逻辑学研究　2024 年第 5 期，21–38
文章编号：1674-3202(2024)-05-0021-18

描述例外的基数模态逻辑系统

罗昊轩　　　郭佳宏✉

摘　要：本文关注的问题是如何对允许例外情况存在的几乎必然命题进行形式化。在日常交流和科学研究中，很多普遍形式表述的命题都存在着例外情况，只是例外情况有时可以被忽略。为了区分含有不同程度例外情况的普遍性陈述，本文借助基数的概念，构造了基数模态算子，用来描述例外存在但可以忽略的情况。基于该算子，我们称一个命题是几乎必然的，当且仅当不存在足够多的例外情况不满足该命题。接着本文提出了基数模态逻辑系统，证明了该系统的可数模型性，并运用过滤与模型的复制构造了该系统的典范模型，以此说明系统的完全性。由此表明，本文提出的描述例外的基数模态逻辑系统实现了表达力扩充与对自然语言更精确刻画的一种相对平衡。

关键词：基数；几乎必然命题；基数模态逻辑；典范模型；可数模型性

中图分类号：B81　　　**文献标识码：**A

1　直观背景与研究动机

当我们认为一个命题在日常生活中必然为真时，往往会遇到或者设想到一些现实中的例外情况，虽然有时可以忽视例外情况产生的影响，但例外仍然是存在的，并在某些情况下也会发挥作用。本文将这样的命题称作几乎必然命题，可以将其看作一种特殊的必然命题。同理，我们也会认为一个命题在某个现实情境中必然为假，即使存在特例使得该命题为真。总之，在日常生活中，人们在进行普遍性陈述时通常允许可忽略的反例存在，因此在对上述语言直观进行形式化表征时，本文认为“几乎必然”命题的语义比“必然”命题的语义更加准确。本文关注的问题就是如何刻画允许反例存在的几乎必然命题，使其既满足传统必然命题具有的一些性质，又相较于传统的必然命题有更宽泛的成立条件。

收稿日期：2023-07-22

作者信息：罗昊轩　北京师范大学哲学学院
3355718300@qq.com
郭佳宏✉　北京师范大学哲学学院
jiahong.guo@bnu.edu.cn

基金项目：国家社会科学基金重大项目“大数据背景下人工智能及其逻辑的哲学反思”（19ZDA041）。

致　　谢：感谢匿名评审专家提出的详细审稿意见，感谢宁梦芹提出的意见和帮助。

例如，若命题 p 在语言背景中不存在反例，或仅仅在一定限度内存在反例，那么可以认为命题 p 是几乎必然成立的；同时，若 p 是几乎必然成立的，q 是几乎必然成立的，那么 p 并且 q 就是几乎必然成立的。

可以通过如下的例子理解描述可忽略反例存在的几乎必然与必然命题之间的关系：

将一堆黑色或白色的棋子平铺在平面上，以保证可以被玩家尽收眼底。从中随机取出一颗交给玩家，用命题 p 表示“玩家得到的棋子为黑色”。游戏有以下五个初始场景：

1. 玩家看到棋子一共有 10 颗，只有 1 颗为白色。
2. 玩家看到棋子一共有 20 颗，只有 1 颗为白色。
3. 玩家看到了数不清的棋子，但只看到了 10 颗白色棋子。
4. 玩家看到了数不清的棋子，且只能看到 1 颗白色棋子。
5. 玩家看到了数不清的黑色棋子与数不清的白色棋子。

显然，在前四个场景中，玩家对于命题 p 的信念度是递增的，但我们并不能说在前四个场景中 p 必然成立。此时，我们可以考虑几乎必然命题的成立情况：

对于场景 4，这是一个使 p 成立的信念度仅次于 p 必然成立的场景，相信除了极端客观（不接受几乎必然命题存在）的玩家外，所有玩家都可以接受场景 4 中命题 p 几乎必然成立。

若某玩家接受场景 4 中 p 几乎必然成立，但否定场景 3 中 p 几乎必然成立。那么考虑将场景 4 的棋子情况复制 10 次组合在一个场景中，这时黑棋依然是数不清的，白棋一共有了 10 颗。此时该玩家不再接受原本接受的命题“几乎必然取到黑棋”，出现了矛盾的信念。这也说明具有必然命题属性的几乎必然命题应该是可以“叠加”的，即 p 是几乎必然的且 q 是几乎必然的，那么 p 且 q 就是几乎必然的。

对于场景 1 与 2，例外分别有 10% 与 5% 的可能，不符合本文所定义的几乎必然命题的语义，玩家也很难认为几乎必然会取到黑色棋子。

本文的研究目标正是希望刻画这种允许例外存在的几乎必然命题，使其既满足必然概念的一些属性（例如模态逻辑中的 K 公理），又能够区分不存在例外的必然命题与存在例外的必然命题，因为二者之间仍然有明显差异。

相关的研究主要集中于分次模态逻辑（Graded Modal Logic）领域，分次模态逻辑提供了一种描述例外数量的方法。（[4]）GML 是基本模态逻辑的一种扩张，将“至少存在一个可能世界”的语义扩张到了“至少存在 n 个世界”，将“每一个可能世界都是”的语义缩小到了“最多存在 $n-1$ 个可能世界不是”。分次模态逻辑得到了充分地研究，包括分次模态逻辑的典范性（[3]），与一阶逻辑之间的“刻画定理”（[6]），分次模态逻辑的计算复杂度（[5]），以及分次模态逻辑框架的可

定义性。([7])

同一时期，也存在着关于基数的量词研究，如“存在不可数多个”等方面的研究。([1]) 但以有穷分次模态逻辑的研究最为系统和完备。在 GML 系统中，可以表达“p 除了至多 5 个不成立的可能世界外，在每个可能世界都成立”，“q 至少在 10 个可能世界上成立”这样的命题。在有限情况下，GML 可以较好地解决问题，但在无穷情况下不能很好地适用。例如在上面的例子中，虽然场景 3 与场景 4 中白棋的数目有区别，但本质上是可以相互转化的，有限的数量区别不能对主体是否认为命题 p 几乎必然成立产生影响。同时，作为 GML 中分次模态算子版本的 K 公式：$\Box_n(p \to q) \to (\Box_n p \to \Box_n q)$ 并不是系统的定理，因此也无法刻画本文定义的几乎必然的语义。

综上所述，本文希望通过加入新的基数模态算子，构造新的逻辑系统作为基本模态逻辑系统的扩张，在不失系统规范性与完全性的同时，实现表达力的扩张与对自然语言的更精确刻画。本文的结构如下：第 2 节中给出基数模态逻辑的语言、模型及语义；第 3 节定义了分层的过滤模型，并证明基数模态逻辑的可数模型性质；在第 4 节中给出基数模态逻辑的极小公理系统，定义了模型的复制与基数模态逻辑典范模型的过渡模型，并最终证明其强完全性质。

