

论绝对的与相对的直谓主义

刘力恺

摘要: 本文的主要任务是辩护王浩接受迭代归纳定义的广义直谓主义的合法性。通过回顾直谓主义的历史, 本文发现直谓主义起源的多样性导致了绝对的和相对的直谓主义的区分。这一区分不仅为拓展标准直谓主义提供了充分的动机, 也为辩护王浩广义直谓主义提供了论证框架。如果直谓主义必须绝对, 根据王浩直觉与理想化的辩证法, 接受迭代归纳定义是拓展直谓主义最自然和最终极的方法。如果直谓主义可以相对, 根据迭代归纳定义方面的工作, 王浩的直谓主义是相对于第一个递归不可达序数之下的所有序数而言的。因此, 王浩的思想在这两种情形下都是某种直谓主义。在这两种情形中仍有一些问题需要处理。在第一种情形中, 需要修改恶性循环原则以兼容归纳定义, 但这十分困难。在第二种情形中, 需要付出一些额外的本体论代价, 但这会带来积极的后果: 在数学上能保证大部分主流数学的一致性; 在哲学上能助力王浩将构造主义与柏拉图主义融合的新概念论方案顺利实施。

关键词: 直谓主义; 归纳定义; 王浩; 费夫曼

中图分类号: B81 **文献标识码:** A

1 直谓主义的历史源头

直谓主义 (Predicativism) 是为了解决集合论悖论而产生的数学哲学思想, 其核心主张是: 只有遵循 (禁止) 恶性循环原则 (简称 VCP) 的聚合才是集合。本节将简要回顾直谓主义的早期发展史, 更具体地回答直谓主义是什么的问题。

本文所讨论的“直谓”一词最早出自罗素。众所周知集合论悖论之所以产生, 是因为错误地认为所有命题函项都能定义集合。罗素主张只有简单而非深奥的命题函项才能定义集合, 而这种能定义集合的函项被他称为直谓的。([32], 第 74 页) 但罗素并不能回答什么函项是简单的, 只知道简单函项经有限次布尔运算后仍是简单的。

所有“有限个法语单词定义的十进制小数”组成的聚合 E 成为了这个问题的突破口。理查德利用对角线方法从 E 定义出一个数 N 满足 $N \in E \wedge N \notin E$, 但他认为这个矛盾是表面性的, 因为 N 的定义要有意义当且仅当 E 是被彻底定义

收稿日期: 2024-10-21

作者信息: 刘力恺 北京大学哲学系
1642773429@qq.com

的。假设我们把 N 添入 E 中，利用同样的方法又可以从 $E \cup \{N\}$ 定义出与 N 类似但不等于 N 的数 N' ，这就表明 E 永不可能被彻底定义。（[30]，第 143–144 页）

按康托尔对集合元素确定性的要求， E 不是集合，因为它是未完成和不断变动的；相应地 N 的定义也是非法的，因为它涉及了未完成的 E 的全部元素，而涉及一个元素未定的聚合的全部元素是不可能的。庞加莱称 N 的定义是恶性循环的，并进一步指出应该被视为非直谓的定义是那些包含恶性循环的。（[27]，第 1063 页）换言之，罗素所说的“简单”应该就是不恶性循环。

罗素很快接受了庞加莱的建议，并首次表述了 VCP：“任何牵涉一个表面变元的东西一定不是该变元可能的值之一。”（[33]，第 289 页）表面变元即被量词约束的变元，通过量词可以涉及其约束的变元的所有取值。因此 VCP 独立于形式语言的一般表述为：“任何牵涉一全体者必不是该全体的一员”（[33]，第 289 页）或“没有总体可以含有只能通过该总体定义的元素”（[31]，第 601 页）。罗素还将其精细为了针对集合的版本：“‘任何涉及一个聚合的全部元素者，必不是该聚合中的元素’；或者反过来说：‘如果假定一个聚合有一个总体，且它有只能通过该总体定义的元素，那么所说的聚合就没有总体。’”（[31]，第 591 页；[46]，第 37 页）庞加莱（1912）也给出了与罗素类似的表述。（[15]，第 153 页）

罗素将命题函项视为该函项所有值的总体，于是运用 VCP 可得，一个命题函项的值（即命题）中不能有只能通过该函项定义的组分。据此在形如 ϕx 的表达式中，如果 x 的值牵涉了函项 $\phi \hat{x}$ ， ϕx 将不表达命题。从而诸如 $\phi(\phi \hat{x})$ 等并不表达命题，大部分因自我指涉而生的悖论获解。（[46]，第 40 页） ϕx 不表达命题，即 ϕx 没有真假或者说没有意义，从而可以引入命题函项 $\phi \hat{x}$ 的意义域 $\{x \mid \phi x \text{ 有真值}\}$ 这一概念。意义域形成类型， x 的类型即 $\{y \mid \forall \phi(\phi x \text{ 有真值} \rightarrow \phi y \text{ 有真值})\}$ 。（[34]，第 523 页）具体有哪些类型则与表面变元密切相关。考虑 $\forall x \phi x$ ，其中 x 的取值范围显然不是任意的而应该是 $\phi \hat{x}$ 的意义域，于是罗素规定“每当一个表面变元出现在命题中时，这个表面变元的取值范围就是一个类型，这个类型被其中‘所有值’都被考虑的函项确定。”（[31]，第 601 页）此外 $\forall x \phi x$ 表达的命题断定了 $\phi \hat{x}$ 的所有值（[46]，第 41 页），从而牵涉了 $\phi \hat{x}$ 本身，因此任何含有 $\forall x \phi x$ 的表达式所指一定不在 $\phi \hat{x}$ 的意义域中。基于这些罗素将其类型学说的基本原则总结为：

任何涉及某一类型全体的表达式，若有所指，一定指称某个比其涉及的所有对象的类型更高的东西。在涉及某一类型全体的地方，存在一个属于该类型的表面变元。因此任何含有表面变元的表达式都具有比该变元更高的类型。（[31]，第 624 页）

根据上述关于表面变元的原则，可划分出个体（零阶）、一阶函项与命题、二阶函项与命题……这样的层级，这里的阶的含义与当下熟知的相同。另外根据函项自变量所属层级的不同，也可以将函项划分为另一种层级，以一元函项为例，可

分为个体的函项、个体函项的函项……将这两种层级相结合，就得到后世所称的分支类型论。但具体如何结合，历来有争议，本文按下不谈。重要的是罗素基于此又提出了一种新的直谓概念，设函项 ϕ 的自变量的阶数的最大值为 n ，若 ϕ 是 $n+1$ 阶函项，则是直谓的，否则非直谓。([31]，第 607 页；[46]，第 53 页) 以上两种直谓概念是否统一，取决于分支类型论的类型层级是如何划分的。本文讨论的是第一种直谓概念。

分支类型论做数学的能力极其有限，因为大量基本的数学结果都违反 VCP。例如当我们写下数学归纳法 $\forall \phi (\phi 0 \wedge \forall n (\phi n \rightarrow \phi n+1) \rightarrow \forall n \phi n)$ 时，我们本意是要量化所有一元函项 ϕ ，但按罗素的类型论实际上只能量化某一阶的所有 ϕ ，否则将违反 VCP；实数的确界原理也面临同样的问题。换一种角度讲，自然数总体和实数总体的定义都违反 VCP 从而是非直谓的。因为自然数总体是最小归纳类，这个最小类必须通过其所在总体即归纳类的总体来定义；假设用戴德金分割（沿 $<$ 向下封闭、有上界、无最大元的非空有理数集）来定义实数，那么实数一方面是有理数总体的幂 $\wp(\mathbf{Q})$ 的元素，另一方面又必须通过 $\wp(\mathbf{Q})$ 定义，故非直谓；此外 $\wp(\mathbf{Q}) = \{X \mid (\forall x \notin \mathbf{Q}) x \notin X\}$ 也非直谓，因为 $\wp(\mathbf{Q})$ 是 $\mathbf{Q}$ 的绝对补的元素；用柯西列的等价类定义实数也面临同样的问题；实数总体的非直谓性自不必说了。

