义上的思想和原则实质上就是我们常说的不经解释和定义的初始概念与原则。例如，集合论中的集合概念，根据康托尔（G. Cantor）的朴素理解，它是我们的直觉或思维中确定的不同对象构成的一个整体或收集。（[18]，第 630 页）该意义上的集合概念就是一个前数学意义上的概念。基于对数学基础的基本认识，在他们看来，同伦类型论通过同伦论解释其中的核心概念，并依靠同伦论证明其中的重要原则，从数学基础的角度来看，同伦论显然比同伦类型论更基础。因此，同伦类型论不具有数学基础所要求的逻辑自主性。他们具体阐释道：“由于这种表示[3]的语义明确依

[3]根据雷迪曼和普雷斯内尔的解释，此处的“这种表示”以及后文的“标准表示”指的是在 [12] 中给出的关于同伦类型论的概述与阐释。

赖于同伦论的术语和概念，因此标准表示显然是不自主的。对类型、项和恒等证明的解释依赖于对空间、点和路径的理解，这种理解不满足前数学意义，而是来源于同伦论数学。”（[6]，第 396 页）

由于同伦论解释导致同伦类型论不具有逻辑自主性，因此雷迪曼和普雷斯内尔试图通过两种方法来解决。第一种方法是，直接放弃同伦语义解释，采用所谓的“空语义”（null semantics）形式。（[6]，第 397 页）这种做法实质上是将同伦类型论变成一个形式或代数系统，但形式或代数系统的基础作用有限，其充其量发挥组织基础的作用，即为所有数学提供一个统一的框架。第二种方法是，为同伦类型论提供另一种新的语义解释，该解释具有初始性、满足前数学意义的要求。雷迪曼和普雷斯内尔最终采取了第二条路径，他们用概念解释替代同伦论解释，将类型中的项解释为具体概念，而类型解释为一般概念。在他们看来，该解释不预设数学对象的存在，只要求概念的存在，而对概念存在的形而上学承诺是更可能被接受的。更重要的是，概念不需要借助任何其他数学理论就可以得到直接理解，因此概念解释符合前数学特征，基于该解释的类型论作为数学基础也就具有相应的逻辑自主性。（[6]，第 398−401 页）

事实上，数学概念或数学对象的本体论地位，并非数学基础自主性所关注的问题。进一步地，离开对象真的能够实现对概念本质的深刻理解吗？为什么作为数学基础的初始概念可以直观理解，而初始对象却不能呢？在后文的讨论中我们将看到，一价基础主义者实质上将同伦类型或 ∞-群胚视作一个初始概念；引入同伦论解释的一个重要动因，就是为了实现这种几何与拓扑的直观性。总之，雷迪曼和普雷斯内尔的观点尚存值得商榷之处。另外，即使经过概念解释之后的类型论满足逻辑自主性标准，但其已然不同于同伦类型论，它实质上变成了另一种理论，这偏离了本文的研究主题。更重要的是，同伦类型论之所以能够作为数学基础，似乎离不开同伦论对马丁−洛夫类型论的解释。一方面，在沃沃夫斯基等人看来，整个数学世界实质上都在研究同伦类型或 ∞-群胚。另一方面，一价公理和一价性来源于同伦语义，至少主要动机在于同伦语义。安格尔（S. Angere）曾明确指出：“正如预期的那样，一价的主要动机源自同伦语义，根据该语义，我们总是可以将同伦等价空间视为相等的。”（[1]，第 1191 页）换言之，如果没有发现同伦论与马丁−洛夫类型论之间的深刻联系，并且为马丁−洛夫类型论提供同伦语义解释，一价公理就不大可能被发现，甚至一价基础也不大可能被提出。

由于同伦类型论的形式系统通过同伦论解释获得标准语义，因此其理论构建无疑需要依赖同伦论的相关概念，如点、空间、同伦等。从这一点来看，同伦类型论似乎不具有逻辑自主性。同样，由于马丁−洛夫类型论为同伦类型论提供形式化语言，同伦类型论的理论构建也必然会依赖马丁−洛夫类型论的相关概念，如对同伦类型的解释理应以类型概念为前提。概言之，既然同伦类型论是基于两个学科而形成的交叉学科，其必然对它们都有所依赖。因此，同伦类型论相对于同伦论