2　基数模态逻辑的语言及语义

首先介绍基数的概念及相关性质。

定义 2.1 (基数). 基数是刻画集合大小的概念，对于任意集合 A，用基数代表集合所含元素的个数，记为 $|A|$ 或 $Card(A)$；两个集合基数相同（$|A| = |B|$）当且仅当在集合 A, B 之间可以建立一一映射函数，此时也称两个集合等势，记作 $A \sim B$。

其中有穷集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的基数为自然数 n，有穷基数间的运算符合自然数运算规则。与自然数集合 N 一一对应的集合是可数集合，定义可数集合的基数为 $\aleph_0$；定义与实数集合 R 一一对应的集合的基数为 $\aleph$。

对于不相交的无穷集合 A, B 的基数 a, b，下面给出本文需要用到的基数运算公式：

1. $a + b = max\{a, b\}$，其中 $a + b$ 为集合 $A \cup B$ 的基数；
2. $2^a > a$，其中 2^a 为 A 的幂集的基数；
3. 若 $a > b$，对任意 $\forall n \in N, n \cdot b < a$；
4. $a^2 = a$，其中 a^2 为集合 $A \times A$ 的基数。([9]，第 31–32 页)

在引入基数概念后，本文对基数模态逻辑（Cardinal Modal Logic）进行定义，以公式 $\Box_c p$ 表示命题 p 是几乎必然的。

定义 2.2 (语言). 基数模态语言由命题字母集 Φ 和一元模态算子：$\Diamond$ 与 $\Diamond_c$ 组成。基数模态语言的公式定义如下：

$$\phi ::= p \mid \top \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond\phi \mid \Diamond_c\phi$$

其中 $p \in \Phi$。将 $\Diamond$ 的对偶算子 $\Box$ 定义为 $\Box\phi = \neg\Diamond\neg\phi$，$\Diamond_c$ 的对偶算子 $\Box_c$ 定义为 $\Box_c\phi = \neg\Diamond_c\neg\phi$。

定义 2.3 (模型). 基数模态逻辑（***CML***）的模型为克里普克模型 $M = (W, R, V)$，其中 W 是非空的可能世界集；R 是 W 上的二元关系，描述可能世界间的关系；V 是 Φ 到 $P(W)$ 的映射，是可能世界上的赋值。

定义 2.4 (语义). 对于任意模型 M，定义 ***CML*** 的语义如下：

1. $(M, w) \Vdash p$ 当且仅当 $w \in V(p)$；
2. $(M, w) \Vdash \top$ 恒成立；
3. $(M, w) \Vdash \neg\phi$ 当且仅当并非 $M, w \Vdash \phi$；
4. $(M, w) \Vdash \phi \vee \psi$ 当且仅当 $M, w \Vdash \phi$ 或 $M, w \Vdash \psi$；
5. $(M, w) \Vdash \Diamond\phi$ 当且仅当存在 $u \in W$，满足 Rwu 并且 $M, u \Vdash \phi$；
6. $(M, w) \Vdash \Diamond_c\phi$ 当且仅当若 w 的后继点构成的集合 $\{u \mid Rwu\}$ 为有限集，则存在 $u \in W$，满足 Rwu 并且 $(M, u) \Vdash \phi$，并且若集合 $\{u \mid Rwu\}$ 是无限集，则集合 $\{u \mid Rwu \,\&\, (M, u) \Vdash \phi\}$ 与 $\{u \mid Rwu\}$ 等势。

推论 1. $(M, w) \Vdash \Box_c\phi$ 当且仅当 w 的后继点构成的集合 $\{u \mid Rwu\}$ 为有限集，且对任意 $u \in W$，若 Rwu 则 $(M, w) \Vdash \phi$；或集合 $\{u \mid Rwu\}$ 是无限集，且集合 $\{u \mid Rwu \,\&\, (M, u) \Vdash \neg\phi\}$ 与 $\{u \mid Rwu\}$ 不等势。

命题 2.1. $(M, w) \Vdash \Diamond_c\phi$ 的语义定义也等价于：$(M, w) \Vdash \Diamond_c\phi$ 当且仅当存在有限个不同的从 $\{u \mid u \Vdash \phi \,\&\, Rwu\}$ 到 $\{v \mid Rwv\}$ 的映射 $f_1, ..., f_n$，能够覆盖 w 的后继点构成的集合（即 $\cup f_i \supseteq \{v \mid Rwv\}$）。

证明. 可以按 w 后继点构成的集合是否有限进行分类，说明两个定义等价。 □

在 CML 中，用两种算子定义了两种不同的可能（$\Diamond p$ 与 $\Diamond_c p$），以及两种不同的必然（$\Box p$ 与 $\Box_c p$）。其中，将基本模态算子定义的情况称为“可能”与“必然”，而将基数模态算子定义的情况对应地命名为“必然可能”与“几乎必然”。必然可能是对可能性的加强，例如在上文取棋子的例子中，五个场景中命题 p 都是可能成立的，但在场景一、二、五中有更高的可能性，本文把这样的可能直观刻画为“必然可能”，这也正好与“几乎必然”在直观上是对偶的。

在 CML 的语义中，以某一集合与自己的子集是否等势来刻画该子集“能否被忽略”这一直观。因此，称一个命题是必然可能的，当且仅当满足该命题的可

及世界“足够多”，以至于在当前世界的可及世界构成的集合中“不能被忽略”。同样的，在 CML 中，以某一集合的基数大于其子集来刻画该子集是“可以被忽略的”。因此称一个命题是几乎必然的，当且仅当不存在“足够多的”当前世界的可及世界不满足该命题。

除了日常生活中存在对一些特殊情况的忽略，在严谨的科学研究中也有很多类似的应用：比如在有关极限或无穷的计算中，低阶的量虽然存在于算式中，但往往可以被忽略；在勒贝格积分中，即使函数在有些点上的取值为无穷，从而在该点不可积，但只要不可积的点相对于所有点来说是可忽略的（测度为 0），那么整个函数仍然是勒贝格可积的；受力的物体总会产生形变，但仍有可以忽略形变的质点和刚体。由此看出，考虑对例外情况的忽略是有价值的。

一般来说，由两个正规模态算子构成的逻辑系统会联想到双模态逻辑，依据 $\Box$ 与 $\Box_c$ 之间的蕴含关系构造两个具有包含关系的可及关系 R 与 R_c。实际上，由于基数模态算子的语义涉及到集合之间基数的比较，其定义具有一定特殊性，并不能简单地为任意一个基数模态逻辑关系模型对应地找到一个等价的双模态逻辑模型。