为解决上述“本该属于同一意义域的对象却因阶的不同而分属各异”的问题，罗素引入了可化归公理：任何函项都形式等价于某个直谓函项（此处指罗素的第二种直谓概念）。([46]，第 56 页) 但是可化归公理要想成立，惟有把量词统统理解为无穷合取或析取。因此引入该公理并非良好的解决之道。

由于无法直谓地定义自然数总体和证明数学归纳法，分支类型论无法实现逻辑主义计划，庞加莱正是抓住这一点批驳逻辑主义。([27]，第 1065 页) 同时庞加莱还主张一致性证明本质依赖于数学归纳法 ([27]，第 1042 页)，所以希尔伯特的有穷主义计划也是不可能的。庞加莱认为数学归纳法是先天综合判断 ([27]，第 1059 页)，我们是通过某种算术直觉把握此原理，同时这种直觉还使我们能把握不定迭代、潜无穷、依此类推、“懒惰之点”等概念。([15]，第 107 页) 通过算术直觉，可以得到作为潜无穷的自然数总体；将此直觉运用至极可得所有有理数，而无理数则需通过几何直觉得到。几何直觉使我们能把握原则上没有空隙的直线，当有理数被排成稠密的线序时，这种直觉使得我们有理由引入无理数去填补有理数间的空隙。([15]，第 123 页) 几何直觉保证了所有实数的存在，但并不保证实数集合这个非直谓的多上之一存在。庞加莱的这些思想预告了接受自然数总体的直谓主义的诞生。

外尔在某种意义上具体实现了庞加莱上述零散模糊的思想。外尔认为“任意集合”以及基于此的函数概念都是模糊不清的柏拉图主义概念，奠基其上的经典分析学置身天国之中，其基础面临恶性循环的风险。([45]，第 44 页；[1]，第 28

页) 外尔的目标是用构造性的方法重建分析学大厦。无独有偶, 外尔考虑的也是类似于罗素的直谓主义和类型理论。([45], 第 28–32 页) 但外尔不是逻辑主义者, 所以他允许一些初始的非逻辑对象, 其类型论的最低层级是根据需要而定的不同范畴的个体, 这些范畴称为基本范畴, 并且自然数所属的范畴 $\mathbf{N}$ 一定是基本范畴; 同时还有一些定义在基本范畴上的初始关系, 其中包括 $\mathbf{N}$ 上的后继关系 S , 结构 $\langle \mathbf{N}, S \rangle$ 为数学的绝对运算范围; 数学归纳法和递归方法也一并被承认。([45], 第 25、28 页)

聚合是函项的外延, 外尔规定初始关系和那些无量词或只量化基本范畴的函项的外延是确定的(也就是直谓的)。([45], 第 42–43 页; [1], 第 33 页) 量化一个确定的外延可以得到确定的值, 而任何涉及到量化一个不确定外延的定义都应被拒斥为非直谓的。([1], 第 30 页) 这种用外延是否确定来判定是否直谓的方法很契合庞加莱对理查德悖论的分析以及庞加莱(1909)的看法: 一个定义就是一个对对象的分类, 直谓分类就是不会因新元素的引入而紊乱的, 非直谓分类会因新元素的引入被迫永不停歇; 换言之一个定义是直谓的如果它定义的聚合是稳定不变的。([6], 第 428–429 页) 庞加莱说非直谓的聚合并非不存在, 而是边界不确定的; ([27], 第 1066 页) 外尔则进一步细化了非直谓聚合的分类, 一种是像实数聚合 $\mathbf{R}$ 这样外延不确定但对任一对象是否是其元素有确定回答的(因为按外尔的方式定义每一具体的实数只需量化外延确定的 $\mathbf{N}$), 这是把 $\mathbf{R}$ 视为潜无穷, 它确实是开放的; 另一种是像 $\mathbf{R}$ 上的全体连续函数的聚合 $C^0(\mathbf{R})$ 这样通过量化外延不确定的 $\mathbf{R}$ 定义的, 其问题不仅是开放, 而是非法的, 有产生悖论的风险。([1], 第 30–31 页)

由于直接承认了 $\mathbf{N}$, 外尔的直谓分析理论显然远强于罗素的分支类型论(无可化归公理), 其具体形式化见阿弗隆的 WA ; 同时 WA 也不弱于二阶算术子系统 ACA ([1], 第 32–34、37 页), 故可实现大量经典分析的定理(但确界原理依然只能以一种弱的形式成立) ([36], 第 105–107 页)。然而外尔对 VCP 的逻辑刻画与罗素并无根本差别, 也是对量化范围作限制, 如此其实没有体现出庞加莱-外尔以不变性为基础的直谓主义(Predicativity as Invariance)的特别之处。根据克雷塞尔-费夫曼 60 年代的工作, 也有不少直接对不变性进行逻辑刻画的工作, 阿弗隆的新系统 PW ([2], 第 58–59 页) 就刻画了这种直谓主义, 本文按下不表。

罗素和庞加莱-外尔实际刻画出的直谓主义大体上是一致的, 并且隐藏在直谓思想背后的是他们共同的构造主义的旨趣, 也就是从一些基本的材料出发自下而上用已构造的东西构造新的东西, 这表现在量词的取值范围中都是先前定义好的东西。外尔是从 $\mathbf{N}$ 出发至多用了一点点无穷手段去构造其他数学对象。罗素则主张无类论, 不预设任何逻辑之外的东西, 先逐层构造命题函项, 然后把类归约为某种述说命题函项的方式, 最后用类逻辑地定义数学对象, 这显然是构造主义。他

们之间的根本矛盾出在本体论和目的论上。罗素希望以唯名论的方式实现逻辑主义。而作为半直觉主义者的庞加莱和外尔则明确反对数学可还原为逻辑,主张数学为自己奠基,要实现此目的必须预设少量的无穷对象存在,这种预设的合理性则由逻辑主义致力于消除的康德式直观保证。 $\mathbf{N}$ 被引入直谓主义就归根于此,虽然它只能被非直谓定义,但由于已经预设其存在,故非直谓定义只是对其的描述而非构造,从而并未违反VCP,这是拉姆塞([28],第41页;[17],第128页)早已讲明的道理。但 $\mathbf{N}$ 本质上与直谓主义无关,这就为直谓主义的绝对与相对之分埋下了伏笔。

2 标准直谓主义的坚固性与相对性

随着庞加莱逝世、外尔彻底转向直觉主义、罗素不再从事逻辑研究,1920-1950年直谓主义的研究陷入停滞状态。直到50年代,“以洛伦岑为代表的工作给普通数学的直谓基础重新带来了希望。”([39],第624页)在外尔的理论中,数集的确界的阶数一定高于该集合元素的阶数,所以确界原理无法成立。洛伦岑本质上引入了第 ω 阶来解决问题,因为第 ω 阶是所有有穷阶的并,故不同阶的实数都会在第 ω 阶出现。由此洛伦岑用构造主义方法成功证明了经典分析的一系列奠基性定理(包括实数完备性、紧致性的系列定理)。([21],第12-24页)引入超穷阶的方法最早出自费奇,他在证明分支类型论一致性时引入到了第 ω^ω 阶来部分代替可化归公理的作用。([14],第149页)但罗素不会接受超穷阶,因为指标 ω 是非直谓的,进而“可数并”这个操作不是直谓可接受的。但对接受 $\mathbf{N}$ 的直谓主义者来说, ω 是直谓可接受的。在此基础上我们会追问哪些超穷序数是直谓可接受的?这便是1950-1970年直谓主义的核心议题——直谓性问题。