和马丁–洛夫类型论在逻辑上似乎都是不自主的。但应该深刻认识到，同伦类型论作为一个数学基础理论，其自身存在完备的语法与语义。一价基础主义者既不是以同伦论作为数学基础，也不是以马丁–洛夫类型论作为数学基础，而是以同伦类型论作为数学基础。因此，同伦类型论与同伦论、马丁–洛夫类型论拥有完全平等的本体论地位，不存在特权理论与优先性问题。这犹如公理集合论 ZFC，该理论是在一阶逻辑的基础上通过添加集合及其性质的相关公理而形成的理论。如果按照雷迪曼和普雷斯内尔的理解，ZFC 作为数学基础也不具有自主性，因为从理论构成来看，一阶逻辑显然比 ZFC 更基础。但事实是，我们并未将一阶逻辑单独视作数学的基础，而是将 ZFC 作为一个整体理论加以看待，并将其作为数学的正统基础。因此，如果 ZFC 是自主的，那么一价基础或同伦类型论也理应是自主的。

另外，一价基础的逻辑自主性还体现在其基本概念的初始性上。如果一个基础理论在构建过程中所诉诸的概念和原则具有初始性，则该基础理论就满足逻辑自主性标准。就一价基础而言，作为基本对象的同伦类型或 ∞-群胚就是一个初始概念，一价基础是基于这些初始概念，并通过类型构造规则而构建起来的。具言之，由于一价基础是一个自然演绎系统，因此其并不形而上学地断言任何数学对象的存在。在一价基础视域下，根据“存在即被构造”的原则，即使是一些初始类型的存在也并非形而上学的断言，而是严格根据类型构造规则构造而成的。如空类型 0、单元素类型 1 以及自然数类型 N，等等。以自然数类型 N 为例，其形成规则如下：

$$\frac{}{N : U}$$

其中，U 表示类型的域；$N : U$ 表示 N 是一个类型，即自然数类型。该规则表明，我们可以在不假设任何条件（即空语境）的情况下形成自然数类型。关于该问题，舒尔曼（M. Shulman）曾将数学理论分为分析理论（analytic theory）和综合理论（synthetic theory），“在现代数学中，分析理论是其基本对象在其他理论中被定义的理论，而综合理论是其基本对象是由规则和公理赋予意义的未定义项的理论。”（[11]，第 41 页）从数学基础视角来看，分析理论就是非基础理论，而综合理论就是基础理论。舒尔曼进一步指出，一价基础是一个综合理论，其中的同伦类型或 ∞-群胚是一个不加定义的初始概念。（[11]，第 41–43 页）既然同伦类型或 ∞-群胚是一个不加定义的初始概念，其必然具有前数学意义，并不会依赖任何其他理论及其概念。因此，一价基础相对于其他数学理论都具有逻辑自主性。

关于一价基础相对于集合论的逻辑自主性问题，其实质是“范畴论相对于集合论的自主性”问题的移植。类比“范畴论作为数学基础的逻辑自主性”问题的论证理路（[22]，第 45–48 页），一价基础相对于集合论的逻辑自主性必然是一个亟待澄明的核心问题。因为一价基础旨在替代集合论作为数学的新基础，该目标的实现必须以一价基础的自主性为前提。对此，西门齐斯（D. Tsementzis）提出一个可能的质疑：“UF 不能作为数学基础，因为其基本对象并非基本的。∞-群胚最初