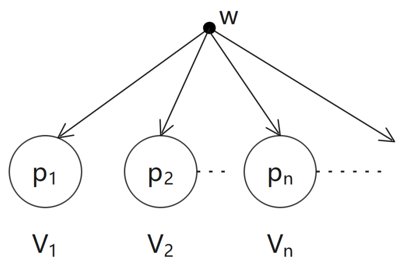

图 2.1

例 1. 在图 2.1 所示的模型 M 中，$W = \{w, v_1, v_2, ..., v_n, ...\}$，$R = \{(w, v_i) \mid i = 1, 2, ...\}$，$V(p_i) = \{v_i\}$。根据 CML 的语义能够得到 $M, w \Vdash \Diamond_c \neg p_i$ 并且 $(M, w) \Vdash \neg\Diamond_c p_i$ 对任意的 $i \in N^+$ 成立。

如果存在定义 $\Box_c$ 算子的可及关系 R_c 且 $R_c \subseteq R$，使得 $(M, w) \Vdash \Diamond_c \phi$ 成立当且仅当存在 $u \in W$，满足 $R_c wu$ 并且 $(M, u) \Vdash \phi$，那么：

1. 因为 $w \Vdash \Diamond_c \neg p_i$，所以 $R_c \neq \varnothing$。

2. 若 R_c 不是空集，对 R_c 中的元素按有序对 (w, v_i) 中 i 的大小排序，必然存在一个最小元，不妨设其为 (w, v_j)。由于 $(w, v_j) \in R_c$ 且 $V(p_j) = \{v_j\}$，因此有 $M, w \Vdash \Diamond_c p_j$，但这与已知条件 $(M, w) \Vdash \neg\Diamond_c p_j$ 矛盾，因此 R_c 是空集。

由于上述 1 与 2 矛盾，因此在保留原有的模型不变的情况下，不能直接添加定义 $\Box_c$ 算子的可及关系 R_c。事实上，如果增加新的可能世界并扩张 R 关系，或许能

得到不一样的结果，即能够构造出双关系模型与基数关系模型在某一点上模态等价。单以例 1 来说，如图 2.2 所示，如果增加 $v_0 \in W'$ 并使每个 $\neg p_i$ 在 v_0 上为真，就可以通过定义 $R_c = \{(w, v_0)\}$ 而构造对应的双模态逻辑模型 $M' = (W', R', R_c, V')$，其中 $W' = W \cup \{v_0\}$，$R' = R \cup \{(w, v_0)\}$，$R_c = \{(w, v_0)\}$，$V'(p_i) = \{v_i\}$。能够得到 M, w 与 M', w 模态等价，满足相同的基数模态公式。

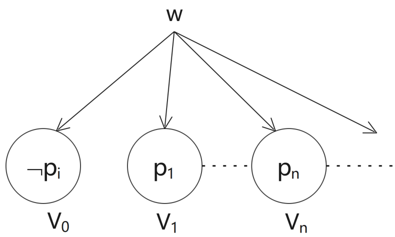

图 2.2

另外，也可以从公式的可满足性的角度考虑：对任意公式 ϕ，以及满足 ϕ 的基数关系模型 M，考虑构造双关系模型 M' 也满足公式 ϕ。通过这样的方法，我们也可以将基数模态逻辑的完全性转换为对应的双模态逻辑的完全性，并或许会得到更多有趣的结果。

3 基数模态逻辑系统的可数模型性质

很容易发现，CML 中的公式 $\Box_c p \wedge \neg\Box p$ 是可满足的，但却不能在一个有穷的模型上满足。那么一个值得考虑的问题是任意可满足的基数模态公式是否能在一个可数的模型上可满足？

本节采用类似模态逻辑中过滤[1]（Filtrations）的方法说明 CML 的可数模型性质。但是由于基数算子 $\Diamond_c$ 需要考虑后继点构成集合的基数比较的特性，不能直接构造过滤模型。

例 2. *在如下模型中，模型 M_2 为模型 M_1 对于公式集 $\Sigma = \{p, \Box_c p\}$ 生成的过滤模型。但由于改变了 0 点的后继点集合基数比较关系，因此有 $(M_1, 0) \Vdash \Box_c p$ 但并非 $(M_2, 0) \Vdash \Box_c p$。*

传统的过滤方法此时是失效的，鉴于此，本节通过对树模型分层构造的方式，最终得到符合要求的“过滤”模型。

引理 3.1. *任意基数模态逻辑公式若可满足，则在一个层数有限的树模型上可满足。*

[1]可以参考 [2] 的第 77 页中关于过滤的定义。

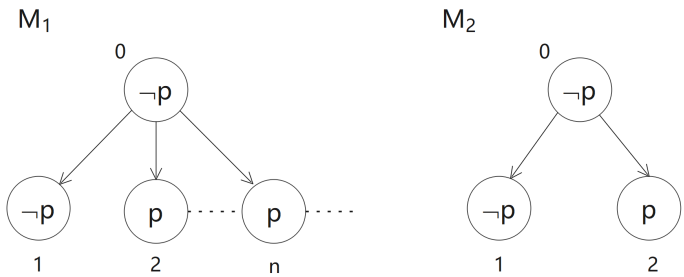

图 3.1

证明. 这是一个平凡但较为复杂的结论，可以参考 [2] 的第 218 页中关于可能世界生成子模型的拆分（unraveling）与对应的引理 4.52。由于我们并没有定义 CML 中模型保持模态不变的变换方法，因此不详细证明。 □

定义 3.1. 对于任意树模型 $M=(W,R,V)$ 以及对于树模型的根 u,满足 $(M,u)\Vdash\phi$ 的基数模态公式 ϕ。令由 ϕ 诱导生成的对子公式封闭的公式集合为 Σ，ϕ 中包含的命题字母的集合为 Φ。

定义模型序列 $\{M_i\}$：$M_i=(W_i,R_i,V_i)$ 为树模型 M 对于 Σ 的分层过滤序列。其中[2]：

$W_1=\{|u|_\Sigma\}$；$R_1=\varnothing$；$|u|\in V_1(p)$ 当且仅当 $(M,u)\Vdash p$，其中所有的命题字母 $p\in\Phi$（为了书写方便，默认 $|u|$ 为 $|u|_\Sigma$）。

当第 $i(i<n)$ 个模型 $M_i=(W_i,R_i,V_i)$ 已经构造，对任意 $|v|\in W_i-W_{i-1}$，定义过滤集合 A_v 为 $A_v=\{|w|\mid w\in W\ \&\ Rvw\}$。对 A_v 重新构造得到集合 A'_v，其中：

若 $\{w\mid w\in W\ \&\ Rvw\}$ 是有穷集合，则 $A'_v=A_v$，若 $\{w\mid w\in W\ \&\ Rvw\}$ 是基数为 a 的无穷集合，因为 Σ 是有穷公式集，因此 Σ 等价类是有限的。根据无穷状态下的鸽巢原理，至少有一个等价类 $|w|$ 中包含 a 个元素。那么 $A'_v=\{|w|\mid$ 等价类 $|w|$ 中包含的元素个数小于 $a\}\cup\{|w|\times\aleph_0\mid$ 等价类 $|w|$ 中包含的元素个数等于 $a\}$。

