

基本 Łukasiewicz m -值条件句逻辑

霍书全

摘要: 经典条件句逻辑被广泛地研究过, 近几年, 一些非经典的条件句逻辑也开始出现。多值逻辑承认命题可以取多个真值, 具有容错能力, 其蕴涵词和经典蕴涵词类似, 同样可以刻画条件句, 因此我们也应该有多值逻辑条件句逻辑。本文将基于 Łukasiewicz m -值命题逻辑构建基本条件句逻辑系统 **LCK** 和 **LCK2**, 证明这些系统的可靠性、完全性和有穷模型性质。最后把 **LCK** 推广到无穷值情形。

关键词: 基本条件句逻辑; Łukasiewicz m -值逻辑; 多值模态逻辑; Kripke 语义

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 引言

当代条件句逻辑研究主要是在经典逻辑背景下进行的, 近年来也出现一些非经典逻辑的条件句逻辑, 如 Weiss 和 Ciardelli 等人提出了直觉主义条件句逻辑。([4, 46]) 在多值逻辑背景下研究条件句逻辑也是可能的, 但是至今很少见到此类条件句逻辑, 因此本文把构建多值条件句逻辑作为目标。基本条件句逻辑是当今研究条件句的一种模式, 其条件句不一定能直接对应于实际的条件句, 但可以为大量的条件句提供一个一般架构。有鉴于此, 本文将构造 Łukasiewicz m -值命题逻辑的基本条件句逻辑系统 **LCK** 和 **LCK2**, 并把前者推广到无穷值情形。

多值逻辑和经典逻辑有所不同, 面临许多争议, 存在一些语义和哲学问题, 因此我们需要为之提供一些辩护。命题可以取多个真值吗? 对此逻辑学家和哲学家有大量的争论。([1, 11, 20, 23, 25, 28]) 多值逻辑曾一度被认为是错误的或不必要的。Suszko 论题 (Suszko's Thesis) 认为, 逻辑本质上是二值的, Łukasiewicz 多值逻辑也应如此。其理由是: 逻辑赋值和代数赋值是不同性质的函数, 逻辑值只有两个, 代数值可以有很多, Łukasiewicz 错误地把逻辑值看作代数值, 提出了 3-值逻辑。Suszko 指出, 虽然逻辑值与代数值不同, 但是如果接受弗雷格公理二者可以统一起来, 而 Łukasiewicz 抛弃了弗雷格公理。按照塔尔斯基的后承运算, 我们可

收稿日期: 2024-01-09

作者信息: 霍书全 河南大学哲学与公共管理学院
huosq@126.com

基金项目: 国家社会科学基金重大项目“面向自然语言理解的逻辑构建和符号接地问题的哲学、心理学研究”(18ZDA032)。

以重新把 Łukasiewicz 的 3-值逻辑形式化为二值的推理关系。([40]) 但是, Strollo 证明了多值逻辑与经典逻辑并不能等价, 多值逻辑并不能转化为二值逻辑 ([39])。按照 Suszko 论题, 多值逻辑似乎包含了错误的认知, 但是这并不等于说多值逻辑没有存在的价值。模糊集合论出现之后, 多值逻辑和模糊集合论联系起来, 多值逻辑重新焕发了生机。然而, 哲学家 Haack 和 Williamson 仍然否定多值或模糊逻辑, 认为这些逻辑是不必要的, 甚至认为计算机对模糊现象的处理和多值逻辑没有关系。([13–15, 47])

尽管多值逻辑遭到上述质疑, 但是, 还有另外一些学者认为多值逻辑有其合理性, 并进行了辩护, 这是我们建立多值条件句逻辑的哲学基础。Hájek 和 Novák 证明了多值逻辑可以解决秃头悖论。([17]) Smith 认为多值逻辑至少是处理模糊现象的方法之一。([34, 35]) Marra 认为, 虽然 Łukasiewicz 多值逻辑承认多个甚至无穷个真值, 但是它的定理仍然是经典的重言式。从公式极大一致集的观点看, 多值系统仍然是一致的, 因此只要区别经验的真和先验的真, 就可以看到多值逻辑有其合理性, 就可以对 Łukasiewicz 多值逻辑给出合理的解释。(见 [24]) Łukasiewicz 蕴涵词保持了经典逻辑蕴涵的性质, 也有其合理性。([33]) 但是, 当前件的真值大于后件的真值时, Łukasiewicz 蕴涵可以取多种真值, 这似乎难以解释。然而这些不同的真值可以看作不同的假, 由此可以看到它可以刻画条件句, 并且比经典逻辑蕴涵更为严格。

基于上述理由, 我们完全可以认为 Łukasiewicz 多值逻辑的蕴涵和经典逻辑的蕴涵有类似的作用, 可以表达条件句和推理, 区别在于 Łukasiewicz 蕴涵容许更多的真值。经典的实质蕴涵不足以刻画各种条件句, 同样, 在多值逻辑中如果只有蕴涵词而没有相应的条件句逻辑, 则多值逻辑依然是粗糙的。因此, 我们有必要建立 Łukasiewicz 多值逻辑的条件句逻辑。

发展条件句逻辑要借助于模态逻辑工具。一些文献对多值模态逻辑进行了研究 ([2, 6–8, 19, 26, 27, 31, 41–43]), 但是仍然少有人提出多值条件句逻辑。基于模态逻辑方法, Stalnaker 和 Lewis 提出了条件句逻辑 ([21, 22, 36–38]), Chellas 提出了基本条件句逻辑 ([3]), Weiss 和 Ciardelli 等人研究了直觉主义条件句逻辑 ([4, 46])。Segerberg 把条件句逻辑语义和模态逻辑语义联系起来。([32]) 鉴于这些研究成果, 本文将把经典基本条件句逻辑进行推广, 构建基本 Łukasiewicz 条件句逻辑。

本文内容安排如下: 第 2 节构造条件句逻辑 **LCK**, 给出其 Kripke 语义, 公理系统, 并证明其元逻辑性质和有穷模型性质。第 3 节构造条件句逻辑 **LCK2**, 给出其 Kripke 语义, 公理系统, 并证明其元逻辑性质和有穷模型性质。第 4 节扩充条件句逻辑 **LCK2**, 把 **LCK** 推广到无穷值情形。第 5 节结语, 总结本文工作和提出对未来研究的展望。

2 基本 Łukasiewicz m -值条件句逻辑 LCK

2.1 语言

我们把 Łukasiewicz m -值逻辑的语言记为 $\mathcal{L}$ 。 $\mathcal{L}$ 的构成如下：命题变元的可数集合 Π ，一元联结词 $\neg$ ，二元联结词 $\rightarrow$ 和括号。基本 Łukasiewicz m -值逻辑的语言 $\mathcal{L}_\triangleright$ ，是通过在 $\mathcal{L}$ 中增加表示条件句的二元联结词 $\triangleright$ 而得到。 $\mathcal{L}_\triangleright$ 的公式归纳地定义为：

1. 如果 p 是一个命题变元，则 p 是一个公式；
2. 如果 ϕ 和 ψ 是公式，则 $\neg\phi$ ， $(\phi \rightarrow \psi)$ 和 $(\phi \triangleright \psi)$ 是公式。

我们用 p, q 等或加下标表示命题变元，用 ϕ, ψ 等或加下标表示公式。在不引起混淆时，我们省略公式的括号。 $\mathcal{L}_\triangleright$ 的公式集记为 Φ 。真值的集合 $\{0, \frac{1}{m-1}, \frac{2}{m-1}, \dots, \frac{m-2}{m-1}, 1\}$ 记为 $\mathcal{T}$ ，用 a, b, c 等表示真值。Łukasiewicz m -值命题逻辑记为 $\mathbf{L}$ 。

在 $\mathbf{L}$ 中可以定义其它逻辑联结词 ([5, 27, 29]; [10], 第 109、186、194 页)：

$$\begin{aligned}
 t &=_{df} p \rightarrow p & f &=_{df} \neg(p \rightarrow p) \\
 \neg\phi &=_{df} (\phi \rightarrow f) & \phi \vee \psi &=_{df} ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \\
 \phi \wedge \psi &=_{df} \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) & \phi \oplus \psi &=_{df} \neg\phi \rightarrow \psi \\
 \phi \odot \psi &=_{df} \neg(\phi \rightarrow \neg\psi) & \phi \leftrightarrow \psi &=_{df} (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) \\
 \rightarrow_{i=1}^1 (\phi, \psi) &=_{df} \phi \rightarrow \psi & \rightarrow_{i=1}^k (\phi, \psi) &=_{df} \phi \rightarrow (\rightarrow_{i=1}^{k-1} (\phi, \psi))
 \end{aligned}$$