直谓性问题之所以重要与哥德尔密切相关。他为证明连续统假设的相对一致性而构造的可构成集宇宙 $\mathbf{L}$,正是对分支类型论的超穷推广。([17],第136页) $\mathbf{L}$ 虽然是构造的,但却不是直谓的,因为哥德尔借用了所有经典序数,但反过来说一旦确定了哪些序数是直谓可接受的,直谓集的宇宙也就随之确定了,换言之只要清楚把握住了直谓序数,就清楚地把握了直谓概念。但是王浩指出这里存在一个循环:为了确定直谓集的范围,必须先拥有直谓序数的确切概念;而为了获得此确切概念,又必须先确定直谓集的范围。([40],第579页)

为消除这个困难,王浩提出了自动膨胀方法,即交错地构造直谓集和直谓序数:首先规定所有 $< \varepsilon_0$ 的序数都是直谓的;若 α 是直谓序数,则 Σ_α 中可定义的任何序数 β 也是直谓的。([40],第579页)其中形式系统 Σ_α 是王浩提出的构造性理论,它实质上是对可构成集 $L_{\omega+\alpha}$ 的公理化。([40],第565-566页; [11],第605页)序数 β 在 Σ_α 中可定义的意思是,存在 Σ_α 的语言可表达的关系 R ,使得

$L_{\omega+\alpha} \models$ “ R 是良序”，并且 R 的序型是 β 。([11], 第 605 页) Σ_α 中可定义的序数的总体一定包含 $< \alpha$ 的序数的总体，如果 $\beta(> \alpha)$ 是 Σ_α 可定义的，便继续考虑 Σ_β 可定义的东西，此所谓自动膨胀。如此直谓性问题便转化为了求自动膨胀方法的极限。斯派克特 (1957) 利用高阶递归论的有关结果证明：自动膨胀得到的直谓序数恰好是那些小于丘奇-克林尼序数 ω_1^{CK} 的序数¹；([11], 第 605 页) 直谓集的聚合 $L_{\omega_1^{CK}}$ 恰好是超算术的纯粹集合的聚合。([12], 第 394 页)

克雷塞尔认为王浩对自动膨胀的要求太弱，除了要求 β 是 Σ_α 可定义的良好关系 R 的序型，还应要求 Σ_α 可证明 R 确实是良序。([20], 第 297 页) 设一给定的良序 R 的序型为 $|b|$ ， Σ_α 证明 R 是良序是指， Σ_α 证明 R 是线序且 $\{k \in \mathbb{N} \mid k \prec b\}$ 是良序集。后半部分即证 $\Sigma_\alpha \vdash \forall X^\alpha (\forall x ((\forall y \prec x) y \in X^\alpha \rightarrow x \in X^\alpha) \rightarrow (\forall k \prec b) k \in X^\alpha)$ ，将这个公式记为 $\forall X^\alpha \text{TI}(X^\alpha, b)$ ，它其实就是到序数 $|b|$ 的超穷归纳法。为了与王浩相区别，我们将克雷塞尔的加强版自动膨胀称为自主前进。

自主前进是否比自动膨胀合理呢？费夫曼指出 $L_{\omega_1^{CK}}$ 显然只能被非直谓定义，因而只是非直谓者眼中的直谓宇宙。([7], 第 10 页) 直谓主义者因为没有归纳定义这样的非直谓手段，所以永远无法把握直谓宇宙的全貌。另外良序这个概念也是非直谓的，解决这个问题的办法是直谓地证明某良序确实是良序。([11], 第 606 页) 因为刻画直谓数学的形式系统（如 Σ_α ）显然是直谓构造的，这可以被直谓主义者把握。王浩则认为这种观点是将知识的要求强加于真理之上 ([41], 第 128 页)，即混淆了可知性和存在性。一个序是不是良序乃是客观的，不取决于能否直谓地证明，或者说直谓主义者知不知道它是个良序。但是此处的客观意指着某种柏拉图主义，而正如费夫曼指出的那样，直谓主义者仅接受 $\mathbb{N}$ 这个实无穷，这并不蕴含他们接受良序这个非直谓概念。([11], 第 606 页) 双方争论的焦点其实是直谓主义者能否跳出直谓主义从外部把握直谓概念。王浩作为一个尊重所有已知知识、中立看待数学哲学争论的事实主义者，自然认为可以。但如果要一贯地坚持直谓主义，自主前进显然更加合理。

克雷塞尔以后，直谓性问题事实上变成了求自主前进的极限。由于王浩说 Σ_0 所处理的既可以是所有从空集出发构造的有穷集也可以是 $\mathbb{N}$ ([40], 第 565 页)，加之证明一个序确实是良序，需要证明一个二阶算术公式，故不妨考虑一个分支的二阶算术系统 $\text{RA} = \bigcup_{a \in \mathbf{O}} \text{RA}_a$ 作为 $\Sigma = \bigcup_{\alpha < \omega_1^{CK}} \Sigma_\alpha$ 的算术解释。为了方便，

¹ ω_1^{CK} 既是最小的非递归序数也是最小的非构造性序数。递归序数即有穷数或 $\mathbb{N}$ 上递归良序的序型。构造性序数编码的集合 $\mathbf{O}$ 及其解码函数 $|\cdot|$ 递归定义为：(1) $0 \in \mathbf{O}$ 且 $|0| = 0$ ；(2) 若 $a \in \mathbf{O}$ 则 $2^a \in \mathbf{O}$ 且 $|2^a| = |a| + 1$ ；(3) 若对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\{e\}(n) \in \mathbf{O}$ 且 $\{e\}(n) \prec \{e\}(n+1)$ ，则 $3 \times 5^e \in \mathbf{O}$ 且 $|3 \times 5^e| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\{e\}(n)|$ 。其中 $\mathbf{O}$ 上的序 $\prec$ 保持序数上的序关系。([7], 第 14 页) 构造性序数与可数序数在构造上的差别仅在于，当通过取序列的极限得到极限序数时，此时的序列要是可计算的。

克林尼以 $\mathbf{O}$ 为指标集构造了一个图灵跳跃生成的层级： $H_0 = \emptyset$ ， $H_{2^a} = H'_a$ ， $H_{3 \times 5^e} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_{\{e\}(n)}$ 。超算术集，即可以图灵归纳到某个 $H_a (a \in \mathbf{O})$ 的集合。克林尼 (1955, 1959) 证明超算术集的全体 $\text{HYP} = \Delta_1^1 = L_{\omega_1^{CK}} \cap \wp(\mathbb{N})$ 。([11], 第 604–605 页)

舒特考虑了矢列系统 RA^* ([35], 第 200 页; [7], 第 16、18、21 页), 其中 ω 规则代替了 RA^* 中的完整归纳模式。自主前进可得的序数通过如下方式严格定义: 所有小于 ω^2 的序数都相对于 RA^* 自主; 若有 $RA^* \vdash_\rho^\eta \forall X^1 TI(X^1, a)$, 且推导高度 η 和切割秩 ρ 都是小于 $|a|$ 的自主序数, 则 $|a|$ 也相对于 RA^* 自主。舒特 (1965) 证明最小的非自主序数 $Aut(RA^*) = \Gamma_0$ 。² ([35], 第 217–218 页)

在舒特这里自主前进变为了可以用高度和切割秩都被证明为直谓的证明树去证明更大的序数也是直谓的, 较难看出与原版自主前进的联系。几乎与舒特同时, 费夫曼考虑了一个不分支的二阶算术子系统 $\Delta_1^1\text{-CR}$, 即把二阶算术的概括公理模式限制为超算术概括规则: 如果 Π_1^1 公式 ϕ 等价于某个 Σ_1^1 公式, 那么 $\exists X(x \in X \leftrightarrow \phi)$ 。接着费夫曼通过逐层添加形式化的 ω 规则定义了一个系统层级: $HC_0 = \Delta_1^1\text{-CR}$; $HC_{2^\alpha} = HC_\alpha + \forall x \text{Bew}_{HC_\alpha}(\ulcorner \phi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \forall x \phi(x)$; $HC_{3 \times 5^\epsilon} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} HC_{\{e\}(n)}$ 。然后令 0 相对于 $\Delta_1^1\text{-CR}$ 自主; 若 $|b|$ 自主且 $HC_b \vdash \forall X TI(X, a)$, 则 $|a|$ 也相对于 $\Delta_1^1\text{-CR}$ 自主。([7], 第 19–21 页) 如此定义更契合原版自主前进的形式, 费夫曼证明这种情况下的最小非自主序数 $Aut(\Delta_1^1\text{-CR}) = Aut(RA^*) = \Gamma_0$ 。([7], 第 23 页) 同时易得 $HC_{<\Gamma_0} = \bigcup_{a < \Gamma_0} HC_a$ 等价于 $RA_{<\Gamma_0}$ 。