在此基础上，构造第 $i+1$ 个模型 $M_{i+1}=(W_{i+1},R_{i+1},V_{i+1})$：

$W_{i+1}=W_i\cup\bigcup_{|v|\in W_i-W_{i-1}}A'_v$；

$R_i\subseteq R_{i+1}$，且 $(|w|,|v|)\in R_{i+1}-R_i$ 当且仅当 $|w|\in W_i-W_{i-1}$ 以及存在 $v\in|v|$ 使得 Rwv；

$V_{i+1}(p)=\{|v|\mid(M,v)\Vdash p\}$，其中所有的命题字母 $p\in\Phi$。

以下的例子直观反映了从 A_v 到 A'_v 的构造过程：

[2]本文省略了对滤关系 R_i 取极值的讨论，其与基本模态逻辑中过滤的情况是类似的。

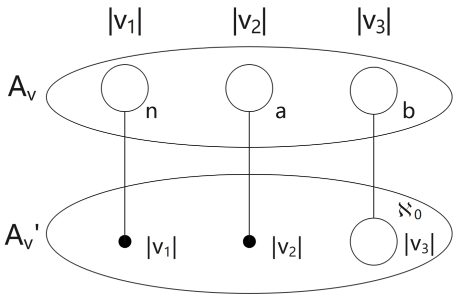

图 3.2

例 3. 在上述 A_v 与 A'_v 的构造中，如图 *3.2*，A_v 由三个所包含点的基数分别为 n, a, b 的等价类 $|v_1|, |v_2|, |v_3|$ 构成，其中 n 为自然数，无穷基数 $a < b$。则在得到的集合 A'_v 中，等价类 $|v_1|, |v_2|$ 只出现一次，等价类 $|v_3|$ 有可数多次相同的出现。那么等价类 $|v_1|, |v_2|, |v_3|$ 所包含元素基数之间的比较关系也传递到了等价类 $|v_1|, |v_2|, |v_3|$ 在 A'_v 中出现次数的比较关系中。

命题 3.1. 对以上定义的模型序列 $\{M_i\}$ 中的任意模型 M_i，M_i 至多是可数的。

证明. 根据定义，模型 M_i 的大小由 $W_{i+1} = W_i \cup \bigcup_{|v| \in W_i - W_{i-1}} A'_v$ 决定。由于集合 $W_1 = \{|u|_\Sigma\}$ 只有一个元素，同时 Σ 等价类的个数是有限的且不同的等价类在 A'_v 中至多出现可数次，所以不同的 A'_v 的个数以及每个 A'_v 所包含的元素都是至多可数的。因此根据基数运算的性质，对每一个自然数 i，M_i 至多是可数的。 □

通过对基数模态公式进行归纳，可以证明：

定理 3.2. 设 M 为层数有穷（n 层）的树模型，对任意公式 ψ，令由 ψ 诱导生成的对子公式封闭的公式集合为 Σ。取模型序列 $\{M_i\}$（$i \leqslant n$）为 M 对于 Σ 的分层过滤序列。对任意 $\phi \in \Sigma$，$u \in W$，有 $(M, u) \Vdash \phi$ 当且仅当 $(M_n, |u|) \Vdash \phi$ 成立。

最终，可以得到基数模态逻辑的可数模型性质。

定理 3.3 (可数模型性质)**.** 设 ϕ 为基数模态公式，若 ϕ 是可满足的，那么 ϕ 可以在一个至多可数的模型上满足。

证明. 由于 ϕ 是可满足的，根据引理 3.1，ϕ 可以在一个层数有穷的树模型上满足。由定理 3.2 与命题 3.1 知，存在至多可数的模型 M_n 满足 ϕ。 □

与这一定理类似的是基本模态逻辑中的有穷模型性（[2]），有穷模型性质从另一角度也可以理解为基本模态语言的表达力被“限制”在了有穷模型之中。但基数模态逻辑则被限制在了可数模型中，这也从侧面反映了基数模态逻辑系统表达力的扩张。

4 公理系统与典范模型

定义 4.1. 极小的基数模态逻辑系统 KC 包含的公理模式与推理规则为：

$Taut$	所有命题逻辑重言式的带入特例
K	$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
K_c	$\Box_c(p \to q) \to (\Box_c p \to \Box_c q)$
$Int_{\Box\Box_c}$	$\Box p \to \Box_c p$
$Dual$	$\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$
$Dual_c$	$\Diamond_c p \leftrightarrow \neg\Box_c\neg p$
MP	由ϕ以及$\phi \to \psi$，可得ψ
Gen	由ϕ可得$\Box\phi$

其中，基数算子 $\Box_c$ 满足 K 公理，公理 $Int_{\Box\Box_c}$ 直观上意为一个命题若是必然的，那么也一定是几乎必然的。加入公理 $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$ 与 $\Diamond_c p \leftrightarrow \neg\Box_c\neg p$，以避免系统不完备的情况。（[8]）

命题 4.1. 基数模态逻辑的公理在任何模型上都是有效的。

证明. 这里只证明 K_c 是有效的。对任意的模型 $M = (W, R, V)$，及 $w \in W$：

- 当 w 的后继点构成的集合为有限集时，公式 $\Box_c(p \to q) \to (\Box_c p \to \Box_c q)$ 等价于 $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$，因此是有效的。
- 当 w 的后继点构成的集合是以 a 为基数的无穷集时，若并非 $(M, w) \Vdash \Box_c(p \to q)$，则 $(M, w) \Vdash \Box_c(p \to q) \to (\Box_c p \to \Box_c q)$；若 $(M, w) \Vdash \Box_c(p \to q)$，等价于 $(M, w) \Vdash \Box_c(\neg p \vee q)$，即点 w 的后继点构成的集合中不存在“a”个点不满足 $\neg p \vee q$，集合 $A = \{u \mid Rwu$ 且 $(M, u) \Vdash p \wedge \neg q\}$ 的基数小于 a。若有 $(M, w) \Vdash \Box_c p$，即集合 $B = \{u \mid Rwu$ 且 $(M, u) \Vdash \neg p\}$ 的基数小于 a，考虑 w 的后继点构成的集合中 $\neg q$ 的满足情况：按对 p 的满足情况分类，得出只有集合 A, B 中的点可以满足 $\neg q$，即集合 $C = \{u \mid Rwu$ 且 $(M, u) \Vdash \neg q\} \subseteq A \cup B$。而集合 A, B 的基数都小于无穷基数 a，根据基数运算的性质，集合 $A \cup B$ 的基数也小于 a，作为 $A \cup B$ 子集的集合 C 的基数也小于 a。因此点 w 满足 $\Box_c q$，即有 $(M, w) \Vdash \Box_c(p \to q) \to (\Box_c p \to \Box_c q)$ 成立。