我们也可以定义逻辑联结词 J_a ， $J_a(\phi)$ 的直观意思是“ ϕ 的真值为 a ”。也可以定义联结词 $I_a : I_a(\phi) =_{df} \bigvee_{a \leq b \leq 1} J_b(\phi)$ 。

2.2 Kripke 语义

我们把 Kripke 模型从经典逻辑推广到多值逻辑。 $\mathbf{L}_\triangleright$ 的 Kripke 模型需要加上关于 $\triangleright$ 的条目。

定义 2.1. Kripke **LCK** 模型是结构 $\mathfrak{M} = \langle W, |\Phi|, \{R_X : X \in |\Phi|\}, v \rangle$ ，使得：

1. W 是世界的非空集合；
2. $|\Phi| \subseteq \wp(W)$ 是命题的集合；
3. R_X 是 $W \times W$ 的子集；
4. v 是从 $\Pi \times W$ 到 $\mathcal{T}$ 的函数。

我们把 $v(\phi, x)$ 记为 $v_x(\phi)$ ，用 $|\phi|$ 表示 $\{x \in W : v_x(\phi) = 1\}$ ，即 ϕ 表示的命题。用 $\sim$ 和 $\rightarrow$ 表示如下定义的函数 ($\forall a, b \in \mathcal{T}$)：

$$\sim a = 1 - a, \quad a \rightarrow b = \min\{1, 1 - a + b\}.$$

给定 Kripke **LCK** 模型 $\mathfrak{M}$, v 通过如下递归的方式被扩充 ($\forall x \in W$):

5. $v_x(\neg\phi) = \sim v_x(\phi)$;
6. $v_x(\phi \rightarrow \psi) = v_x(\phi) \multimap v_x(\psi)$;
7. $v_x(\phi \triangleright \psi) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \forall y(xR_{|\phi|}y \Rightarrow v_y(\psi) = 1) \text{ (或 } = \bigwedge\{v_y(J_1(\psi)) : xR_{|\phi|}y\}) \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$

这里 $\Rightarrow$ 是元逻辑符号。从 **LCK** 的条件句 $\phi \triangleright \psi$ 的语义看, 它只取真、假二值, 因此是嵌入在 Łukasiewicz 多值逻辑中的经典二值条件句。

按照 Kripke **LCK** 模型, 对任意 $v_w(\phi), v_w(\psi) \in \mathcal{T}, w \in W$, 我们有

$$v_w(\phi) \wedge v_w(\psi) = \min\{v_w(\phi), v_w(\psi)\},$$

$$v_w(\phi) \vee v_w(\psi) = \max\{v_w(\phi), v_w(\psi)\},$$

$$v_w(\phi) \oplus v_w(\psi) = \min\{1, v_w(\phi) + v_w(\psi)\},$$

$$v_w(\phi) \odot v_w(\psi) = \max\{0, v_w(\phi) + v_w(\psi) - 1\},$$

$$v_w(J_a(\phi)) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } v_w(\phi) = a \\ 0, & \text{如果 } v_w(\phi) \neq a \end{cases}$$

显然, $\langle \mathcal{T}, \oplus, \sim, 0 \rangle$ 构成了线序 MV_m -代数。

定义 2.2. 令 Σ 是一个公式集, $\mathcal{C}$ 是 Kripke **LCK** 模型的集合, 则 $\Sigma \models_{\mathcal{C}} \phi$ 当且仅当对所有 $\mathfrak{M} \in \mathcal{C}$ 的所有世界 w , 如果对每个 $\psi \in \Sigma$, $v_w(\psi) = 1$, 则 $v_w(\phi) = 1$ 。如果 $\Sigma \models_{\mathcal{C}} \phi$, 则该语义推理 (在 $\mathcal{C}$ 中) 是有效的; 如果 $\Sigma = \emptyset$, 则公式被称为 (在 $\mathcal{C}$ 中) 有效的。把 Kripke **LCK** 模型的类记为 $\mathcal{C}_K^{\mathbf{LCK}}$ 。

给定 **LCK** 模型 $\mathfrak{M} = \langle W, |\Phi|, \{R_X : X \in |\Phi|\}, v \rangle$, 如果对所有 $w \in W, v_w(\phi) = 1$, 我们写作 $\models_{\mathfrak{M}} \phi$ 。在不引起混淆时, 我们省略下标。

定义 2.3. 当 W 有穷时, Kripke **LCK** 模型被称为有穷的。当一个公式集关于一个框架类是可靠的和完全的时, 称该公式集是被这个框架的类决定的。

定义 2.4. 令 Σ 是在子公式下封闭的公式的集合 (特别地, 如果 $\phi \triangleright \psi$ 属于 Σ , 则 ϕ 和 ψ 也属于)。对于模型 $\mathfrak{M} = \langle W, |\Phi|, \{R_X : X \in |\Phi|\}, v \rangle$, 我们定义 W 上的等价关系 $\equiv$ 如下:

$$\begin{aligned} x \equiv y & \text{ 当且仅当 } \text{对每个 } \phi \in \Sigma \text{ 和每个 } a \in \mathcal{T}, v_x(\phi) = a \\ & \text{当且仅当 } v_y(\phi) = a. \end{aligned}$$

用 $[x]$ 表示模型 $\mathfrak{M}$ 中的世界 x 的 $\equiv$ -等价类。 $[X]$ 为 $\{[x] : x \in X \subseteq W\}$ 。 $\mathfrak{M}$ 的通过 Σ 的过滤是 $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, |\Phi|^*, \{R_{X^*}^* : X^* \in |\Phi|^*\}, v^* \rangle$, 其中 $W^* = [W], |\Phi|^* \subseteq \wp(W^*)$ 为命题的集合, $X^* = [X]$, v^* 是从 $\Pi \times W^*$ 到 $\mathcal{T}$ 的函数, $R_{X^*}^*$ 是 $W^* \times W^*$ 的子集。对每个 $X^* \in |\Phi|^*$, $\mathfrak{M}^*$ 满足:

- (a) $v_{[y]}^*(p) = v_y(p)$, 其中 $p \in \Sigma$;
- (b) 如果 $xR_X y$, 则 $[x]R_{X^*}^*[y]$;
- (c) 对每个公式 $\phi \triangleright \psi \in \Sigma$, 如果对每个 $y \in W$, $xR_{|\phi|}y$ 蕴涵 $v_y(\psi) = 1$, 那么对每个 $[y] \in W^*$, $[x]R_{|\phi|^*}^*[y]$ 蕴涵 $v_{[y]}^*(\psi) = 1$ 。

定理 2.1. 令 Σ 是子公式封闭的公式集, $\mathfrak{M}^*$ 是模型 $\mathfrak{M}$ 通过 Σ 的过滤。于是, 对每个 $\phi \in \Sigma$ 和 $\mathfrak{M}$ 中的每个 x :

$$v_x(\phi) = 1 \text{ 当且仅当 } v_{[x]}^*(\phi) = 1。$$

即, 对每个 $\phi \in \Sigma$, $[[\phi]] = |\phi|^*$ 。

证明. 根据归纳证明。只证明 Σ 中的形如 $\phi \triangleright \psi$ 的公式。只需证明:

$$\forall y(xR_{|\phi|}y \Rightarrow v_y(\psi) = 1) \text{ 当且仅当 } \forall [y]([x]R_{|\phi|^*}^*[y] \Rightarrow v_{[y]}^*(\psi) = 1)$$

假定 $\forall y(xR_{|\phi|}y \Rightarrow v_y(\psi) = 1)$ 且 $[x]R_{|\phi|^*}^*[y]$ 。根据过滤的条目 (c), $v_{[y]}^*(\psi) = 1$ 。反之, 假定 $\forall [y]([x]R_{|\phi|^*}^*[y] \Rightarrow v_{[y]}^*(\psi) = 1)$ 。根据条目 (a) 和 (b) 和 $v_{[y]}^*$ 的定义, $\forall y \in W$, 如果 $xR_{|\phi|}y$, 那么 $v_y(\psi) = 1$ 。□