费夫曼还证明 $HC_{<\Gamma_0}$ (不妨将 Γ_0 的编码就记作 Γ_0) 等价于 $\Delta_1^1\text{-CR} +$ 归纳-递归规则: 若有 $\forall X TI(X, a)$, 则到 $|a|$ 的完整超穷归纳和 Π_0^1 超穷递归模式成立; 此系统记为 IR , 其证明论序数恰好是 Γ_0 。([7], 第 26–27 页) IR 这个不分层的系统方便地刻画了直谓可证性的极限。一个系统如果与 IR 证明论等价且能证明相同的算术公式 (Π_∞^0) 那就是局部直谓的。为了避免使用非直谓的序数和良序等概念, 费夫曼后来又构造了带函数变元的直谓二阶算术系统 P (及其辅助系统 $\exists/P$), 并证明 P 局部直谓, 且能识别所有 $< \Gamma_0$ 的序数。([9], 第 68、75–78、89) 针对集合论, 费夫曼也构造过一个无需分层的系统 PS , 主要特征是无幂集公理, 并限制分离和替换公理; 但 PS 比可允集合论 KP_ω 弱, 只是 IR 的保守扩充, 故也局部直谓。([8], 第 486–488 页)

费夫曼定义的局部直谓系统直观上就是对只接受自然数总体即其上的完全归纳模式后还应该接受的东西的极限刻画。更一般地, 费夫曼 (1996) 发明了形式系统 S 的完全展开 (unfolding) $\mathcal{U}(S)$ 来回答“如果接受系统 S , 那么哪些操作和谓词, 以及哪些关于它们的原则也应该被接受?” ([11], 第 616 页) 费夫曼证明 $\mathcal{U}(NFA)$ 是局部直谓的 ([11], 第 618 页), 其中 NFA 相当于只含后继和前驱运算的一阶算术。在相信费夫曼对 $\mathcal{U}(S)$ 的定义合理的前提下, 这一结果意味着费夫曼-舒特对直谓性的分析已经完全把握住了那些内在于自然数结构和完整归纳模式中的东西。

费夫曼深耕直谓主义四十载, 尝试过从不同角度刻画直谓主义, 寻找其极限,

²费夫曼-舒特序数 $\Gamma_0 = \min\{\xi \mid \varphi_\xi(0) = \xi\}$, 维布伦函数 $\varphi_\alpha(\beta)$ 递归定义为: $\varphi_0(\beta) = \omega^\beta$; $\varphi_{\alpha+1}(\beta) = \text{“}\varphi_\alpha(\xi) = \xi\text{” 的第 } \beta \text{ 个解}$; 若 δ 极限, $\varphi_\delta(\beta) = \sup_{\alpha < \delta} \varphi_\alpha(\beta)$ 。

但是殊途同归，费夫曼找到的系统都不约而同地满足他定义的局部直谓性。这就得到一个类似于丘奇-图灵论题的结论，即 $\mathbf{RA}_{\prec \Gamma_0}$ 确实是对接受自然数总体的直谓主义的极限的标准刻画（不妨称其为 Γ_0 论题）。纵然直谓性这个概念并不清晰，但我们似乎已经在某种意义上清楚地把握住了它，这就好比我们没有任何方法定义什么是可计算的，但我们尝试用各种不同的手段试图去刻画它，这些刻画竟然都等价，于是我们有理由相信我们已经清晰地把握住了可计算这个概念。

但不要忘记标准直谓主义是相对于非直谓的自然数总体而言的，在保持本体论中立（即只承认有对象存在），并在严格意义上恪守 VCP 的情形下，必不可能被视为绝对的直谓主义。尼尔森的《直谓算术》开篇直指一阶算术 PA 的完整归纳模式非直谓，加之他对指数运算直谓性的怀疑（因为证明一个有穷指数塔是自然数要用归纳法），在本书中他仅在那些可被解释到罗宾逊算术 Q 的理论中工作。（[24]，第 1-2、9 页）费雷拉证明卡尔马算术 $\mathbf{ID}_0 + \exp$ 确实无法解释进 Q（[13]，第 313 页），这说明尼尔森的直谓主义乃是某种严格有穷主义。布吉斯与哈森证明 $\mathbf{ID}_0 + \exp$ 可被解释到无可化归公理的《数学原理》（[46]）系统的二阶片段，若再加上超指数运算就解释不进去了。（[5]，第 1、13 页）《原理》的高阶部分虽然更强，但缺乏可化归公理时，证明论强度依旧很低，费奇仅用到 ω^ω 的超穷归纳法便证明了该系统的一致性。（[14]，第 149 页） ω^ω 是原始递归算术的证明论序数，又考虑到《原理》含无穷公理，那么该系统应该是局部有穷主义的。以上种种均说明绝对的直谓主义至少已经退守到了有穷主义的边缘，但这并不符合直谓主义的初衷，于是拓展直谓主义便有了合理的动机。

3 接受自然数总体的绝对直谓主义

假设抛弃自然数总体 $\mathbf{N}$ 是上帝给定的观点，那么 $\mathbf{N}$ 只能是通过归纳定义得到的，如果要将 $\mathbf{N}$ 接受为直谓的，那么最自然的想法是把归纳定义接受为直谓的，因为追本溯源，只可能把定义 $\mathbf{N}$ 的那种归纳接受为直谓的，才可能把 $\mathbf{N}$ 接受为直谓的。洛伦岑与麦希尔就支持从递归集出发，用显定义和归纳定义，且量词取值范围限定在自然数集和此前得到的集合的可数总体上，来得到更多集合的方法是直谓的，并且在他们看来这种方法已经穷尽了所有基于拒绝实无穷立场的方法。（[22]，第 48 页）换言之他们认为归纳定义乃是扩展直谓主义的终极手段，从而接受 $\mathbf{N}$ 的绝对直谓主义就是接受归纳定义的直谓主义。

集合 A 上的归纳定义被定义为一个单调算子 $\Phi: \wp(A^n) \rightarrow \wp(A^n)$ ，即对任意 $S \subseteq T \subseteq A^n$ ，都有 $\Phi(S) \subseteq \Phi(T)$ 。 Φ 的最小不动点 $I_\Phi = \bigcap \{S \subseteq A^n \mid \Phi(S) \subseteq S\}$ ，这是 A 上对 Φ 封闭的最小关系。 I_Φ 是自上而下定义的，它也可以自下而上定义：（基础步） $I_\Phi^0 = \Phi(\emptyset)$ ；（归纳步） $I_\Phi^\alpha = \Phi\left(\bigcup_{\xi < \alpha} I_\Phi^\xi\right) = \Phi(I_\Phi^{\leq \alpha})$ ；（封闭

步) $I_\Phi = I_\Phi^{<\|\Phi\|}$, 其中 $\|\Phi\| = \min\{\xi \mid I_\Phi^\xi = I_\Phi^{<\xi}\}$ 。可以证明 $\|\Phi\|$ 存在且小于 $|A|^+$ 。([25], 第 84–86 页)