□

在命题 4.1 的基础上，我们可以得到 KC 对于任意框架类都是可靠的。

定理 4.1 (可靠性定理). 对任意的基数模态逻辑公式 ϕ，若 $\vdash \phi$，则 $M \Vdash \phi$ 对所有的模型 M 成立。

在基本模态逻辑中，我们可以认为典范模型是一种特殊的"过滤"，典范模型中每个点都满足不相同的公式集合，可以类比为关于所有基本模态公式的过滤。区别在于典范模型中的点是基本模态逻辑公式的极大一致的无穷集合，并且典范关系是唯一的，"最大过滤"与"最小过滤"的条件在典范模型中是等价的。

在上一节中例 2 展示了传统的过滤方法在基数模态逻辑中是不可行的，对应到典范模型中，仅由 $\Box$ 或 $\Diamond$ 算子定义的典范关系不能刻画基数比较关系，因此无法考虑到 $\Box_c\phi$ 这样的基数模态公式的可满足性。

本文通过定义过滤序列与例 3 展示了如何保留原模型的基数比较关系，只是这样的方法都是基于树模型实现的。那么，在构造 KC 的典范模型过程中，一个自然的想法就是如何不失一般性地在不改变基本模态逻辑公式可满足性的同时刻画基数比较的关系。

定义 4.2 (模型在点上的复制). 对于基本模态逻辑语义模型 $M = (W, R, V)$，任取其中一点 u，称 u 在 M 中的 $n(n \geqslant 1)$ 次复制模型为 $M' = (W', R', V')$，其中：

$W' = W \cup \{u_1\} \cup ... \cup \{u_n\}$。定义 $V'(p) = V(p)$ 当且仅当 $u \notin V(p)$，否则 $V'(p) = V(p) \cup \{u_1\} \cup ... \cup \{u_n\}$。

R' 满足 $R \subseteq R'$ 且与模型的过滤类似，R' 关系也有对应的上下限。令 $R_0 = R \cup \{(u_i, v) \mid i = 1, \cdots, n$，$v$ 满足 Ruv 且 $u \neq v\} \cup \{(u_i, u_i) \mid Ruu, i = 1, \cdots, n\}$ 为 R' 的下限；$R_1 = R_0 \cup \{(v, u_i) \mid Rvu$ 且 $v \neq u, i = 1, \cdots, n\} \cup \{(u_i, u_j) \mid Ruu$ 且 u_i, u_j 遍历 $u, u_1, ..., u_n\}$ 为 R' 的上限[3]。则 $R_0 \subseteq R' \subseteq R_1$。

例 4. 在下图所示模型中，$R = \{(w, u), (u, u), (u, v)\}$，令 u' 为 u 的复制点，对于 u 通达到的点 v 以及 u 的自反关系，u' 对应的也通达到 v，以及自身的自反关系，即 $R_0 = R \cup \{(u', v), (u', u')\}$。同时对于 Rwu 与 $Ru'u$、Ruu'，点 u' 可以自由选择复制该关系（图中虚线部分），即 $R_1 = R_0 \cup \{(w, u'), (u', u), (u, u')\}$。

定义 4.3 (模型复制). 对于基本模态逻辑语义模型 $M = (W, R, V)$，称模型的复制为对模型中每一点进行复制，设复制函数 $f : f(u) = a$，其中 $u \in W$，a 为任意基数。该函数意为对模型中每个点都赋予一个基数，使该点进行对应基数的复制：对任意 $u \in W$，令集合 I_u 为对应 u 及其复制点下标的指标集（用 $u_0 \in I$ 记 u），则 $f(u) = |\{u_i \mid i \in I_u\}| - 1 = |I_u| - 1$。

令模型 $M = (W, R, V)$ 的复制模型为 $M' = (W', R', V')$。其中：

[3]当 $(u, u) \in R$ 时，点 u 的复制点集内部的 R' 关系上限是一个"完全图"。

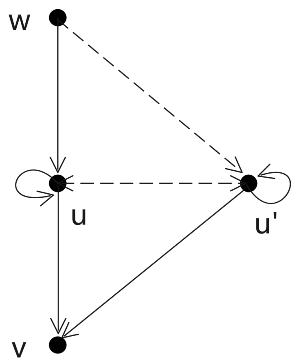

图 4.1

$W' = \{u_i \mid u \in W, i \in I_u\}$。$R'$ 满足 $R \subseteq R'$，并且令 $R_0 = R \cup \{(u_i, v_0) \mid u, v \in W, i \in I_u, Ruv$ 且 $u \neq v\} \cup \{(u_i, u_i) \mid Ruu$ 且 $i \in I_u\}$ 为 R' 的下限；令 $R_1 = R_0 \cup \{(v_j, u_i) | u, v \in W, i \in I_u, j \in I_v, Rvu\}$ 为 R 的上限。则有 $R_0 \subseteq R' \subseteq R_1$。$V'(p) = V(p) \cup \{u_i \mid u \in V(p), i \in I_u\}$。

特别地，若 f 为常函数 $f(u) = a$，称模型的复制为 a 次复制函数。

可以通过证明模型复制的变换是一种基本模态逻辑中的互模拟变换，以此说明其保持对基本模态逻辑公式不变。

命题 4.2. 定义 4.2 与定义 4.3 中定义的模型在点上的复制与模型的复制是基本模态逻辑的互模拟变换：对于模型 $M = (W, R, V)$，令模型 $M' = (W', R', V')$ 为模型 M 对其中点 u 的 n 次复制模型，则 M 与 M' 间存在互模拟关系 Z；令模型 $M'' = (W'', R'', V'')$ 为通过函数 $f : W \to A$ 生成的复制模型（A 为所有基数的集合），则 M 与 M'' 间存在互模拟关系 Z。

证明. 仅证明复制模型 M'' 的互模拟结论。构造二元关系 $Z \subseteq W \times W''$ 使得 uZu_i 对任意 $i \in I_u$ 成立，验证 Z 满足互模拟关系的性质：

1. 若有 uZu_i，根据 V'' 的定义，u 与 u_i 满足相同的命题字母。
2. 若有 uZu_i 以及 Ruv，根据 R'' 的定义，存在 $v_0 \in M''$ 使得 $R''u_iv_0$ 且 vZv_0 成立。
3. 若有 uZu_i 以及 $R''u_iv_j$，根据 R'' 的定义，存在 $v \in M$，使得 Ruv 且 vZv_j 成立。