推论 1. 令 Σ 是子公式封闭的公式集, $\mathfrak{M}^*$ 是模型 $\mathfrak{M}$ 通过 Σ 的过滤。于是对每个 $\phi \in \Sigma$:

$$\models_{\mathfrak{M}} \phi \text{ 当且仅当 } \models_{\mathfrak{M}^*} \phi$$

2.3 公理系统 LCK

LCK 是由 Łukasiewicz m -值命题逻辑 **L** 加上特有的条件句公理和规则组成。Rosser 和 Turquette ([29]), Schotch 等人 ([30]), Tokarz ([44]), Grigolia ([12]), Tuziak ([45]) 分别为 Łukasiewicz m -值命题逻辑给出了公理系统。系统 **LCK** 包括 **L** 的公理、代入规则和 (MP) 规则加上如下条件句公理和规则:

$$\text{A1: } (\phi \triangleright (\psi \wedge \theta)) \rightarrow ((\phi \triangleright \psi) \wedge (\phi \triangleright \theta)) \quad (\text{CM})$$

$$\text{A2: } ((\phi \triangleright \psi) \wedge (\phi \triangleright \theta)) \rightarrow (\phi \triangleright (\psi \wedge \theta)) \quad (\text{CC})$$

$$\text{A3: } ((\phi \triangleright \psi) \odot (\phi \triangleright \theta)) \rightarrow (\phi \triangleright (\psi \odot \theta)) \quad (\text{LCC})$$

$$\text{A4: } \phi \triangleright t \quad (\text{CN})$$

$$\text{A5: } \neg(\phi \triangleright \psi) \leftrightarrow J_0(\phi \triangleright \psi)$$

$$\frac{\phi \leftrightarrow \psi}{(\phi \triangleright \theta) \leftrightarrow (\psi \triangleright \theta)} \quad (\text{RCEA})$$

$$\frac{\phi \leftrightarrow \psi}{(\theta \triangleright \phi) \leftrightarrow (\theta \triangleright \psi)} \quad (\text{RCEC})$$

其中 (CM), (CC), (CN), (RCEA) 和 (RCEC) 分别对应于经典条件句逻辑对应的公理和规则。([3]) 公理 A3 是针对 Łukasiewicz 条件句所特有的公理。公理 A5 保证了条件句是二值的。

定义 2.5. $\vdash_{\mathbf{L}} \phi$ (ϕ 是 $\mathbf{L}$ 的一个定理) 当且仅当 $\phi \in \mathbf{L}$ 。 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \phi$ 当且仅当存在一个序列 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 使得 $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi$ 中的公式或者是 $\mathbf{L}$ 的一个定理, 或者是 Γ 的一个元, 或者由从前面公式根据推理规则得到。 $\vdash_{\mathbf{LCK}} \phi$ ($\vdash_{\mathbf{LCK2}} \phi$) 和 $\Gamma \vdash_{\mathbf{LCK}} \phi$ ($\vdash_{\mathbf{LCK2}} \phi$) 类似地定义。

如下命题给出的 $\mathbf{L}$ 的定理将会被直接或间接用到。

命题 2.1. $\mathbf{L}$ 包含如下定理:

- (1) $\vdash_{\mathbf{L}} (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \phi \wedge \psi)$
- (2) $\vdash_{\mathbf{L}} \phi \wedge \psi \rightarrow \phi$
- (3) $\vdash_{\mathbf{L}} (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$
- (4) $\vdash_{\mathbf{L}} (\psi \odot (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow \theta$
- (5) $\vdash_{\mathbf{L}} (\phi \odot \psi \rightarrow \theta) \leftrightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta))$
- (6) $\vdash_{\mathbf{L}} (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$
- (7) $\vdash_{\mathbf{L}} \phi \leftrightarrow \neg \neg \phi$
- (8) $\vdash_{\mathbf{L}} \phi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \phi$
- (9) $\vdash_{\mathbf{L}} (J_a(\phi) \rightarrow (J_a(\phi) \rightarrow \psi)) \rightarrow (J_a(\phi) \rightarrow \psi)$
- (10) $\vdash_{\mathbf{L}} \rightarrow_{i=1}^m (J_{\frac{i-1}{m-1}}(\phi) \rightarrow \psi, \psi)$
- (11) $\vdash_{\mathbf{L}} \rightarrow_{i=1}^{m-1} (\phi, J_1(\phi))$
- (12) $\vdash_{\mathbf{L}} \phi \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi))$
- (13) $\vdash_{\mathbf{L}} J_1(\phi) \rightarrow \phi$
- (14) $\vdash_{\mathbf{L}} J_a(\psi) \rightarrow \neg I_b(\psi)$, 其中 $a < b$
- (15) $\vdash_{\mathbf{L}} J_1(J_a(\psi)) \leftrightarrow J_a(\psi)$
- (16) $\vdash_{\mathbf{L}} (I_a(\phi) \rightarrow (I_a(\phi) \rightarrow \psi)) \rightarrow (I_a(\phi) \rightarrow \psi)$

证明. 略。(参见 [5], 第 88-89 页; [10], 第 109 页, 第 183-185 页; [16], 第 35-46 页, 第 65 页; [30]) □

命题 2.2. $\mathbf{LCK}$ 有如下导出规则:

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{(\theta \triangleright \phi) \rightarrow (\theta \triangleright \psi)} \quad (\text{RCM})$$

证明.

1. $\phi \rightarrow \psi$ ┆
2. $\phi \leftrightarrow \phi \wedge \psi$ 命题2.1(1), 1
3. $(\theta \triangleright \phi) \leftrightarrow (\theta \triangleright (\phi \wedge \psi))$ RCEC, 2
4. $(\theta \triangleright (\phi \wedge \psi)) \rightarrow ((\theta \triangleright \phi) \wedge (\theta \triangleright \psi))$ CM
5. $((\theta \triangleright \phi) \leftrightarrow (\theta \triangleright (\phi \wedge \psi))) \rightarrow ((\theta \triangleright \phi) \rightarrow (\theta \triangleright (\phi \wedge \psi)))$ 命题2.1(2)
6. $(\theta \triangleright \phi) \rightarrow (\theta \triangleright (\phi \wedge \psi))$ MP, 3, 5
7. $(\theta \triangleright \phi) \rightarrow ((\theta \triangleright \phi) \wedge (\theta \triangleright \psi))$ 6, 4
8. $((\theta \triangleright \phi) \wedge (\theta \triangleright \psi)) \rightarrow (\theta \triangleright \psi)$ 命题2.1(2)
9. $(\theta \triangleright \phi) \rightarrow (\theta \triangleright \psi)$ 7, 8, 命题 2.1(3)

□

命题 2.3. LCK 有如下公理:

$$(\phi \triangleright (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \triangleright \psi) \rightarrow (\phi \triangleright \theta)) \quad (\text{CK})$$

证明.

1. $(\psi \odot (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow \theta$ 命题 2.1(4)
2. $(\phi \triangleright (\psi \odot (\psi \rightarrow \theta))) \rightarrow (\phi \triangleright \theta)$ RCM, 1
3. $((\phi \triangleright \psi) \odot (\phi \triangleright (\psi \rightarrow \theta))) \rightarrow (\phi \triangleright (\psi \odot (\psi \rightarrow \theta)))$ A3
4. $((\phi \triangleright \psi) \odot (\phi \triangleright (\psi \rightarrow \theta))) \rightarrow (\phi \triangleright \theta)$ 2, 3, 命题 2.1(3)
5. $(\phi \triangleright (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \triangleright \psi) \rightarrow (\phi \triangleright \theta))$ 命题2.1(5), 4

□

命题 2.4. LCK 有如下导出规则:

$$\frac{\rightarrow_{i=1}^n (\phi_i, \phi)}{\rightarrow_{i=1}^n (\psi \triangleright \phi_i, \psi \triangleright \phi)} \quad (\text{RCK})$$

证明. 对 n 实施归纳. 当 $n = 0, 1$ 时, 分别是 A4 和 (RCM). 假定 $n = k$ 时结果成立, 证明当 $n = k + 1$ 时结果成立.

1. $(\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\dots (\phi_k \rightarrow (\phi_{k+1} \rightarrow \phi)) \dots)))$ ┆
2. $(\psi \triangleright \phi_1 \rightarrow (\psi \triangleright \phi_2 \rightarrow (\dots (\psi \triangleright \phi_k \rightarrow \psi \triangleright (\phi_{k+1} \rightarrow \phi)) \dots)))$ RCK, 1
3. $(\psi \triangleright (\phi_{k+1} \rightarrow \phi)) \rightarrow (\psi \triangleright \phi_{k+1} \rightarrow \psi \triangleright \phi)$ CK
4. $(\psi \triangleright \phi_k \rightarrow \psi \triangleright (\phi_{k+1} \rightarrow \phi)) \rightarrow (\psi \triangleright \phi_k \rightarrow (\psi \triangleright \phi_{k+1} \rightarrow \psi \triangleright \phi))$ 命题2.1(3), 3
5. $(\psi \triangleright \phi_1 \rightarrow (\psi \triangleright \phi_2 \rightarrow (\dots (\psi \triangleright \phi_k \rightarrow \psi \triangleright (\phi_{k+1} \rightarrow \phi)) \dots)))$
 $\rightarrow (\psi \triangleright \phi_1 \rightarrow (\psi \triangleright \phi_2 \rightarrow (\dots (\psi \triangleright \phi_k \rightarrow (\psi \triangleright \phi_{k+1} \rightarrow \psi \triangleright \phi)) \dots)))$ 4, $\mathbf{L}$
6. $(\psi \triangleright \phi_1 \rightarrow (\psi \triangleright \phi_2 \rightarrow (\dots (\psi \triangleright \phi_k \rightarrow (\psi \triangleright \phi_{k+1} \rightarrow \psi \triangleright \phi)) \dots)))$ 2, 5, MP