在集合论中被分析地定义为具有额外结构和性质的集合。因此，集合比 ∞-群胚更基本。”（[13]，第 3609 页）也就是说，由于一价基础中的基本概念 ∞-群胚能够通过集合论中的集合概念进行定义，因此，从概念层面来看，集合比 ∞-群胚更基本；从理论层面来看，集合论理应是一价基础的基础。由此表明，一价基础相对于集合论不具有逻辑自主性。西门齐斯对该问题的回应是：“我们同样可以表明，由于 UF 提供了一个集合（作为 h-集合）的分析性描述，因此集合论不能作为基础，因为其基本对象可以在另一个形式系统中分析地定义（作为 UF 中的 h-集合）。”（[13]，第 3609 页）不仅如此，在一价基础视域下，即使是作为集合论的基础组成部分的一阶逻辑也可以通过柯里−霍华德解释（Curry-Howard interpretation）获得直接解释。例如，谓词被解释为类型族，蕴涵命题被解释为函数类型，全称量词命题被解释为依赖函数类型。由此可见，虽然同伦类型或 ∞-群胚可以通过集合进行定义，但集合也可以基于同伦类型或 ∞-群胚而得到定义。对于这些能够相互定义的概念，我们都可以说包含这些基本概念的数学理论在某种意义上为对方提供了基础。具体而言，集合论基础主义者是基于“数学对象的本质是个体对象”这一基本哲学立场而给出的定义与解释，而一价基础主义者则是基于“数学对象的本质是同伦类型或 ∞-群胚”这一基本哲学立场而给出的定义与解释。在不同的解释视域下，我们实质上都可以称其为对方提供了合理的基础。从这个角度来说，一价基础相对于集合论显然具有逻辑自主性。

除上文所论及的同伦类型或 ∞-群胚对集合概念的依赖之外，至少还有一个问题将挑战一价基础的逻辑自主性。即由于一价基础预设了收集概念，因此一价基础必然依赖于集合论。该结论的得出根本在于，其预设了集合论是收集概念或思想的唯一理论或最佳解释理论。不言而喻，一价基础确实预设了收集概念，因为作为初始概念的同伦类型或 ∞-群胚本质上就是项或元素的收集。舒尔曼曾对此明确表示：“……∞-群胚实际上是我们需要考虑的唯一的‘收集’概念。”（[11]，第 42 页）一价基础实质上是将所有数学对象划分成不同的类型，抑或说，将同一类型的对象收集到一起形成一个整体。因此，一价基础与集合论、范畴论一样，都是关于收集思想的具体化理论。这表明集合论并非收集概念的唯一理论，并且它也可能不是收集概念的最佳解释理论。因此，根据一价基础对收集概念的预设，并不能说明其必然依赖于集合论。换言之，一价基础相对于集合论具有逻辑自主性。

4.2　一价基础作为数学基础的概念自主性

一价基础的概念自主性旨在表明，对一价基础的理解不依赖其他数学理论。相较于一价基础的逻辑自主性，学者们对概念自主性问题的研究甚少，而且主要聚焦于一价基础相对于集合论的概念自主性。因此，我们将遵从已有的研究理路为一价基础的概念自主性作简要辩护。

一价基础相对于集合论的概念自主性问题具体表现为，我们在学习或理解一

价基础时经常会借助集合论中的元素、集合和隶属关系等概念。因此，即使同伦类型或 ∞-群胚没有预设集合概念，即并非由于逻辑不自主导致概念不自主，我们仍然可能会依赖集合论进行学习与理解。对该问题的回应实际上并不困难，我们只需要否认依赖关系的必要性，表明对一价基础的学习与理解并不必然依赖集合论。具体而言，一方面，“人们总是首先试图用已有观念来理解新事物，但这并不意味着新观念必然依赖旧观念。”（[11]，第 42 页）因此，对于具体的候选数学基础理论集合论和一价基础来说，借助作为已有观念的集合论来理解较新的一价基础，并不能说明一价基础必然依赖于集合论。另一方面，由于教育、文化和知识储备等背景因素的不同，不同的人在学习和理解一价基础时采取的方式也必然有所差异。对于熟悉一价基础的人来说，尤其是那些具备一价基础知识但不具备或不太熟悉集合论知识的人，他们可以直接学习和理解一价基础，而不会诉诸集合论。对此，舒尔曼曾表明：