因此，Z 是模型 M, M'' 间的互模拟关系。 □

根据基本模态逻辑互模拟的性质，直接可以得到：

推论 2. 对任意模型 M，进行 a 次模型复制后，M 中的点 u 与得到的模型 M'' 中对应的点 u_i 满足相同的基本模态逻辑公式。

由此可以看出模型的复制保持着基本模态逻辑公式的不变性，但不能保持基数模态逻辑公式的不变性。因此可以在保持基本模态逻辑公式可满足性不变的情况下，通过模型的复制改变对基数模态公式的可满足性。

基数模态逻辑的典范模型也是基于这样的特点构造的，本文选择从基本模态逻辑的典范模型出发，逐步构造出基数模态逻辑的典范模型。为了方便区分基数模态逻辑公式与不含基数算子的基本模态公式，后文统一以 ϕ, ψ 表示基数模态公式，以 α, β 表示不含基数算子的模态或命题公式。

定义 4.4 (基本模态逻辑典范模型)**.** 设模型 $M = (W, R, V)$ 为基本模态逻辑的典范模型，其中 W 由所有基本模态逻辑极大一致集合构成；R 是定义在 W 上的二元关系，满足 Ruv 成立当且仅当对任意基本模态逻辑公式 α，若 $\alpha \in v$，则 $\Diamond\alpha \in u$；这个定义也等价于 Ruv 成立当且仅当对任意基本模态逻辑公式 α，$\Box\alpha \in u$ 蕴含 $\alpha \in v$。模型的赋值满足 $V(p) = \{w \in W | p \in w\}$。

通过基本模态逻辑的典范模型，逐步构造基数模态逻辑的典范模型，先定义作为桥梁的“过渡模型”。

命题 4.3. 由林登鲍姆引理（*Lindenbaum's Lemma*）可知，设 Γ_0 是基本模态逻辑的极大一致集合，则存在基数模态逻辑的极大一致集合 Γ，满足 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$（$\Gamma_0$ 可以视为 Γ 中所有不包含基数算子的公式构成的集合）。

定义 4.5 (过渡模型)**.** 设模型 $M = (W, R, V)$ 为基本模态逻辑的典范模型，构造模型 M 的扩张模型 $M' = (W', R', V')$，该模型是以基数模态系统中极大一致集合作为元素的模型：

1. 令 $W' = \{u_i \mid u \in W\}$ 由所有基数模态逻辑极大一致集合构成，其中 $u \in W$ 为基本模态逻辑系统的极大一致集，对任意的 $i \in I_u$，满足 $u \subseteq u_i$。
2. R' 是定义在 W' 上的二元关系，$R'u_iv_j$ 成立，当且仅当对任意基数模态公式 ϕ，$\phi \in v_j$ 蕴含 $\Diamond\phi \in u_i$。
3. 令 $V'(p) = \{w_i \in W' \mid p \in w_i\}$，也等价于 $V'(p) = \{u_i \in W' \mid u \in V(p)\}$。

推论 3. 对于过渡模型 M'，$R'u_iv_j$ 当且仅当对任意基数模态公式 ϕ，若 $\Box\phi \in u_i$，则 $\phi \in v_j$。

推论 4. 在过渡模型 M' 中，若存在 $R'u_iv_j$，则有 Ruv 在模型 M 中成立。

证明. 若有 $R'u_iv_j$，则对任意基本模态公式 α，$\Box\alpha \in u$ 当且仅当 $\Box\alpha \in u_i$；$\Box\alpha \in u_i$ 蕴含 $\alpha \in v_j$；$\alpha \in v_j$ 当且仅当 $\alpha \in v$，因此 Ruv 在模型 M 中成立。 □

以及可以得到推论 4 反方向更强的结论：

推论 5. 在基本模态逻辑典范模型 M 与过渡模型 M' 中，Ruv 成立当且仅当对任意的 $u_i \in W'$，存在 $v_j \in W'$，满足 $u \subseteq u_i$ 与 $v \subseteq v_j$ 以及 $R'u_iv_j$。

证明. 从左至右：令公式集 $\Gamma = \{\phi \mid \phi \in u_i\}$，$\Gamma_0 = \{\alpha \mid \alpha \in \Gamma$ 且 α 中不含基数算子 $\}$，$A_0 = \{\alpha \mid \alpha \in v\}$。构造基数模态公式集 $B = \{\Box\phi \mid \Box\phi \in u_i\}$ 与 $C = \{\phi \mid \Box\phi \in u_i\}$。先证明在基数模态逻辑系统中，集合 C 与集合 A_0 是一致的。

1. 集合 $u_i = \Gamma$ 是基数模态逻辑一致的，由于 $B \subseteq \Gamma$ 因此 B 是一致的。
2. 若集合 C 与集合 A_0 不一致，则存在有限步骤推出矛盾的证明。不妨设 $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m \vdash \perp$，其中 $\phi_i \in C$，$\psi_i \in A_0$，且令 $\psi = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m$，则也有 $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \wedge \psi \vdash \perp$，以及 $\psi \in A_0$。通过系统中的推理得到 $\vdash \neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \wedge \psi)$，进一步得到 $\vdash \Box\neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \wedge \psi)$。
3. 一方面 $B \in u_i = \Gamma$，因此 $\Box\phi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\phi_n \in u_i$；另一方面因为 $\psi \in A_0$，且有 Ruv 成立，根据 M 的定义，有 $\Diamond\psi \in u$。对于以 u 为基础构造的基数模态逻辑系统极大一致集 u_i，也有 $\Diamond\psi \in u_i$。
4. 由于 $\vdash \Box\neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \wedge \psi)$，因此作为系统的定理，由系统的可靠性可得 $\Box\neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \wedge \psi) \in u_i$。因为公式 $\Box\phi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\phi_n$，$\Diamond\psi$，$\Box\neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \wedge \psi)$ 并不一致，但它们都在一致集合 u_i 中，因此 2 中的假设不成立，A_0 与 C 是一致的。

由于 A_0 与 C 一致，根据林登鲍姆引理，存在集合 A：$A_0 \subseteq A_0 \cup C \subseteq A$ 是基数模态逻辑中的极大一致集合。因此在 $\{v_i\}$ 中存在一点 v_j 满足 $A = v_j$。且对于任意基数模态公式 ϕ，若 $\Box\phi \in u_i$，则 $\Box\phi \in B$，$\phi \in C$，$\phi \in A$，即 $\phi \in v_j$。根据推论 3，$R'u_iv_j$ 在过渡模型 M' 上成立。

从右至左：根据推论 4，由于 W 与 W' 非空，因此对于 v_i 与 $R'u_iv_j$，都有 Ruv 在 M 中成立。 □

引理 4.2 (过渡模型真值引理)**.** 对于过渡模型 M'，及任意基本模态公式 α，$(M', u_i) \Vdash \alpha$ 当且仅当 $\alpha \in u_i$。