□

当 $n = 2$ 时, (RCK) 记为 (RCR)。一个条件句逻辑是经典的 (*classical*) 当且仅当它在规则 (RCEA) 和 (RCEC) 下封闭。一个条件句逻辑是单调的 (*monotonic*) 当且仅当它在规则 (RCEA) 和 (RCM) 下封闭, 或者包含规则 (RCEA) 和 (RCEC) 和公理 (CM)。一个条件句逻辑是正则的 (*regular*) 当且仅当它在规则 (RCEA) 和 (RCR) 下封闭, 或者它是单调的且包含 (CC)。一个条件句逻辑是正规的 (*normal*) 当且仅当它在规则 (RCEA) 和 (RCK) 下封闭, 或者它是正则的且包含 (CN)。([3]) 一个经典的条件句逻辑也被称为基本的 (*basic*)。一个正规的条件句逻辑也被称为关系的 (*relational*)。 ([32]) Chellas 和 Weiss 分别给出了正规的经典条件句逻辑和正规的直觉主义条件句逻辑, 他们分别称之为基本条件句逻辑和基本直觉主义条件句逻辑。([3, 46])

定义 2.6. 称 $\mathbf{L}$ 的公式集合 Γ 是句法 (不) 一致的, 如果不存在 (存在) $\mathbf{L}$ 的公式 ϕ , 使得 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \phi$ 并且 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \neg \phi$ 。 Γ 是极大一致的, 如果 (i) Γ 是句法一致的, 并且 (ii) 对 $\mathbf{L}$ 的任何公式 ϕ , $\phi \in \Gamma$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \phi$ 。

命题 2.5. 对 $\mathbf{L}$ 的任何公式集 Γ , 我们有

- (1) 如果 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \phi$, 那么对 Γ 的任何超集 Γ' , $\Gamma' \vdash_{\mathbf{L}} \phi$ 。
- (2) 如果 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \phi$, 那么存在 Γ 的一个有穷集合 Γ' 使得 $\Gamma' \vdash_{\mathbf{L}} \phi$ 。
- (3) 如果 ϕ 属于 Γ , 那么 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \phi$ 。
- (4) 如果 $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash_{\mathbf{L}} \psi$, 那么 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \rightarrow_{i=1}^{m-1} (\phi, \psi)$ 。
- (5) 如果 Γ 是句法不一致的, 那么对每个公式 ϕ , $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \phi$ 。
- (6) Γ 是句法不一致的当且仅当 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} f$ 。
- (7) 如果 $\Gamma \cup \{\phi\}$ 是句法不一致的, 那么 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \neg J_1(\phi)$ 。
- (8) 如果 $\Gamma \cup \{\neg J_1(\phi)\}$ 是句法不一致的, 那么 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \phi$ 。
- (9) 如果 $J_a(\phi)$ 和 $J_b(\phi) (b \neq a)$ 属于 Γ , 那么 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} f$ 并且 Γ 是不一致的。

证明. 略。(参见 [9, 30, 31]) □

定义 2.7. $\mathbf{LCK}$ 的公式的集合 Γ 是语义一致的, 如果存在 Kripke $\mathbf{LCK}$ 模型 $\mathfrak{M} = \langle W, |\Phi|, \{R_X : X \in |\Phi|\}, v \rangle$ 使得 Γ 的所有元素在真值指派 v 下赋值为 1。

定义2.6, 命题2.5和定义2.7也应用于本文的其它逻辑系统。

2.4 可靠性

下面证明 $\mathbf{LCK}$ 关于 $\mathcal{C}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{LCK}}$ 是可靠的。

定理 2.2 (可靠性). $\Gamma \vdash_{\mathbf{LCK}} \phi$ 蕴涵 $\Gamma \models_{\mathcal{C}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{LCK}}} \phi$ 。

证明. 需要证明公理是有效的且规则是保持有效的。我们只证明包含条件句的公理和规则的有效性。

按照条件句联结词 $\triangleright$, 我们取 Kripke **LCK** 模型 $\mathfrak{M}$ 的任意世界 x, y 证明 A1-A5 是有效的, (RCEA) 和 (RCEC) 是保持有效的。

如果 $v_x(\phi \triangleright (\psi \wedge \theta)) = 1$, 则 $\forall y(xR_{|\phi|}y \Rightarrow v_y(\psi \wedge \theta) = 1)$ 。因 $v_y(\psi \wedge \theta) = v_y(\psi) \wedge v_y(\theta)$, 所以 $\forall y(xR_{|\phi|}y \Rightarrow v_y(\psi) \wedge v_y(\theta) = 1)$ 。因此, $v_y(\phi \triangleright \psi) \wedge v_y(\phi \triangleright \theta) = 1$ 。如果 $v_x((\phi \triangleright \psi) \wedge (\phi \triangleright \theta)) = 1$, 我们有 $\forall y(xR_{|\phi|}y \Rightarrow v_y(\psi) \wedge v_y(\theta) = 1)$, 于是 $\forall y(xR_{|\phi|}y \Rightarrow v_y(\psi \wedge \theta) = 1)$ 。 $v_x(\phi \triangleright \psi)$ 只取 0 和 1 为值。所以, A1 和 A2 取特指值 1。

如果 $v_x((\phi \triangleright \psi) \odot (\phi \triangleright \theta)) = 1$, 则对任何使得 $xR_{|\phi|}y$ 的 y , $v_y(\psi) = v_y(\theta) = 1$ 。所以 $v_y(\psi) \odot v_y(\theta) = v_y(\psi \odot \theta) = 1$ 。所以, $v_x(\phi \triangleright (\psi \odot \theta)) = 1$, A3 有效。

因 $\forall y(xR_{|\phi|}y \Rightarrow v_y(t) = 1)$, 所以 (CN) 有效。

如果 $v_x(\neg(\phi \triangleright \psi)) = 1$, 则 $v_x(\phi \triangleright \psi) = 0$, $v_x(J_0(\phi \triangleright \psi)) = 1$ 。因为 $v_x(\phi \triangleright \psi)$ 只取 0 或 1 为值, 所以 A5 有效。

如果 $\forall x \in W, v_x(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$, 则 $v_x(\phi) = v_x(\psi)$ 。因此 $xR_{|\phi|}y = xR_{|\psi|}y$, $\forall y(xR_{|\phi|}y \Rightarrow v_y(\theta) = 1)$ 当且仅当 $\forall y(xR_{|\psi|}y \Rightarrow v_y(\theta) = 1)$ 。所以 $v_x((\phi \triangleright \theta) \leftrightarrow (\psi \triangleright \theta))$, (RCEA) 保持有效性。

类似地, (RCEC) 的可靠性易证。 $\square$

2.5 完全性

我们将证明 **LCK** 关于 $\mathcal{C}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{LCK}}$ 是完全的。首先构造典型模型。我们按照通常方法构造公式的极大一致集合。([9])

命题 2.6. 对任何公式 ϕ , 在公式的任何极大一致集合 Δ 中恰好存在一个 $a \in \mathcal{T}$ 使得 $J_a(\phi) \in \Delta$ 。如果 $\phi \in \Delta$, 则有 $J_1(\phi) \in \Delta$ 。

证明. 如果 $\forall a \in \mathcal{T}, J_a(\phi) \notin \Delta$, 根据 Δ 的极大一致性, $\Delta \cup \{J_a(\phi)\}$ 是句法不一致的。根据命题 2.5 (6), $\Delta \cup \{J_a(\phi)\} \vdash_{\mathbf{L}} f$ 。根据命题 2.5 (4), $\vdash_{\mathbf{L}} \bigwedge_{i=1}^{m-1} (J_a(\phi), f)$ 。重复应用命题 2.1(9) 和 (MP), 我们得到 $\Delta \vdash_{\mathbf{L}} J_a(\phi) \rightarrow f$ 。根据命题 2.1(10) 和 (MP), $\Delta \vdash_{\mathbf{L}} f$, 矛盾。所以至少存在某 $b \in \mathcal{T}$, $J_b(\phi) \in \Delta$ 。根据命题 2.5 (9), 恰好存在一个 $b \in \mathcal{T}$ 使得 $J_b(\phi) \in \Delta$ 。

假定 $\phi \in \Delta$, 根据命题 2.1(11) 有 $J_1(\phi) \in \Delta$ 。 $\square$

命题 2.7. 给定公式的集合 Γ 和公式 ϕ , 如果 $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{L}} \phi$, 那么存在一个极大一致集 Δ 使得 $\Gamma \subseteq \Delta$ 并且 $\phi \notin \Delta$ 。