> 我们应该注意，不要仅仅因为熟悉一个理论就判断它更直观或更基本：直觉不是固定的，而是可以（并且正在）训练和发展的。目前，大多数数学家从集合的角度来考虑 ∞-群胚，因为他们在数学教育中很早就学过集合；但是，即使在其短暂的发展过程中，HoTT[4]/UF 学界已经观察到，那些在 HoTT/UF 中“长大”的研究生对其形成了直接的理解和直觉，有时甚至超过那些“晚来”的人。（[11]，第 43 页）

实际上，在一价基础主义者看来，对一价基础的学习和理解可以不诉诸集合论；更进一步地，他们的目标是通过一价基础实现对集合论的重构和理解。

相应地，也存在另一类群体，他们对集合论较为熟悉，或者习惯用集合论的思维方式去理解相关的数学领域。因此，对他们来说，基于集合论去理解一价基础似乎更简单。但我们应该看到，简单性并不等同于必要性。他们完全可以放弃集合论的思维方式，全面接受一价基础。学习一价基础的方式与邓恩（L. Dunn）所论及的直觉主义类型论的学习方式一致：“学习直觉主义类型论最简单的方法是忽略任何关于逻辑和集合论的先入之见，从直觉主义类型论的定义和公理重新开始。”（[3]，第 40 页）即使可以通过集合论理解一价基础，但这种理解也存在明显差异。我们实际上只是借助两种理论之间的相似性特征进行形式化理解，但并不能够真正基于集合论实现对一价基础的本质性认识，因为它们本质上是不同的。具体而言，从理论性质来看，一价基础是一个内涵性理论，而集合论是一个外延性理论；从研究对象来看，一价基础的研究对象是同伦类型或 ∞-群胚，而集合论的研究对象是作为个体对象的集合。综上可知，对一价基础的学习与理解并不必然甚至不能以集合论为前提，因此一价基础相对于集合论完全可以实现概念自主性。

[4]HoTT 是同伦类型论 Homotopy Type Theory 的英文缩写。

5 结语

根据数学基础主义的基本立场，数学理论存在基础理论与非基础理论之分，非基础理论建基于基础理论之上。在数学基础主义视域下，自主性标准实质上是数学基础的本来内涵。任何被提议的候选基础理论都理应满足自主性标准，否则其不能被视作一个合理的数学基础。一价基础作为一个新的数学基础理论，它也必须满足自主性标准。本文的研究表明，无论是基于逻辑自主抑或概念自主视域，一价基础都满足数学基础的自主性标准。具体而言，在逻辑自主性标准视域下，一价基础相对于同伦论、马丁-洛夫类型论以及集合论都具有自主性；在概念自主性标准视域下，对一价基础的理解也不必然依赖于集合论。因此，一价基础作为数学基础具有完全的自主性。与此同时，还应该认识到，一价基础作为数学基础的合理性辨析是一个系统性问题，如若要为其数学基础地位提供更加充分的辩护，我们显然不能仅囿于自主性标准，其他标准尚需得到进一步研究。例如，数学基础的充分性标准，该标准也是数学基础的本来内涵之一，其旨在以"所有数学理论能否为基础理论所完全解释"为标准，从而判断一个候选数学基础理论的合理性。

参考文献

[1] S. Angere, 2021, "Identity and intensionality in univalent foundations and philosophy", *Synthese*, **198(**Suppl5**)**: 1177–1217.

[2] S. Awodey, 2018, "Univalence as a principle of logic", *Indagationes Mathematicae*, **29(6)**: 1497–1510.

[3] L. Dunn, 2014, *An Overview of Homotopy Type Theory and the Univalent Foundations of Mathematics*, Undergraduate honors thesis, Florida State University.

[4] H. B. Enderton, 1977, *Elements of Set Theory*, New York: Academic Press.

[5] D. R. Grayson, 2018, "An introduction to univalent foundations for mathematicians", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **55(4)**: 427–450.