证明. 对基本模态公式进行归纳，仅证明 $\Diamond\alpha$ 的情形：若 $(M', u_i) \Vdash \Diamond\alpha$ 则存在 $v_j \in W'$ 满足 $R'u_iv_j$ 以及 $(M', v_j) \Vdash \alpha$，由归纳假设，有 $\alpha \in v_j$，根据定义 4.5 中 R' 的定义，得到 $\Diamond\alpha \in u_i$。

若 $\Diamond\alpha \in u_i$，则 $\Diamond\alpha \in u$，根据基本模态逻辑典范模型的性质，存在 $v \in W$ 满足 $\alpha \in v$ 以及 Ruv。根据推论 5，对于 $u_i \in W'$，存在 $v_j \in W'$，满足 $R'u_iv_j$ 且 $\alpha \in v_j$。由归纳假设，$(M', v_j) \Vdash \alpha$，因此 $(M', u_i) \Vdash \Diamond\alpha$。 □

定义 4.5 与引理 4.2 提供了一个既满足基本模态公式的典范关系，又包含基数模态公式极大一致集合的过渡模型。下面再采用保持基本模态逻辑不变，改变基

数模态公式可满足性的模型复制方法即可得到最终的基数模态逻辑典范模型。

定义 4.6 (基数模态逻辑典范模型)**.** 设 $M=(W,R,V)$ 为基本模态逻辑典范模型，$M'=(W',R',V')$ 为定义 4.5 中的过渡模型，令 $Card(W')=a$（a 显然为无穷基数），根据定义 4.3，构造 M'' 为模型 M' 的 2^a 次复制，则复制函数为常函数 2^a：对任意的 $u_i \in W'$，$f(u_i)=2^a$。

1. $W''=\{u_{ij}|u\in W, i\in I_u, j\in I_{u_i}\}$，其中 I_u 对应由 u 扩张生成的 u_i 的下标指标集，I_{u_i} 为 u_i 的基数为 2^a 的复制指标集。令 u_{i0}（$0\in I_{u_i}$）为 W' 中 u_i 复制后对应的点。并且作为基数模态逻辑公式的集合 u_{ij} 与 u_i 是相同的公式的极大一致集合。
2. R'' 是 M'' 上的二元关系，作为复制模型的二元关系，R'' 满足定义 4.3 中复制模型关系的上下限的限制。同时作为典范关系 R'' 满足条件：对任意的 $j\in I_{u_i}$ 都有 $|\{v_{kl}\mid \neg R''u_{ij}v_{kl}, l\in I_{v_k}\}|<2^a$ 当且仅当对任意的公式 ϕ，若 $\Box_c\phi\in u_i$，则 $\phi\in v_k$。
3. $V''(p)=\{w_{ij}\in W''\mid p\in w_{ij}\}$。

命题 4.4. 对于定义 4.6 中的过渡模型 M' 与其 2^a 次复制模型 M''，R'' 的典范关系的定义并不会超出模型复制关系的上下限：$R_0\subseteq R''\subseteq R_1$。

命题 4.5. 定义 4.6 中作为典范关系 R'' 的条件等价于：对任意的 $j\in I_{u_i}$ 都有 $|\{v_{kl}\mid R''u_{ij}v_{kl}, l\in I_{v_k}\}|=2^a$ 当且仅当对任意的公式 ϕ，若 $\phi\in v_k$，则 $\Diamond_c\phi\in u_i$。

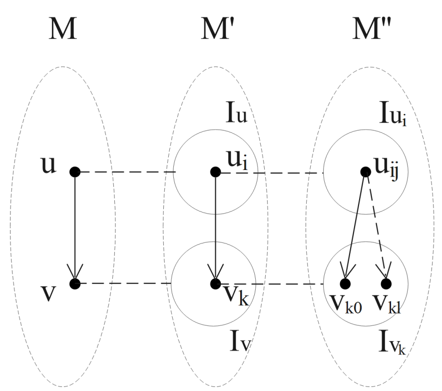

图 4.2

如图 4.2，模型 M'' 是对过渡模型 M' 的复制。由于复制模型存在可以自由选择的通达关系，上述定义正是通过构造合适的可达关系（可直观理解为将满足“若 $\Box_c\phi\in u_i$，则 $\phi\in v_k$”条件的二元关系进行扩张，使其具有更高的势），从而满足基数算子特殊的语义条件。

基数模态逻辑完全性的证明思路正是借助 M, M', M'' 这三个模型之间的特殊关系从而将 M 与 M' 中已知的性质向 M'' 转化。

引理 4.3. *对于定义 4.6 中的模型 M''，设 α 为任意基本模态公式，$M'', u_{ij} \Vdash \alpha$ 当且仅当 $\alpha \in u_{ij}$。*

证明. 由推论 2 及引理 4.2，对任意基本模态公式 α，$(M'', u_{ij}) \Vdash \alpha$ 当且仅当 $(M', u_i) \Vdash \alpha$，当且仅当 $\alpha \in u_i$ 当且仅当 $\alpha \in u_{ij}$。 □

引理 4.4 (存在引理)**.** *对任意基数模态公式 ϕ 及点 $u_{ij} \in W''$，若 $\Diamond_c\phi \in u_{ij}$，则存在 $v_k \in W'$，满足 $\phi \in v_k$ 且 $|\{v_{kl} \mid \neg R'' u_{ij} v_{kl}, l \in I_{v_k}\}| < 2^a$；同时对任意基数模态公式 ψ，若 $\Diamond\psi \in u_{ij}$，则存在 $v_k \in W'$，使得 $(u_{ij}, v_{k0}) \in R''$ 并且 $\psi \in v_{k0}$。*

证明. 先证明前半部分：构造公式集 $\{\psi \mid \Box_c\psi \in u_{ij}\}$ 与公式 ϕ 一致，否则存在系统内的证明：$\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n \vdash \neg\phi$，等价于在基数模态逻辑中存在定理 $\Box_c\psi_1 \wedge ... \wedge \Box_c\psi_n \to \Box_c\neg\phi$。但 $\Box_c\psi_1 \wedge ... \wedge \Box_c\psi_n \in u_{ij}$。由于极大一致集合的性质，得到 $\Box_c\neg\phi \in u_{ij}$。这与条件 $\Diamond_c\phi \in u_{ij}$ 矛盾，因此 $\{\psi \mid \Box_c\psi \in u_{ij}\}$ 与公式 ϕ 一致。

再将公式 $\{\psi \mid \Box_c\psi \in u_{ij}\} \cup \{\phi\}$ 扩张为一个极大一致集，令该极大一致集为 W' 中的点 v_k，则对应到模型 M'' 中的点集 $\{v_{kl} \mid l \in I_{u_k}\}$，根据定义 4.6，有 $\phi \in v_k$ 且 $|\{v_{kl} \mid \neg R'' u_{ij} v_{kl}, l \in I_{v_k}\}| = 2^a$。