证明. 假定命题不成立, 则对每个使得 $\Gamma \subseteq \Delta$ 并且 $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{L}} \phi$ 的极大一致集 $\Delta, \phi \in \Delta$ 。根据命题 2.5 (8), $\Gamma \cup \{\neg J_1(\phi)\}$ 是句法一致的。按照极大一致集的构造, 存在 Δ' 使得 $\neg J_1(\phi) \in \Delta'$ 。根据命题 2.6, 存在一个 $1 \neq a \in \mathcal{T}$ 使得 $J_a(\phi) \in \Delta'$ 。如果 $\phi \in \Delta'$, 则根据命题 2.6, $J_1(\phi) \in \Delta'$, (或者根据 $\{\phi, \neg J_1(\phi)\} \vdash_{\mathbf{L}} f$) 矛盾。 $\square$

定义 2.8. $/\phi/ = \{\Gamma : \Gamma \text{ 是公式的极大一致集合}, \phi \in \Gamma\}$ 。

定义 2.9. $\mathbf{LCK}$ 的典型模型是结构 $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, |\Phi|^c, \{R_X^c : X \in |\Phi|^c \subseteq \wp(W^c)\}, V \rangle$ 定义如下:

1. $W^c = \{\Gamma : \Gamma \text{ 是公式的极大一致集合}\}$;
2. 对任何 $x, y \in W^c$, $xR_{/\phi/}^c/y$ 当且仅当 $\{\theta : (\phi \triangleright \theta) \in x\} \subseteq y$, 其中, $/\phi/ \in |\Phi|^c$
3. 对 $x \in W^c$, $V_x(p) = a$ 当且仅当 $J_a(p) \in x$ 。

引理 2.3. $\mathbf{LCK}$ 的典型模型 $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, |\Phi|^c, \{R_X^c : X \in |\Phi|^c\}, V \rangle$ 是定义明确的 Kripke $\mathbf{LCK}$ 模型。

证明. 需要证明两条: 定义 2.9 中的 $R_{/\phi/}^c$ 是定义明确的, 典型模型满足定义 2.1 中的条件。

首先, 假定 $/\phi/ = /\psi/$ 。根据命题 2.6, $/\phi/ = /J_1(\phi)/$, $/\psi/ = /J_1(\psi)/$ 。因此 $\vdash_{\mathbf{LCK}} J_1(\phi) \leftrightarrow J_1(\psi)$ 。若不然, 根据命题 2.1 (12) 或者 $\not\vdash_{\mathbf{LCK}} J_1(\phi) \rightarrow J_1(\psi)$ 或者 $\not\vdash_{\mathbf{LCK}} J_1(\psi) \rightarrow J_1(\phi)$ 。如果是前者, 则 $J_1(\phi) \not\vdash_{\mathbf{LCK}} J_1(\psi)$ 。(因为如果 $J_1(\phi) \vdash_{\mathbf{LCK}} J_1(\psi)$, 则根据命题 2.5 (4), $\vdash_{\mathbf{LCK}} \rightarrow_{i=1}^{m-1} (J_1(\phi), J_1(\psi))$ 。根据命题 2.1(9), $\vdash_{\mathbf{LCK}} J_1(\phi) \rightarrow J_1(\psi)$, 矛盾。) 根据命题 2.7, 存在一个极大一致集合 Δ 使得 $J_1(\phi) \in \Delta$ 并且 $J_1(\psi) \notin \Delta$, 矛盾。如果是后者, 类似。根据 $\vdash_{\mathbf{LCK}} J_1(\phi) \leftrightarrow J_1(\psi)$ 和 (RCEA), 我们有 $\forall \theta \in \Phi, \vdash_{\mathbf{LCK}} (J_1(\phi) \triangleright \theta) \leftrightarrow (J_1(\psi) \triangleright \theta)$ 。对每个 $x \in W^c$, 既然 x 是极大一致集合, $J_1(\phi) \triangleright \theta \in x$ 当且仅当 $J_1(\psi) \triangleright \theta \in x$ 。根据定义 2.9 和命题 2.6, 对每个 $y \in W^c$, $\{\theta : J_1(\phi) \triangleright \theta \in x\} \subseteq y$ 当且仅当 $\{\theta : J_1(\psi) \triangleright \theta \in x\} \subseteq y$, 即, $xR_{/\phi/}^c/y$ 当且仅当 $xR_{/\psi/}^c/y$ 。因此, $R_{/\phi/}^c = R_{/\psi/}^c$, 其中 $/\phi/ = /J_1(\phi)/$, $/\psi/ = /J_1(\psi)/$ 。

其次, 注意到 W^c 非空。如果 $J_a(p) \in x$, 则 $V_x(J_a(p)) = 1$, $V_x(p) = a$ 。根据命题 2.6, 不存在 $b \in \mathcal{T}$ 使得 $J_b(p) \in x$, $b \neq a$ 。所以, 最多存在一个 $a \in \mathcal{T}$ 使得 $V_x(p) = a$, V_x 是一个函数。 $\square$

引理 2.4 (真值引理). 如果 $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, |\Phi|^c, \{R_X^c : X \in |\Phi|^c\}, V \rangle$ 是 $\mathbf{LCK}$ 的典型模型, 那么对所有 $\phi \in \Phi$ 和 $x \in W^c$: $V_x(\phi) = a$ 当且仅当 $J_a(\phi) \in x$ 。

证明. 事实上我们只需证明: 对所有 $\phi \in \Phi$ 和所有 $x \in W^c$, 如果 $J_a(\phi) \in x$, 则 $V_x(\phi) = a$ 。关于另一个方向的证明: 如果 $V_x(\phi) = a$ 并且 $J_a(\phi) \notin x$, 根据命题 2.6, 对某 $b \neq a$, $J_b(\phi) \in x$ 。根据第一个方向我们有 $V_x(\phi) = b$ 。但是根据引理 2.3, V_x

是一个函数, 矛盾。我们只考察 ϕ 形如 $\theta \triangleright \chi$ 的情形, 归纳假设是引理对 θ 和 χ 成立。分两种情形证明。

情形 1: 假定 $V_x(\theta \triangleright \chi) \neq 1$ 。据此和定义 2.1 的条目 7, $\exists y(xR_{\theta/\theta}^c y \& V_y(\chi) \neq 1)$ 。根据归纳假设 $\exists y(xR_{\theta/\theta}^c y \& \chi \notin y)$ 。根据定义 2.9 对 $R_{\theta/\theta}^c$ 的定义, 我们有 $\theta \triangleright \chi \notin x$ 。根据命题 2.1 (13), $J_1(\theta \triangleright \chi) \notin x$ 。因此, 如果 $J_1(\theta \triangleright \chi) \in x$, 则 $V_x(\theta \triangleright \chi) = 1$ 。

情形 2: 假定 $V_x(\theta \triangleright \chi) \neq 0$ 。据此和定义 2.1 的条目 7, $\forall y \in W^c(xR_{\theta/\theta}^c y \Rightarrow V_y(\chi) = 1)$ 。根据归纳假设, $\forall y \in W^c(xR_{\theta/\theta}^c y \Rightarrow J_1(\chi) \in y)$ 。我们现在证明 $J_0(\theta \triangleright \chi) \in x \Rightarrow \exists y(xR_{\theta/\theta}^c y \& J_1(\chi) \notin y)$ 。假定 $J_0(\theta \triangleright \chi) \in x$, 则 $\{\gamma : \theta \triangleright \gamma \in x\} \cup \{\neg J_1(\chi)\}$ 是句法一致的。这根据如下证明得到: 如果 $\{\gamma : \theta \triangleright \gamma \in x\} \cup \{\neg J_1(\chi)\}$ 是句法不一致的, 则根据命题 2.5 (9), $\{\gamma : x \vdash_{\mathbf{LCK}} \theta \triangleright \gamma\} \vdash_{\mathbf{LCK}} \chi$ 。根据命题 2.5 (2), $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \vdash_{\mathbf{LCK}} \chi$, 其中 $\gamma_k \in \{\gamma : x \vdash_{\mathbf{LCK}} \theta \triangleright \gamma\}$, $1 \leq k \leq n$ 。于是根据命题 2.5 (4), $\vdash_{\mathbf{LCK}} \rightarrow_{i=1}^{m-1} (\gamma_1, \rightarrow_{i=1}^{m-1} (\dots (\rightarrow_{i=1}^{m-1} (\gamma_n, \chi)) \dots))$ 。应用 (RCK), 我们有 $\vdash_{\mathbf{LCK}} \rightarrow_{i=1}^{m-1} (\theta \triangleright \gamma_1, \rightarrow_{i=1}^{m-1} (\dots (\rightarrow_{i=1}^{m-1} (\theta \triangleright \gamma_n, \theta \triangleright \chi)) \dots))$ 。既然 $x \vdash_{\mathbf{LCK}} \theta \triangleright \gamma_k$, 反复根据 (MP) 我们得到 $x \vdash_{\mathbf{LCK}} \theta \triangleright \chi$ 。根据 A5, $x \vdash_{\mathbf{LCK}} \neg J_0(\theta \triangleright \chi)$, 这和 x 的一致性矛盾。因此, $\{\gamma : x \vdash_{\mathbf{LCK}} \theta \triangleright \gamma\} \cup \{\neg J_1(\chi)\}$ 是一致的并且可以扩充为极大一致集 y' , $xR_{\theta/\theta}^c y'$ 并且 $J_1(\chi) \notin y'$ 。所以, 如果 $J_0(\theta \triangleright \chi) \in x$, $V_x(\theta \triangleright \chi) = 0$ 。□