进一步考虑的是可用形式语言定义的归纳定义。称 $\mathfrak{A}$ 上的归纳定义 Φ 是正初等的, 如果存在语言 $\mathcal{L}_\mathfrak{A}$ 中的 Π_0^1 公式 $\phi(X, \vec{x}, \vec{y})$ (其中 X 是 ϕ 中唯一的二阶变元且在 ϕ 中正出现以保证 Φ 单调) 和参数 $\vec{a} \in A^m$, 使得对任意 $S \subseteq A^n$ 和 $\vec{k} \in A^n$ 都有, $\vec{k} \in \Phi(S) \iff \mathfrak{A} \models \phi[S, \vec{k}, \vec{a}] \iff (\vec{k}, \vec{a}) \in \phi(S)$ 。称一个 $\mathfrak{A}$ 上的关系 R 是归纳的, 如果存在上述的那种 ϕ 和参数 $\vec{a}$ 使得 $R\vec{x} \iff (\vec{x}, \vec{a}) \in I_\phi$ 。([23], 第 9、17 页) 如果只在自然数标准结构上考虑问题, 那么斯派克特 (1961) 证明: (1) R 是归纳的当且仅当 R 是 Π_1^1 的。(2) 若归纳定义 Φ 是正初等的, 则 $\|\Phi\| < \omega_1^{CK}$ 。([25], 第 91 页) 另外还可以证明若归纳定义 Φ 是 Π_1^1 的, 则 I_Φ 也是 Π_1^1 的, 从而是归纳的。([23], 第 25 页) 这就意味着我们有可能运用一超算术的 Φ , 在某构造性序数步内, 归纳定义出一非超算术集。从而接受归纳定义在可定义的意义上具有拓展直谓主义的可能性。暂且不谈是否真的能拓展, 先讨论是否能接受归纳定义。

归纳定义自上而下看显然是非直谓的; 而自下而上看非直谓仅体现在封闭步上, 但是归纳定义出的集合的元素在基础步和归纳步就已全部给出, 封闭步只是宣布没有其他元素进入该集合, 其作用在于把由基础步和归纳步生成的永无止境的潜无穷序列固定为一稳定不变的实无穷。类比王浩的分析 ([37], 第 536、540–541 页), 基础步和归纳步已经隐定义了 I_Φ , 若要把此定义转化为显定义, 必须引入 ω 规则的推广—— $\|\Phi\|$ 规则。王浩建议允许使用隐定义, 因为这种定义在“本性之光”下是无可争议的, 无论它们变成显定义后是什么样子。([39], 第 644 页) 本性之光的作用就是使心灵能够把握 $\|\Phi\|$ 步的超穷构造, 但是用这种神秘之物来辩护明显是乏力的。况且心灵是否能把握超过 ε_0 步的构造相当存疑, 哥德尔就说过我们不可能一眼就把握住 ε_0 的良序结构, 也把握不住 $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots$ 这样幅度过大的跳跃; 而像 α 到 α^2 这样能把握的小幅跳跃, 需要重复 ε_0 次才能到达 ε_0 。([16], 第 273 页) 当然如果只接受显定义, 那么王浩说必须修改 VCP 使其能够容纳归纳定义。([39], 第 644 页)

对于王浩来说, 接受归纳定义, 同他支持自动膨胀而非自主前进, 实质是同一的, 即区分存在性和可知性 ([41], 第 129 页), 允许跳到直谓主义之外来把握直谓概念。假设通过基础步和归纳步已经直谓地得到一集合的所有元素, 那么该集合已然存在, 而是否使用非直谓的封闭步来获知这一点, 并不影响该集合的存在性。支持王浩这种思想的是源自哥德尔的直觉与理想化的辩证法。按王浩的说法, “直觉的标准是刻画我们强烈而稳定的信念的手段, 而理想化的过程用以净化和扩张我们的概念。” ([42], 第 230 页) 跳出直谓主义、允许一些非直谓手段就是理想化的外推。

直觉与理想化的辩证法的艺术其实深受罗尔斯反思平衡和方法的教益。([42],

第 326 页) 所谓反思平衡直观上可理解为当公共的道德直觉与规范性的道德原则发生冲突时, 应反复比较、相互修正, 最终达到正义的平衡状态。对直谓主义概念의清楚把握也应是反思平衡的结果。大多数直谓主义者直觉上认为 $\mathbf{N}$ 是可接受的, 但 $\mathbf{N}$ 的定义违反 VCP。如果放弃 $\mathbf{N}$, 那么所能得到的数学将比较贫乏, 并且这种直谓主义所处的“生态位”已被有穷主义占据, 因此在这一点上已经无法退让和妥协了。故而只能修改直谓的准则——VCP, 但这种修改只能是略微的让步, 而不能是“举手投降”。让 VCP 能容纳归纳定义是最自然的修改方式, 因为 $\mathbf{N}$ 就是用这种方式定义的, 并且该方法仅在将构造成果收集为总体时使用了非直谓手段, 加之使用此方法并不会超越可数、得到大多数直谓主义者绝不能接受的不可数实无穷, 因而只是有限度的妥协。妥协之后, 不仅保住了 $\mathbf{N}$, 而且丰富了做数学的手段, 更多重要的经典数学成果得以保留, 同时又没有接受不可数无穷, 这似乎达到了一种相对平衡的状态的, 在这个意义上我们相对清晰地把握住了直观中的那个绝对直谓主义概念。

那么该如何修改 VCP 呢? 哥德尔指出罗素实际表述过三种不同的 VCP:

- (1) 没有总体可以含有只能通过该总体定义的元素。
- (2)(3) 没有总体可以含有牵涉或预设了该总体的元素。([17], 第 125 页)

荣格认为预设即本体论依赖, 而牵涉就是预设 ([19], 第 61、73 页), 本文也采取这种说法。

哥德尔认为预设形式的 VCP 比定义形式的更合理, 且使得数学归纳法、确界原理等原则不成立的恰恰是定义形式的 VCP。([17], 第 127 页) 预设形式的 VCP 可以兼容归纳定义, 下面以 $\mathbf{N}$ 为例来说明为什么。 $\mathbf{N}$ 本质上只能定义为最小归纳集, 故必须通过归纳集的总体来定义。但是 $\mathbf{N}$ 的存在并不需要预设归纳集总体的存在, 其只依赖于每个自然数的存在; 而任何自然数的存在也无需预设 $\mathbf{N}$ 的存在, 因为它们都是从 0 出发经有限次后继运算得到的。同理归纳定义的集合 I_Φ 的存在只依赖于其元素, 也就是基础步和归纳步定义好的东西, 而无需预设满足 $\Phi(S) \subseteq S$ 的其他 S 的存在; 这样只要 Φ 不违反预设形式的 VCP, I_Φ 也就不违反。

荣格认为预设形式的 VCP 的一个简洁表述就是任何总体都是良基的。([19], 第 61 页) 这相当于集合论中的基础公理, 或者等价地, 集合的宇宙是累积分层结构。而基础公理的作用正是排除 $x \in x, x \in y \in z \in x$ 这样在本体论上存在循环的奇异集。然而为大多数直谓主义者所反对的幂集公理等原则与基础公理并不矛盾, 这意味着预设形式的 VCP 限制度太低, 并不能区分开直谓主义数学与经典数学 (柏拉图主义的)。或者说, 直谓主义的基本准则不可能是预设形式的 VCP, 决定直谓主义特性的另有他者。

VCP 旨在禁止恶性循环, 而非一切循环。大抵有两种循环是恶性的: 一是循

环定义的循环；二是导致悖论的循环。第一种循环接近于预设形式而非定义形式的 VCP 所禁止的东西，毕竟主流并不认为自然数和实数的定义是循环的。罗素通过禁止对总体的自我指涉，排除了第二种循环，但这无疑大大扩大了打击面，因为数学中的大量非直谓现象均未显露出危害。通常认为罗素那个时代发现的悖论的根源实质上在于通过总体的否定性的自我指涉。而归纳定义以及更一般地形如 $\bigcap x \in x$ 的非直谓问题都不存在否定性自指。单就数学而言，策梅洛-弗兰克尔的方案已经成功避免了上述否定性自指，完整地保住了经典数学，但却不符合直谓主义的设想。