再证明后半部分：同理可得 $\{\psi \mid \Box\psi \in u_{ij}\}$ 与公式 ψ 一致，令其扩张成为的极大一致集为 v_k，由推论 3 得到 $R' u_i v_k$ 成立，再根据定义 4.6，有 $R'' u_{ij} v_{k0}$ 成立且 $\psi \in v_{k0}$。 □

引理 4.5 (真值引理)**.** *在基数模态模型 M'' 中，对任意基数模态公式 ϕ，$(M'', u_{ij}) \Vdash \phi$ 当且仅当 $\phi \in u_{ij}$。*

证明. 对公式 ϕ 进行归纳，仅考虑 $\Diamond_c\phi$ 的情况：

因为 $|W'| = a$，而 M'' 为模型 M' 的 2^a 次复制，即模型 M'' 中可能世界个数为 $|W''| = a \times 2^a$。由定义 2.1，在基数运算中 $2^a \leqslant a \times 2^a \leqslant 2^a \times 2^a$，且有 $2^a = 2^a \times 2^a$，因此 $2^a = a \times 2^a$。

那么，$(M'', u_{ij}) \Vdash \Diamond_c\phi$ 当且仅当集合 $\{v_{kl} \mid R'' u_{ij} v_{kl} \,\&\, (M'', v_{kl}) \Vdash \phi\}$ 的基数为 2^a，由于 $|W'| = a$，根据无穷状态下的鸽巢原理，$(M'', u_{ij}) \Vdash \Diamond_c\phi$ 等价于存在 $v_k \in W'$，使集合 $\{u_{kl} | l \in I_{v_k}\}$ 中的 2^a 个点满足 $R'' u_{ij} v_{kl}$ 且 $(M'', v_{kl}) \Vdash \phi$。（因为即使 W' 中每个点都在 W'' 中有至多小于 2^a 个点满足 ϕ（设其基数为 b），则仍有 $a \times b < 2^a$，所以必然至少有 W' 中一点在 W'' 中的 2^a 个复制点满足 ϕ）。

再从两个方向上分别由 R'' 的定义以及存在引理，最终得到 $M'', u_{ij} \Vdash \Diamond_c\phi$ 等价于 $\Diamond_c\phi \in u_{ij}$。

因此，在模型 M'' 中，对于任意的公式 ϕ，$u_{ij} \Vdash \phi$ 当且仅当 $\phi \in u_{ij}$。 □

定理 4.6 (完全性定理)**.** 基数模态逻辑的极小系统是强完全的，即对任意的基数模态逻辑公式集 $\Gamma \cup \{\phi\}$，若 $\Gamma \Vdash \phi$，则 $\Gamma \vdash \phi$ 对所有的模型 M 成立。

证明. 系统的强完全性等价于对任意基数模态逻辑一致的公式集合 Σ，存在一个模型 M,Σ 在 M 中可满足。而对于任意一致的公式集合 Σ，由林登鲍姆引理，Σ 有一个极大一致扩张 Σ^+，令模型 M'' 中对应 Σ^+ 的点为 u_{ij}，因此有 $\Sigma^+ \in u_{ij}$，由真值引理 $M'', u_{ij} \Vdash \Sigma$，从而是可满足的。 □

5 结论与展望

本文形式化了现实生活中存在例外情况的几乎必然命题，在基本模态逻辑的基础上结合基数的定义提出了基数模态逻辑系统。将例外可以忽略的情况称为“几乎必然”，意为例外的数量并不足够多，但也不确定其是否真的存在例外，因此其严格的必然性只是有可能成立的。

在技术层面，本文给出了基数模态逻辑的语义与公理系统，证明了任何可满足的基数模态公式都能在一个可数的模型上满足。另一方面，从基本模态逻辑典范模型出发，通过定义模型的复制，本文构造出了基数模态逻辑的典范模型，证明了系统的完全性。从语义角度考虑，基数模态逻辑系统借助基数的特殊性，区分了例外是否存在的不同情况，更好地刻画了几乎必然命题。

基数模态逻辑的局限性在于对几乎必然命题的刻画是建立在每个可能世界都是等可能的这一直观上的。以及基数模态逻辑主要针对无穷情况下的模型，对于有穷模型难以发挥很好的作用，并且在基数关系模型中不满足有穷模型性质。因此，未来的工作可以考虑对无穷的可能世界集合进行分割、压缩，从而解决系统可判定性的问题，以及关于基数模态逻辑公式与二阶逻辑之间的翻译问题等等。

参考文献

[1] I. B. Acosta and Y. Venema, 2024, “Counting to infinity: Graded modal logic with an infinity diamond”, *The Review of Symbolic Logic*, **17(1):** 1–35.

[2] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema, 2001, *Modal logic*, New York: Cambridge University Press.

[3] F. Caro, 1988, “Graded modalities, ii (canonical models)”, *Studia Logica*, **47(1):** 1–10.

[4] K. Fine, 1972, “In so many possible worlds”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **13(4):** 516–520.

[5] Y. Kazakov and I. Pratt-Hartmann, 2009, “A note on the complexity of the satisfiability problem for graded modal logics”, *24th Annual IEEE Symposium on Logic In Computer Science*, 407–416.

[6] M. de Rijke, 2000, "A note on graded modal logic", *Studia Logica*, **64(2):** 271–283.

[7] K. Sano and M. Ma, 2010, "Goldblatt-thomason-style theorems for graded modal language", *Advances in Modal Logic*, pp. 330–349.

[8] 文学锋，"模态逻辑教学和教材中易犯的几个错误"，逻辑学研究，2018 年第 4A 期，第 69–86 页。

[9] 徐胜芝，基础实分析，北京：科学出版社，2019 年。

（责任编辑：执子）

A Cardinal Modal Logic for Describing Exceptions

Haoxuan Luo Jiahong Guo✉

Abstract

In this paper, the question we are concerned with is how to formalise almost necessary propositions to which describing the existence of exceptions in reality. In daily communication and scientific research, many propositions formulated in a universal form have exceptions, except that the exceptions can sometimes be ignored. In order to distinguish between universal statements containing different degrees of exceptions, we construct the basic modal operator with the help of the notion of cardinality, which is used to describe the cases where exceptions exist but can be ignored. Based on this operator, we claim that a proposition is almost necessary if and only if there do not exist a sufficient number of exceptions that do not satisfy the proposition. The article then presents a system of cardinal modal logic, proves the countable model property of the system, and uses the replication of the model to construct an exemplary model of the system as a way of illustrating the completeness of the system. It has been thus shown that the cardinal modal logic system for describing exceptions proposed in the paper achieves a relative balance between expressive power expansion and a more accurate portrayal of natural language.

Haoxuan Luo School of phillosophy BNU
3355718300@qq.com

Jiahong Guo✉ School of phillosophy BNU
jiahong.guo@bnu.edu.cn