定理 2.5 (完全性). 如果 $\Gamma \models_{\mathcal{C}_K^{\mathbf{LCK}}} \phi$, 则 $\Gamma \vdash_{\mathbf{LCK}} \phi$ 。

证明. 假定 $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{LCK}} \phi$ 。根据命题 2.7, 存在公式的极大一致集 x , 使得 $\Gamma \subseteq x$ 并且 $\phi \notin x$ 。根据命题 2.6, 对某 $1 \neq a \in \mathcal{T}$, $J_a(\phi) \in x$ 。根据引理 2.4, 对所有 $\psi \in \Gamma$, $V_x(\psi) = 1$, 但是 $V_x(\phi) = a$ 。所以, 根据引理 2.3, $\Gamma \not\models_{\mathcal{C}_K^{\mathbf{LCK}}} \phi$ 。□

2.6 可判定性

首先证明 **LCK** 的有穷模型性质, 可判定性是其推论。

定理 2.6. (有穷模型性质) 如果 $\not\vdash_{\mathbf{LCK}} \phi$, 则存在一个有穷的 *Kripke LCK* 模型 $\mathfrak{M}^\Gamma = \langle W^\Gamma, |\Phi|^\Gamma, \{R_{X^\Gamma}^\Gamma : X^\Gamma \in |\Phi|^\Gamma\}, v^\Gamma \rangle$ 使得 $\not\models_{\mathfrak{M}^\Gamma} \phi$ 。

证明. 假定 $\not\vdash_{\mathbf{LCK}} \phi$ 。根据定理 2.5, $\not\models_{\mathcal{C}_K^{\mathbf{LCK}}} \phi$ 。于是, 存在典型模型 $\mathfrak{M} = \langle W, |\Phi|, \{R_X : X \in |\Phi|, v \rangle$ 使得 $\not\models_{\mathfrak{M}} \phi$ 。令 Γ 包含 ϕ 且在子公式下封闭, 并且 Γ 是有穷的。令 $\mathfrak{M}^\Gamma = \langle W^\Gamma, |\Phi|^\Gamma, \{R_{X^\Gamma}^\Gamma : X^\Gamma \in |\Phi|^\Gamma\}, V^\Gamma \rangle$ 是 $\mathfrak{M}$ 的通过 Γ 的过滤。根据定理 2.1 和推论 1, 对 $x \in W$ 和 $[x] \in W^\Gamma$, $V_x(\phi) = V_{[x]}^\Gamma(\phi)$, 所以 $\not\models_{\mathfrak{M}^\Gamma} \phi$ 。显然 $\mathfrak{M}^\Gamma$ 是有穷的。□

推论 2. LCK 是可判定的。

证明. 根据定理 2.6, **LCK** 有有穷模型性质。此外, 它可以通过有穷个公理公理化。所以 **LCK** 是可判定的。□

3 基本 Łukasiewicz m -值条件句逻辑 LCK2

在第 2 节, 我们构造的条件句 $\phi \triangleright \psi$ 是二值的。现在我们构造多值的条件句, 其逻辑系统记为 **LCK2**。

3.1 Kripke 语义和公理系统

Kripke **LCK2** 模型和 **LCK** 模型一样, 除了关于条件句的条目 7 替换为:

$$7'. v_x(\phi \triangleright \psi) = \bigwedge \{v_y(\psi) : xR_{|\phi|}y\}$$

LCK2 包括公理系统 **L** 和公理 A1-A4, **LCK** 的所有规则以及公理:

$$A6. J_a(\phi \triangleright \psi) \rightarrow (\phi \triangleright I_a(\psi))$$

$$A7. (\phi \triangleright \neg J_a(\psi)) \rightarrow \neg J_a(\phi \triangleright \psi)$$

容易证明公理 A5 在 **LCK2** 中不是有效的。

3.2 可靠性

LCK2 关于模型的类 $\mathcal{C}_K^{\mathbf{LCK2}}$ 是可靠的。

定理 3.1 (可靠性). 如果 $\Gamma \vdash_{\mathbf{LCK2}} \phi$, 则 $\Gamma \models_{\mathcal{C}_K^{\mathbf{LCK2}}} \phi$ 。

证明. 我们只考查包含 $\triangleright$ 的公理和规则。取 **LCK2** 的模型 $\mathfrak{M}$, 世界 x 。

因为

$$\begin{aligned} v_x(\phi \triangleright (\psi \wedge \theta)) &= \bigwedge \{v_y(\psi \wedge \theta) : xR_{|\phi|}y\} \\ &= \bigwedge \{v_y(\psi) : xR_{|\phi|}y\} \wedge \bigwedge \{v_y(\theta) : xR_{|\phi|}y\} = v_x((\phi \triangleright \psi) \wedge (\phi \triangleright \theta)) \end{aligned}$$

所以 A1 和 A2 只取特指值 1。

$$\begin{aligned} v_x((\phi \triangleright \psi) \odot (\phi \triangleright \theta)) &= \bigwedge \{v_y(\psi) : xR_{|\phi|}y\} \odot \bigwedge \{v_y(\theta) : xR_{|\phi|}y\} \\ &\leq \bigwedge \{v_y(\psi \odot \theta) : xR_{|\phi|}y\} = v_x(\phi \triangleright (\psi \odot \theta)) \end{aligned}$$

因此 A3 是有效的。

因为 $v_x(\phi \triangleright t) = \bigwedge \{v_y(t) : xR_{|\phi|}y\} = 1$, 所以 A4 有效。

如果 $v_x(J_a(\phi \triangleright \psi)) = 1$, 则 $v_x(\phi \triangleright \psi) = \bigwedge \{v_y(\psi) : xR_{|\phi|}y\} = a$ 。所以 $v_x(\phi \triangleright I_a(\psi)) = 1$ 。 $J_a(\phi \triangleright \psi)$ 只取 0 或 1。所以, A6 有效。

如果 $v_x(\neg J_a(\phi \triangleright \psi)) = 0$, 则 $v_x(J_a(\phi \triangleright \psi)) = 1$, $v_x(\phi \triangleright \psi) = \bigwedge \{v_y(\psi) : xR_{|\phi|}y\} = a$ 。所以 $v_x(\phi \triangleright \neg J_a(\psi)) = 0$ 。因 $\neg J_a(\phi \triangleright \psi)$ 只取 0 或 1, 所以 A7 有效。

如果 $\phi \leftrightarrow \psi$ 有效, 则对 Kripke **LCK2** 模型 $\mathfrak{M}$ 的任何世界 x , $v_x(\phi) = v_x(\psi)$ 。所以 $|\phi| = |\psi|$ 并且 $xR_{|\phi|}y = xR_{|\psi|}y$, 因此 $v_x(\phi \triangleright \theta) = \bigwedge \{v_y(\theta) : xR_{|\phi|}y\} =$

$\bigwedge \{v_y(\theta) : xR_{|\psi|}y\} = v_x(\psi \triangleright \theta)$ 。所以, $v_x((\phi \triangleright \theta) \leftrightarrow (\psi \triangleright \theta)) = 1$, (RCEA) 是可靠的。类似地, 我们容易证明 (RCEC) 是可靠的。□

在 **LCK2** 中, (CK), (RCM) 和 (RCK) 也是有效的。

3.3 完全性

首先构造典型模型。**LCK2** 的典型模型定义与 **LCK** 的相同, 仍然采用定义 2.9, 它是定义明确的。我们也可以给出如下另一个典型模型的定义, 它与定义 2.9 是等价的。

定义 3.1. **LCK2** 的典型模型是结构 $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, |\Phi|^c, \{R_X^c : X \in |\Phi|^c \subseteq \wp(W^c)\}, V \rangle$ 定义如下:

1. $W^c = \{\Gamma : \Gamma \text{ 是公式的极大一致集}\}$;
2. 如任意 $x, y \in W^c$, $xR_{\phi/y}^c y$ 当且仅当 $\{I_a(\psi) : J_a(\phi \triangleright \psi) \in x, a \in \mathcal{T}\} \subseteq y$;
3. 对任意的 $x \in W^c$, $V_x(p) = a$ 当且仅当 $J_a(p) \in x$ 。

定义 3.1 是定义明确的, 其证明类似于引理 2.3, 在此省略。

命题 3.1. 定义 3.1 和定义 2.9 中的如下条件 (1) 和 (2) 是等价的:

- (1) $\{I_a(\psi) : J_a(\phi \triangleright \psi) \in x, a \in \mathcal{T}\} \subseteq y$;
- (2) $\{\psi : \phi \triangleright \psi \in x\} \subseteq y$ 。

证明. 假定 (1) 成立。如果 $\phi \triangleright \psi \in x$, 则根据命题 2.6, $J_1(\phi \triangleright \psi) \in x$, $J_1(\psi) = I_1(\psi) \in y$ 。根据命题 2.1(13), $\psi \in y$, 即 $\{\psi : \phi \triangleright \psi \in x\} \subseteq y$ 。

假定 (2) 成立。如果 $J_a(\phi \triangleright \psi) \in x$, 根据 A6, $\phi \triangleright I_a(\psi) \in x$, $I_a(\psi) \in y$, 即 $\{I_a(\psi) : J_a(\phi \triangleright \psi) \in x, a \in \mathcal{T}\} \subseteq y$ 。□

根据命题 3.1, 定义 2.9 和定义 3.1 是等价的。

引理 3.2 (真值引理). 如果 $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, |\Phi|^c, \{R_X^c : X \in |\Phi|^c\}, V \rangle$ 是 **LCK2** 的典型模型, 则对所有的 $\phi \in \Phi$ 和所有的 $w \in W^c$, $V_x(\phi) = a$ 当且仅当 $J_a(\phi) \in x$ 。

证明. 根据与引理 2.4 同样的理由, 只证明: 对所有 $\phi \in \Phi$ 和 $x \in W^c$, 如果 $J_a(\phi) \in x$, 则 $V_x(\phi) = a$ 。我们只考查 ϕ 为形如 $\theta \triangleright \gamma$ 的情形。

假定 $V_x(\theta \triangleright \gamma) \neq a (a \in \mathcal{T})$ 。由此和 Kripke 模型定义之条目 7', $\exists y \in W^c (xR_{\theta/y}^c y \& V_y(\gamma) < a)$ 或者 $\forall y \in W^c (xR_{\theta/y}^c y \Rightarrow V_y(\gamma) \neq a)$ 。根据归纳假设和命题 2.6, $\exists y \in W^c (xR_{\theta/y}^c y$ 并且对某个 $b < a$, 有 $J_b(\gamma) \in y)$ 或者 $\forall y \in W^c (xR_{\theta/y}^c y \Rightarrow J_a(\gamma) \notin y)$ 。假定前者, 则根据命题 2.1(14) 有, $\neg I_a(\gamma) \in y$ 。根据 y 的极大一致性, $I_a(\gamma) \notin y$ 。再根据 $R_{\theta/y}^c$ 的定义 3.1, $J_a(\theta \triangleright \gamma) \notin x$ 。

我们还需要证明：如果 $\forall y(xR_{\theta/y}^c y \Rightarrow J_a(\gamma) \notin y)$ ，那么 $J_a(\theta \triangleright \gamma) \notin x$ ，即 $J_a(\theta \triangleright \gamma) \in x \Rightarrow \exists y(xR_{\theta/y}^c y \& J_a(\gamma) \in y)$ 。假定 $J_a(\theta \triangleright \gamma) \in x$ ，那么可以证明 $\{I_b(\chi) : J_b(\theta \triangleright \chi) \in x, \text{ 对每个 } b \in \mathcal{T}\} \cup \{J_a(\gamma)\}$ 是句法一致的。证明如下：

如果 $\{I_b(\chi) : J_b(\theta \triangleright \chi) \in x, \text{ 对每个 } b \in \mathcal{T}\} \cup \{J_a(\gamma)\}$ 是句法不一致的，则根据命题 2.5 (7) 有 $\{I_b(\chi) : J_b(\theta \triangleright \chi) \in x, \text{ 对每个 } b \in \mathcal{T}\} \vdash_{\mathbf{LCK2}} \neg J_1(J_a(\gamma))$ 。根据命题 2.1(15)， $\{I_b(\chi) : J_b(\theta \triangleright \chi) \in x, \text{ 对每个 } b \in \mathcal{T}\} \vdash_{\mathbf{LCK2}} \neg J_a(\gamma)$ 。根据命题 2.5 (2)， $\{I_{b_1}(\chi_1), I_{b_2}(\chi_2), \dots, I_{b_n}(\chi_n)\} \vdash_{\mathbf{LCK2}} \neg J_a(\gamma)$ ，其中 $I_{b_k}(\chi_k) \in \{I_b(\chi) : x \vdash_{\mathbf{LCK2}} J_b(\theta \triangleright \chi), \text{ 对每个 } b \in \mathcal{T}\}$ ， $1 \leq k \leq n$ 。根据命题 2.5 (4)， $\{I_{b_1}(\chi_1), I_{b_2}(\chi_2), \dots, I_{b_{n-1}}(\chi_{n-1})\} \vdash_{\mathbf{LCK2}} \xrightarrow{m-1}_{i=1} (I_{b_n}(\chi_n), \neg J_a(\gamma))$ 。根据命题 2.1 (16)， $\{I_{b_1}(\chi_1), I_{b_2}(\chi_2), \dots, I_{b_{n-1}}(\chi_{n-1})\} \vdash_{\mathbf{LCK2}} (I_{b_n}(\chi_n) \rightarrow \neg J_a(\gamma))$ 。反复应用命题 2.5 (4) 和命题 2.1(16)，我们得 $\vdash_{\mathbf{LCK2}} (I_{b_1}(\chi_1) \rightarrow (\dots (\rightarrow (I_{b_n}(\chi_n) \rightarrow \neg J_a(\gamma))) \dots))$ 。根据 (RCK)， $\vdash_{\mathbf{LCK2}} \theta \triangleright I_{b_1}(\chi_1) \rightarrow (\dots (\rightarrow (\theta \triangleright I_{b_n}(\chi_n) \rightarrow \theta \triangleright \neg J_a(\gamma))) \dots)$ 。既然 $x \vdash_{\mathbf{LCK2}} J_{b_k}(\theta \triangleright \chi_k)$ ，根据 A6 有 $x \vdash_{\mathbf{LCK2}} \theta \triangleright I_{b_k}(\chi_k)$ 。根据 (MP)， $x \vdash_{\mathbf{LCK2}} \theta \triangleright \neg J_a(\gamma)$ 。由 A7 和 (MP)， $x \vdash_{\mathbf{LCK2}} \neg J_a(\theta \triangleright \gamma)$ ，这和 x 的一致性矛盾。因此， $\{I_b(\chi) : x \vdash_{\mathbf{LCK2}} J_b(\theta \triangleright \chi), \text{ 对每个 } b \in \mathcal{T}\} \cup \{J_a(\gamma)\}$ 是一致的并且可以扩充为一个极大一致集 y' ， $xR_{\theta/y'}^c y'$ 且 $J_a(\gamma) \in y'$ 。□

上面的证明依赖于定义 2.9。我们也可以根据定义 3.1 给出上面的证明。

定理 3.3 (完全性). 如果 $\Gamma \vdash_{\mathbf{LCK2}} \phi$ ，则 $\Gamma \vdash_{\mathbf{LCK2}} \phi$ 。

证明. 根据命题 2.7，命题 2.6，引理 3.2 和引理 2.3，易证。□

3.4 可判定性

LCK2 的有穷模型性质和 **LCK** 的类似，判定性是其推论。

定义 3.2. 令 Σ 是子公式封闭的公式集合。对模型 $\mathfrak{M} = \langle W, |\Phi|, \{R_X : X \in |\Phi|\}, v \rangle$ ，我们定义 W 上的等价关系三为：

$$x \equiv y, \text{ 当且仅当, 对每个 } \phi \in \Sigma, v_x(\phi) = a, \text{ 当且仅当, } v_y(\phi) = a.$$

$[x]$ 表示由 x 生成的 $\mathfrak{M}$ 中的世界的 $\equiv$ -等价类。 $[X]$ 为 $\{[x] : x \in X \in |\Phi|\}$ 。 $\mathfrak{M}$ 的通过 Σ 的过滤是模型 $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, |\Phi|^*, \{R_X^* : X^* \in |\Phi|^*\}, v^* \rangle$ ，其中 $W^* = [W]$ ， $|\Phi|^* \subseteq \wp(W^*)$ 为命题的集合， $X^* = [X]$ ， v^* 是从 $\Pi \times W^*$ 到 $\mathcal{T}$ 的函数。对每个 $X^* \in |\Phi|^*$ ， R_X^* 是 $W^* \times W^*$ 的子集，满足如下条件：

- (a) 当 $p \in \Sigma$ 时， $v_{[y]}^*(p) = v_y(p)$ ；
- (b) 任给 $x \in [x]$ ， $y \in [y]$ ，若 $xR_X y$ ，则 $[x]R_X^*[y]$ 。

定理 3.4. 令 Σ 是子公式封闭的公式集合, $\mathfrak{M}^*$ 是 $\mathfrak{M}$ 的通过 Σ 的过滤, 则对每个 $\phi \in \Sigma$ 和 $\mathfrak{M}$ 中的 x :

$$v_x(\phi) = a \text{ 当且仅当 } v_{[x]}^*(\phi) = a$$

即, 对每个 $\phi \in \Sigma$, $[[\phi]] = |\phi|^*$.