那直谓主义的内核到底是什么呢？在批判方面主要是反对集合实在论，即反对集合独立于人类的定义和构造而存在的观点，而这种独立性经常为“任意集合”这一概念所强调。（[7]，第1页）因此直谓主义要反对“任意集合”，这就不难理解为什么幂集公理、选择公理等必须是非直谓的，也不难理解为什么罗素、外尔都要限制约束变元的取值范围。而在建构方面，直谓主义的背后是构造主义，正如韦弗所说，其中心原则是集合必须从初始元素开始自下而上地逐步构造得到。（[43]，第1页）

韦弗认为“这种构造无需物理上可实现，但必须概念地定义，即构造过程必须有一个完全清晰的心智图像。”（[43]，第7页）与庞加莱-外尔不同，韦弗允许超穷步构造而不局限于有穷步。（[44]，第2页）归纳定义的基础步和归纳步毫无疑问是构造的，允许超穷步代替了非构造的封闭步的使用，这样归纳定义就是一种构造方法。但关键还是步数问题，对超过 ϵ_0 步的构造还有完全清晰的心智图象吗？完全清晰的心智图象也无非只是本性之光的另一种说辞。如此一来又回到了问题的原点。

对 VCP 的修改是一件相当困难的事。首先恶性循环就其字面意义而言与构造主义无关，现行的 VCP 与构造主义契合只是一种巧合，稍一放宽 VCP 就容易违反构造主义。其次对 VCP 的逻辑刻画似乎绕不开对约束变元取值范围的限制，而一旦采用这种方法，很容易又回到定义形式的 VCP；如果保持这种刻画而又要兼容归纳定义，必须改变量词的语义，而改逻辑并不符合直谓主义的主张。正如人类社会的复杂性导致正义概念难以确定一样，源流复杂的直谓主义同样难以反思平衡出一个理想且精确的结果。既然如此难以处理，不妨采用一种更粗放的手段来解决问题。

4 接受迭代归纳定义的相对直谓主义

费夫曼认为直谓主义是一个相对而非绝对的概念。这个概念适用于有关数学基础的不同立场，这些立场可能有限地接受了某些实无穷，除此之外拒绝了其他

领域中的一切实无穷。逻辑上的问题是准确刻画这些特定立场的极限。这项事业对数学的潜在价值是，如果我们知道某些东西能在方法被限制的情况下证明，那么我们将获知更多的东西。在哲学上它的价值在于提供了鲜明详实的解释去更精准地给出支持或反对某个立场的论证。([11], 第 620–621 页)

在费夫曼看来只承认自然数总体就足够了。他说给定自然数的直谓主义应被视为这样一种哲学，即在不假设比自然数的基本结构更多东西的前提下，如何离开地面并保持数学地飞行的哲学。([10], 第 ix 页) 费夫曼使用蒯因-普特南的不可或缺论证（即应该承认那些自然科学不可或缺的数学实体及数学原则）为其观点辩护。费夫曼发展了一个灵活的可变有穷类型的形式理论 W 去刻画外尔的直谓理论。([10], 第 274–279 页) 费夫曼证明几乎所有应用于自然科学的分析学知识（包括泛函分析中的一些重要定理）都在 W 中可证；他还证明 W 是 PA 的保守扩充且二者证明论等价。这意味着如果相信自然科学，那么在本体论上我们需要承诺的数学实体仅有自然数。([10], 第 293–294、296 页) 因而标准直谓主义下的数学已经足以应对现实世界的问题，再对其扩张只会引入无用的实体，从而把我们引向柏拉图的天国，如此便不符合直谓主义“脚踏实地”的初衷。

但此前已经分析过 N 是半直觉主义者带来的，其与直谓主义并无必然联系，因此出于某些合理的需求，承诺比 N 更大但依旧可数的实无穷并不会与费夫曼的相对直谓主义观点冲突。本文就有这样的需求，这是因为费夫曼曾提到如果接受可数树序数（良基的 ω 叉树）及对应的超穷归纳和递归，那么就可以得到归纳定义。([9], 第 90 页) 此结果来自于霍华德，可数树序数指构造性序数，霍华德证明他构建的关于自然数和构造性序数的系统可证的序数是所有小于巴赫曼-霍华德序数 $\theta_{\varepsilon_{\Omega+1}}(0)$ 的序数。³ ([18], 第 355–356、373 页) 而 $\theta_{\varepsilon_{\Omega+1}}(0)$ 正是刻画归纳定义的形式理论 $ID_1(PA + \text{描述 } I_\phi \text{ 是 } \phi \text{ 定义的单调算子的最小不动点的公理})$ 不可证的最小序数。([25], 第 157–158、194 页)

$\theta_{\varepsilon_{\Omega+1}}(0) > \theta_\Omega(0) = \Gamma_0$ ，这表明在可证明的意义上，接受归纳定义确实能走得更远。而王浩还要求更强的归纳定义，他认为“一个明确只包含直谓概念的归纳定义定义一个直谓集，并且迭代任意给定直谓序数次归纳定义模式生成的也是直谓集。”([39], 第 646 页) 这种推广是自然的，事实上也只有使用这种更强的方法才能在可定义意义上突破标准直谓主义。

用 $\mathfrak{N}_0$ 指代自然数标准结构，记 $\Gamma(\mathfrak{A}) = \{R \mid \mathfrak{A} \text{ 上的关系 } R \text{ 是归纳的}\}$ 。令 $\mathfrak{N}_{\nu+1} = ID(\mathfrak{N}_\nu) = \langle \mathfrak{N}_\nu, \Gamma(\mathfrak{N}_\nu) \rangle$ ； ν 是极限序数时， $\mathfrak{N}_\nu = \bigcup_{\mu < \nu} \mathfrak{N}_\mu$ 。记 $\kappa_{\nu+1}^N =$

³费夫曼序数坍塌函数 $\theta_\alpha(\beta)$ 按如下方式定义： $C_0(\alpha, \beta) = \beta$ ；若 ξ 的康托正规形式为 $\omega^{\alpha_1} + \dots + \omega^{\alpha_n}$ 且 $\{\omega^{\alpha_1}, \dots, \omega^{\alpha_n}\} \subseteq C_n(\alpha, \beta)$ ，则 $\xi \in C_{n+1}(\alpha, \beta)$ ；若 $\xi \in \alpha \cup C(\xi, \theta_\xi(\eta))$ ， $\eta < \theta_\xi(\eta)$ 且 $\xi, \eta \in C_n(\alpha, \beta)$ ，则 $\theta_\xi(\eta) \in C_{n+1}(\alpha, \beta)$ ；若 $\xi \in C_n(\alpha, \beta) - \{0\}$ ，则 $\Omega_\xi \in C_{n+1}(\alpha, \beta)$ ； $C(\alpha, \beta) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n(\alpha, \beta)$ ； $\theta_\alpha = \{\beta \mid \beta \notin C(\alpha, \beta)\} \cup \{\Omega_\nu \mid 0 < \nu \in \mathbf{Ord}\}$ 的枚举函数。（ $\Omega_\nu = \aleph_\nu$ ， $\Omega = \Omega_1$ ）([35], 第 224–225 页) $\varepsilon_{\Omega+1} = \Omega \uparrow \omega$ ，即 Ω 的 ω 层指数塔。

$\sup\{\|\Phi\| : \Phi \text{ 是 } \mathfrak{N}_\nu \text{ 上正初等的归纳定义}\}$, 可以证明 $\kappa_{\nu+1}^N$ 也是对 N 迭代使用 ν 次归纳定义所得的 $\mathfrak{N}_\nu$ 中可定义序数的上确界, 并且 $\kappa_{\nu+1}^N = \omega_{\nu+1}^{CK}$; 当 ν 极限时, $\kappa_\nu^N = \sup_{\mu < \nu} \kappa_\mu^N$ 。 ([26], 第 211、217、219–220 页) 这说明如果可以接受迭代归纳定义, 那么自动膨胀的极限将是第一个递归不可达序数 $I^{CK} (\ll \omega_1)^4$; 此时王浩所希冀的广义直谓宇宙 L_{ICK} 是可允集合论 KPi ([29], 第 723–724 页) 的标准模型。这反过来又可说明, 接受迭代归纳定义的直谓主义是相对于所有 $< I^{CK}$ 的序数而言的。