[6] J. Ladyman and S. Presnell, 2018, "Does Homotopy Type Theory provide a foundation for mathematics?", *The British Journal for the Philosophy of Science*, **69(2)**: 377–420.

[7] F. W. Lawvere, 1964, "An elementary theory of the category of sets", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **52(6)**: 1506–1511.

[8] F. W. Lawvere, 1966, "The category of categories as a foundation for mathematics", in S. Eilenberg, D. K. Harrison, S. MacLane *et al.*(eds.), *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, pp. 1–20, Berlin: Springer.

[9] Ø. Linnebo and R. Pettigrew, 2011, "Category theory as an autonomous foundation", *Philosophia Mathematica*, **19(3)**: 227–254.

[10] E. Rijke, 2022, *Introduction to Homotopy Type Theory*, https://arxiv.org/pdf/2212.11082.pdf.

[11] M. Shulman, 2017, "Homotopy Type Theory: A synthetic approach to higher equalities", in E. Landry(ed.), *Categories for the Working Philosopher*, pp. 36–57, Oxford: Oxford University Press.

[12] The Univalent Foundations Program, 2013, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, Princeton: Institute for Advanced Study.

[13] D. Tsementzis, 2017, "Univalent foundations as structuralist foundations", *Synthese*, **194(9)**: 3583–3617.

[14] V. Voevodsky, 2010, "Univalent foundations project: A modified version of an NSF grant application", https://www.math.ias.edu/~vladimir/Site3/Univalent_Foundations_files/univalent_foundations_project.pdf.

[15] V. Voevodsky, 2014, *The origins and motivations of univalent foundations*, https://www.ias.edu/ideas/2014/voevodsky-origins.

[16] V. Voevodsky, 2015, "An experimental library of formalized mathematics based on the univalent foundations", *Mathematical Structures in Computer Science*, **25(5)**: 1278–1294.

[17] F. Wiedijk, 2008, "Formal proof-getting started", *Notices of the AMS*, **55(11)**: 1408–1414.

[18] 保罗·贝纳塞拉夫、希拉里·普特南（著），朱水林等（译），*数学哲学*，北京：商务印书馆，2003 年。

[19] 陈嘉明，"论作为西方知识论主流性观念的基础主义"，*文史哲*，2004 年第 4 期，第 93–98 页。

[20] 郝兆宽，杨跃，"柏拉图主义与集合论终极宇宙"，*逻辑学研究*，2017 年第 4 期，第 87–98 页。

[21] 胡军，*知识论*，北京：北京大学出版社，2006 年。

[22] 李娜，叶发扬，"集合论作为数学基础的不充分性困境及其解决"，*湖南科技大学学报（社会科学版）*，2023 年第 5 期，第 39–48 页。

[23] 刘红，"命题与判断之浅见"，*新疆师范大学学报（哲学社会科学版）*，1995 年第 3 期，第 58–61 页。

[24] 杨睿之，"结构主义是一种有效的数学哲学吗？"，*逻辑学研究*，2020 年第 4 期，第 12–30 页。

（责任编辑：执子）

Univalent Foundations as the Foundation of Mathematics and Its Defense for Autonomy

Fayang Ye Na Li

Abstract

The foundation of mathematics is a critical issue in the philosophy of mathematics, and the criteria for evaluating such a foundation constitute a core topic. Among the relevant criteria, autonomy emerges as a necessary one. This criterion indicates that the foundational theory of mathematics cannot depend on other theories either logically or conceptually, and must be ultimately primitive. In recent years, Vladimir Voevodsky and others proposed a research program known as univalent foundations. This program employs homotopy type theory as its foundational framework, and aims to establish an alternative foundation for mathematics distinct from set theory. Does the univalent foundations meet the autonomy for the foundation of mathematics? Through analysis and research, it has been found that the univalent foundations exhibit complete autonomy from both logical and conceptual perspectives.

Fayang Ye School of Marxism, The Party School of Qinghai Provincial Committee of the Communist Party of China
fayangye@163.com

Na Li School of Philosophy, Nankai University
linawii@nankai.edu.cn