至此我们可以为王浩接受迭代归纳定义的直谓主义的合理性做出如下辩护:

- (1) 如果直谓主义必须绝对, 并且接受自然数总体, 那么接受归纳定义是能容纳自然数总体最自然的方法, 若将这种方法推广到底, 则还应接受迭代直谓次归纳定义;
- (2) 如果直谓主义可以相对, 那么王浩的思想是相对于所有 $< I^{CK}$ 的序数的直谓主义;
- (3) 直谓主义要么必须绝对要么可以相对, 并且接受自然数总体;

所以, 王浩的思想是直谓主义的一种合理选择。

由于修改 VCP 十分困难, 绝对直谓主义路线不如相对直谓主义路线好走。而要走后者尚需解决一个问题: 为什么能接受所有 $< I^{CK}$ 的序数? 本文认为这样做能带来十分积极的数学和哲学后果, 故值得付出一点本体论代价。

先讨论数学后果。将刻画 $\mathfrak{N}_\nu$, 亦即刻画 ν 次迭代归纳定义的形式理论记为 ID_ν , 记 $ID_{<\nu} = \bigcup_{\mu < \nu} ID_\mu$ 。 ([26], 第 221 页) 用 $|T|$ 表示形式理论 T 可证的序数的上确界, 亦即 T 的证明论序数。布霍兹和伯勒斯证明: 当 $\nu < \theta_{\Omega}(0)$ 时, $|ID_\nu| = \theta_{\varepsilon_{\Omega_\nu+1}}(0)$; 当极限序数 $\nu \leq \theta_{\Omega}(0)$ 时, $|ID_{<\nu}| = \theta_{\Omega_\nu}(0)$; 特别地, $\nu = \theta_{\Omega}(0)$ 时有 $\theta_{\Omega_\nu}(0) = \nu$, 因而视 $ID_{<\theta_{\Omega}(0)}$ 为所能迭代的极限系统。 ([4], 第 119 页) 实际上只需允许有穷次迭代归纳定义就能得到极其丰硕的数学成果, 这是因为竹内外史 (1967) 等证明 $\Pi_1^1\text{-CA}_0$ 的证明论序数为 $\theta_{\Omega_\omega}(0)$; ([36], 第 388 页) $\Pi_1^1\text{-CA}_0$ 是将概括和归纳公理模式均限制为 Π_1^1 公式的二阶算术子系统, 在此系统中可发展出绝大部分主流数学; ([36], 第 51–52 页) 故一旦接受 $ID_{<\omega}$ 就保证了与其等一致性的 $\Pi_1^1\text{-CA}_0$ 是同样安全的。因此相对于所有 $< \omega_\omega^{CK}$ 的序数的直谓主义就能带来极其积极的数学后果, 而 $\omega_\omega^{CK} \ll \omega_1$, 这表明只需假设相当小的可数实无穷就能很自由地翱翔于数学天空, 故完全值得付出这么一点点本体论代价。

哲学方面, 据邢滔滔分析, 王浩拓展标准直谓主义的根本目的, 是为实现他 (1991) 提出的构造主义与柏拉图主义的融合方案, 最终达成消解数学基础诸流派间纷争、化冲突为互补的目标。 ([47], 第 14 页) 标准直谓主义毫无疑问是连接

⁴称序数 α 可允当且仅当 $L_\alpha \models KP\omega$; 称序数 α 是递归不可达的, 如果 α 可允并且是所有 $< \alpha$ 的可允序数的上确界。 ([3], 第 44–45、60、176 页) 若 $\alpha < I^{CK}$ 是后继序数, 则 ω_α^{CK} 恰好是第 α 个可允序数; $\omega_{I^{CK}}^{CK} = I^{CK}$ 。

构造主义和柏拉图主义的桥梁，一方面它的核心精神是心灵从原始直觉出发自下而上地逐步构造数学概念，另一方面它又接受了非构造的 $\mathbf{N}$ 即假定了自然数概念的客观实在性，故它处于概念的人造论和实在论的中间态。而王浩直谓主义作为标准直谓主义的理想化外推，加入了迭代归纳定义这种带有弱实在论色彩（接受 $< I^{CK}$ 的超穷步数）的广义构造方法（自下而上逐步生成），使概念的人造论和实在论真正辩证地结合在一起，而非孤立地承认 $\mathbf{N}$ 的实在性。用化学术语打个比方，假设构造主义是分散剂、柏拉图主义是分散质，以二者的融合程度而言，罗素的直谓主义是浊液、标准的是胶体、王浩的则是溶液。

王浩的融合方案起源于他将数学基础研究诸流派排列为一个从狭义构造主义向强柏拉图主义逐步过渡的连续知识谱系的设想。([47], 第 14 页) 本文借鉴王浩的思路 ([38], 第 38 页)，仍以构造性为界限，将使用经典逻辑的基础研究诸流派二分为直谓主义和非直谓集合论；在实践上，前者足以处理普通数学，而后者自身构成了独特的数学领域。直谓主义又分为严格的（不接受 $\mathbf{N}$ 的绝对直谓主义）、标准的（相对于 $\mathbf{N}$ 的直谓主义）和广义的（接受 $\mathbf{N}$ 的绝对直谓主义或相对于 $< I^{CK}$ 的直谓主义）；非直谓集合论则分为可数集合论（各种大可数序数存在）、普通集合论（ZFC）、终极集合论（各种大基数存在）三种。这六个领域按其从外部看到的本体论目录的大小排列如下：

(1) 严格直谓主义	$< \omega$	(4) 可数集合论	$< \omega_1$
(2) 标准直谓主义	$< \omega_1^{CK}$	(5) 普通集合论	$< I$
(3) 广义直谓主义	$< I^{CK}$	(6) 终极集合论	$< \mathbf{Ord}$

前文说过集合的实在性为任意集合这个概念所强调。标准直谓主义带来了可数集合，而不可数集只能通过非直谓方法得到。但是直谓集只占可数集的很小一部分，故直谓性无法说明可数到不可数的嬗变。那么标准直谓主义到集合论之间有一段明显的空缺，王浩的广义直谓主义试图填补 ([47], 第 15 页)，但这无疑是失败的。然而上表将说明王浩失败的填补也有重要的意义。

上表展示出可数序数和全体序数结构的相似性，因为 ω_1^{CK} 和 I^{CK} 就是 ω_1 和 I （第一个弱不可达基数）的可数对应物。 $\omega_{\alpha+1}$ 是只通过取后继和取 ω_α 长已构造序数的序列的极限所得序数的总体， $\omega_{\alpha+1}^{CK}$ 则是只通过取后继和取相对于 $\mathbf{O}_\alpha$ （即 $< \omega_\alpha^{CK}$ 的序数的编码集）可计算的已构造序数的序列的极限所得序数的总体；当 $\delta < \omega_\delta$ 是极限序数时， $\omega_\delta = \sup_{\alpha < \delta} \omega_\alpha$ ， $\omega_\delta^{CK} = \sup_{\alpha < \delta} \omega_\alpha^{CK}$ 。而 I 直观上是利用这两种方法所不能得的最小序数，因为若 ω_α 是弱不可达的，则 $\alpha = \omega_\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \omega_\beta = \sup_{\beta < \omega_\alpha} \omega_\beta$ ； I^{CK} 的情况也与之类似。在 I 与 $\mathbf{Ord}$ 之间则镶嵌着各种定义起来十分复杂的大基数；对应地， I^{CK} 与 ω_1 之间也是各种复杂的与大基数有对应关系的大可数序数。这样看来王浩的广义直谓主义确实补上了关键的一环，纵然 I^{CK} 与 ω_1 仍旧邈若山河。此外这种结构相似性表明“可数无穷 $\rightarrow$ 不可

数无穷 $\rightarrow$ 绝对无穷”中的两次飞跃同样复杂，不是一种简单的线性过渡。在通往绝对无穷的整个过程中，必须反复交替使用构造方法和理想化外推，这正是王浩融合精神的体现。

参考文献

- [1] A. Avron, 2020, “Weyl reexamined: Das kontinuum 100 years later”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, **26(1)**: 26–79.
- [2] A. Avron, 2024, “Poincaré–Weyl’s predicativity: Going beyond Γ_0 ”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, **30(1)**: 41–91.
- [3] J. Barwise, 1975, *Admissible Sets and Structures*, Berlin: Springer-Verlag.
- [4] W. Buchholz and W. Pohlers, 1978, “Provable wellorderings of formal theories for transfinitely iterated inductive definitions”, *The Journal of Symbolic Logic*, **43(1)**: 118–125.
- [5] J. Burgess and A. Hazen, 1998, “Predicative logic and formal arithmetic”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **39(1)**: 1–17.
- [6] L. Crosilla, 2017, “Predicativity and Feferman”, in G. Jäger and W. Sieg(eds.), *Feferman on Foundations*, Springer.
- [7] S. Feferman, 1964, “Systems of predicative analysis”, *The Journal of Symbolic Logic*, **29(1)**: 1–30.
- [8] S. Feferman, 1966, “Predicative provability in set theory”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **72**: 486–489.
- [9] S. Feferman, 1979, “A more perspicuous formal system for predicativity”, in K. Lorenz(ed.), *Konstruktionen versus Positionen II*, Berlin: Walter de Gruyter.
- [10] S. Feferman, 1998, *In the Light of Logic*, Oxford: Oxford University Press.
- [11] S. Feferman, 2005, “Predicativity”, in S. Shapiro(ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford: Oxford University Press.
- [12] J. Fenstad, 1977, “Between recursion theory and set theory”, in R. Gandy and J. Hyland(eds.), *Logic Colloquium 76*, Amsterdam: North-Holland.
- [13] F. Ferreira and G. Ferreira, 2013, “Interpretability in robinson’s Q”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, **19(3)**: 289–317.
- [14] F. Fitch, 1938, “The consistency of ramified principia”, *The Journal of Symbolic Logic*, **3(4)**: 140–149.
- [15] J. Folina, 1992, *Poincaré and the Philosophy of Mathematics*, New York: Palgrave Macmillan.
- [16] K. Gödel, 1990, “On an extension of finitary mathematics which has not yet been used”, in S. Feferman et al.(eds.), *Collected Works II*, Original paper 1972, New York: Oxford University Press.

- [17] K. Gödel, 1990, “Russell’s mathematical logic”, in S. Feferman *et al.* (eds.), *Collected Works II*, Original paper 1944, New York: Oxford University Press.
- [18] W. Howard, 1972, “A system of abstract constructive ordinals”, *The Journal of Symbolic Logic*, **37(2)**: 355–374.
- [19] D. Jung, 1999, “Russell, presupposition and the vicious-circle principle”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **40(1)**: 55–80.
- [20] G. Kreisel, 1960, “Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof”, in J. Todd(ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Paper presented 1958, London & New York: Cambridge University Press.
- [21] P. Lorenzen, 1951, “Die widerspruchsfreiheit der klassischen analysis”, *Mathematische Zeitschrift*, **54(1)**: 1–24.
- [22] P. Lorenzen and J. Myhill, 1959, “Constructive definition of certain analytic sets of numbers”, *The Journal of Symbolic Logic*, **24(1)**: 37–49.
- [23] Y. Moschovakis, 1974, *Elementary Induction on Abstract Structures*, Amsterdam: North-Holland.
- [24] E. Nelson, 1986, *Predicative Arithmetic*, Princeton: Princeton University Press.
- [25] W. Pohlers, 2009, *Proof Theory*, Berlin: Springer-Verlag.
- [26] W. Pohlers, 2017, “Iterated inductive definitions revisited”, in G. Jäger and W. Sieg(eds.), *Feferman on Foundations*, Springer.
- [27] H. Poincaré, 1996, “Mathematics and logic”, in W. Ewald(ed.), *From Kant to Hilbert II*, Original paper 1906, Oxford: Oxford University Press.
- [28] F. Ramsey, 1931, “The foundations of mathematics”, in R. Braithwaite(ed.), *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, London: Routledge & Kegan Paul.
- [29] M. Rathjen, 2006, “Theories and ordinals in proof theory”, *Synthese*, **148(3)**: 719–743.
- [30] J. Richard, 1967, “The principles of mathematics and the problem of sets”, in J. van Heijenoort(ed.), *From Frege to Gödel*, Original paper 1905, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- [31] B. Russell, 2014, “Mathematical logics as based on the theory of types”, in G. Moore(ed.), *Toward Principia Mathematica 1905–08*, Original paper 1908, London & New York: Routledge.
- [32] B. Russell, 2014, “On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types”, in G. Moore(ed.), *Toward Principia Mathematica 1905–08*, Original paper 1905, London & New York: Routledge.
- [33] B. Russell, 2014, “The paradoxes of logic”, in G. Moore(ed.), *Toward Principia Mathematica 1905–08*, Original paper 1906, London & New York: Routledge.
- [34] B. Russell, 1903/32, *The Principles of Mathematics*, New York: W. W. Norton & Company.
- [35] K. Schütte, 1977, *Proof Theory*, Berlin: Springer-Verlag.
- [36] S. Simpson, 2009, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [37] H. Wang, 1963, “Certain predicates defined by induction schemata”, *A Survey of Mathematical Logic*, Original paper 1953, Peking: Science Press.

- [38] H. Wang, 1963, “Eighty years of foundational studies”, *A Survey of Mathematical Logic*, Original paper 1958, Peking: Science Press.
- [39] H. Wang, 1963, “Ordinal numbers and predicative set theory”, *A Survey of Mathematical Logic*, Original paper 1959, Peking: Science Press.
- [40] H. Wang, 1963, “The formalization of mathematics”, *A Survey of Mathematical Logic*, Original paper 1954, Peking: Science Press.
- [41] H. Wang, 1974, *From Mathematics to Philosophy*, London: Routledge & Kegan Paul.
- [42] H. Wang, 1996, *A Logical Journey*, Cambridge, MA: MIT Press.
- [43] N. Weaver, 2005, “Mathematical conceptualism”, arXiv:math/0509246.
- [44] N. Weaver, 2009, “Axiomatizing mathematical conceptualism in third order arithmetic”, arXiv:math/0905.1675.
- [45] H. Weyl, 1994, *The Continuum*, Translated by S. Pollard and T. Bole, New York: Dover Publications.
- [46] A. Whitehead and B. Russell, 1910/25, *Principia Mathematica I*, London: Cambridge University Press.
- [47] 邢滔滔, “概念论与直谓主义”, 自然辩证法研究, 1997年, 第13卷增刊, 第14–18页。

(责任编辑: 执子)

On Absolute and Relative Predicativism

Likai Liu

Abstract

The main task of this paper is to defend the legitimacy of Hao Wang's generalized predicativism which accepts iterated inductive definitions. By reviewing the history of predicativism, this paper observes that the diversity of its origins has led to the distinction between absolute and relative predicativism. This distinction not only provides sufficient motivation for expanding standard predicativism but also furnishes an argumentative framework for defending Hao Wang's generalized predicativism. If predicativism must be absolute, according to Hao Wang's dialectic of intuition and idealization, accepting iterated inductive definitions is the most natural and ultimate method to expand predicativism. If predicativism can be relative, based on works about iterated inductive definitions, Hao Wang's predicativism is relative to all ordinals less than the first recursively inaccessible ordinal. Therefore, Hao Wang's thought is some kind of predicativism in both cases. However, there are still some issues to deal with in both cases. In the first case, the vicious-circle principle needs to be modified to become compatible with inductive definitions, which is quite challenging. In the second case, while there is an additional ontological cost, it brings positive consequences: mathematically, it ensures the consistency of most mainstream mathematics; philosophically, it facilitates the smooth implementation of Hao Wang's new conceptualism which connects constructivism and Platonism.