证明. 根据条件句语义条目 7', 定义 3.2, 易证。□

命题 3.2. 令 Σ 是子公式封闭的公式的有穷集合。对任何模型 $\mathfrak{M}$, 如果 $\mathfrak{M}^*$ 是 $\mathfrak{M}$ 的通过 Σ 的过滤, 则它最多包含 m^n 个世界 (其中 n 表示 Σ 的大小)。

证明. $\mathfrak{M}^*$ 的世界是 $[W]$ 中的 $\equiv$ -等价类。令 g 是以 $[W]$ 为定义域, $\mathcal{T}^\Sigma$ 为值域的函数, 它定义为 $g([x]) = v_{[x]}^*$, 其中 $v_{[x]}^*$ 是从 Σ 到 $\mathcal{T}$ 的赋值。根据等价关系 $\equiv$ 的定义, g 是定义明确的且是一个内射。因此 $[W]$ 的大小最大为 m^n 。□

LCK2 的有穷模型性质和可判定性类似于 **LCK** 的, 根据定理 3.3, 定理 3.4 和命题 3.2 易证, 证明过程在此省略。

4 LCK 和 LCK2 的扩充和推广

4.1 LCK2 的扩充

基本经典条件句逻辑通过增加限制公理可以得到刘易斯的条件句逻辑和斯塔尔纳克条件句逻辑, 基本 Łukasiewicz m -值条件句逻辑也是如此。系统 **LCK** 的条件句是二值的, 容易扩充, 我们现在只对系统 **LCK2** 进行简单的考查。我们可以增加如下限制条件扩充该系统 ($x \in W; X, Y \in |\Phi|$):

C#. 如果 $R_X(x) = \emptyset$, 则 $R_{X \wedge Y}(x) = \emptyset$

该条件对应公理:

$$\text{A8. } (\phi \triangleright f) \rightarrow (\phi \wedge \psi \triangleright f)$$

可以证明公理 A8 关于满足条件 C# 的模型是可靠的: 任给 $x \in W$, 假定 $v_x(\phi \triangleright f) = 1$, 则 $R_{\phi/}(x) = \emptyset$ 。根据 C#, $R_{\phi/\wedge/\psi/}(x) = \emptyset$, 所以 $v_x(\phi \wedge \psi \triangleright f) = 1$ 。

由 A8 扩充的 **LCK2** 记为 **LCK2+8**, 该系统具有完全性。我们有如下定理。

定理 4.1. **LCK2+8** 关于满足 C# 的模型是完全的。

证明. 令 $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, |\Phi|^c, \{R_X^c : X \in |\Phi|^c \subseteq \wp(W^c)\}, V \rangle$ 是 **LCK2** 的典型模型。假定 $(\phi \triangleright f) \rightarrow (\phi \wedge \psi \triangleright f) \in x \in W^c$, 我们首先证明 $\mathfrak{M}^c$ 满足 C#。我们需要证明: 对任意的公式 ϕ , 若 $R_{\phi/}^c(x) = \emptyset$, 则 $R_{\phi/\wedge/\psi/}^c(x) = \emptyset$ 。因 $R_{\phi/}^c(x) = \emptyset$, 则任给 $y \in W^c$, 如果 $x R_{\phi/}^c y$, 那么 $f \in y$ (因为根据 y 的一致性, $f \notin y$, 所以

并非 $xR_{/\phi/y}^c$)。因此 $\phi \triangleright f \in x$, 进而 $\phi \wedge \psi \triangleright f \in x$ 。因为任给 $y \in W^c$, $f \notin y$ 。所以 $R_{/\phi/\wedge/\psi/}^c(x) = \emptyset$ 。因此, 模型 $\mathfrak{M}^c$ 也是 **LCK2** + 8 的典型模型。现在假定 $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{LCK2}+8} \phi$, 则存在典型模型 $\mathfrak{M}^c$ 中的一个世界 x , 使得对任意 $\Gamma \in x$, 但 $\phi \notin x$ 。因此, $\Gamma \not\vdash_{C_k^{\mathbf{LCK2}+8}} \phi$ 。 $\square$

4.2 LCK 向 Łukasiewicz 无穷值条件句逻辑的推广

系统 **LCK** 可以推广到 Łukasiewicz 无穷值条件句逻辑。Łukasiewicz 无穷值命题逻辑记为 $\mathbf{L}_\infty$, 它以实数区间 $[0, 1]$ 为值域。 $\mathbf{L}_\infty$ 的条件句逻辑记为 $\mathbf{L}_\infty\mathbf{CK}$ 。根据定义 2.1, $(\phi \triangleright \psi) \leftrightarrow J_1(\phi \triangleright \psi)$ 成立, 但是在 $\mathbf{L}_\infty$ 中我们不能通过有穷的方式定义算子 J_a , 因此我们需要引进算子 J_1 和 J_0 作为初始联结词才能对 **LCK** 进行推广。

条件句逻辑 $\mathbf{L}_\infty\mathbf{CK}$ 包括公理系统 $\mathbf{L}_\infty$ 和 **LCK** 的所有条件句公理和推理规则, 其可靠性易证, 我们主要关注其完全性。

现在我们不采用公式的极大一致集, 而采用从公式集合 Φ 到 $[0, 1]$ 的函数代替它。我们把这样的函数的集合记为 $\mathcal{F}(\Phi, [0, 1])$ 。于是, $/\phi/ = \{u \in \mathcal{F}(\Phi, [0, 1]) : u(\phi) = 1\}$ 。我们把 **LCK** 的典型模型改造如下:

定义 4.1. $\mathbf{L}_\infty\mathbf{CK}$ 的典型模型是结构 $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, |\Phi|^c, \{R_X^c : X \in |\Phi|^c \subseteq \wp(W^c)\}, V \rangle$ 定义如下:

1. $W^c = \{u : u \in \mathcal{F}(\Phi, [0, 1])\}$;
2. 对任何 $x, y \in W^c$, $xR_{/\phi/y}^c$ 当且仅当 $\forall \theta \in \Phi(x(\phi \triangleright \theta) = 1 \Rightarrow y(\theta) = 1)$ 。其中, $/\phi/ \in |\Phi|^c$;
3. 对任意 $x \in W^c$, $V_x(p) = x(p)$ 。

根据引理 2.3 易证典型模型定义 4.1 是定义明确的。我们需要把定义 4.1 的条目 3 推广到任意公式。只考虑公式为 $\phi \triangleright \theta$ 的情形。我们需证明 $(x \in W^c)$:

$$x(\phi \triangleright \theta) = \bigwedge \{V_y(J_1(\theta)) : xR_{/\phi/y}^c\}$$

根据定义 4.1, 如果 $x(\phi \triangleright \theta) = 1$, 则如果 $xR_{/\phi/y}^c$, 那么 $y(\theta) = 1$ 。于是有,

$$x(\phi \triangleright \theta) \leq \bigwedge \{V_y(J_1(\theta)) : xR_{/\phi/y}^c\}$$

如果 $x(\phi \triangleright \theta) < \bigwedge \{V_y(J_1(\theta)) : xR_{/\phi/y}^c\}$, 即, $x(\phi \triangleright \theta) = 0$ 但 $\bigwedge \{V_y(J_1(\theta)) : xR_{/\phi/y}^c\} = 1$, 这需要根据引理 2.4 的证明的情形 2 来证明。在证明中用到命题 2.5 (4)。但对于无穷值逻辑的情形, 需要根据 $\mathbf{L}_\infty$ 的演绎定理 ([5], 第 98 页) 将该条目修改为:

- (4) 如果 $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash_{\mathbf{L}} \psi$, 那么存在某个正整数 m , $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \rightarrow_{i=1}^{m-1} (\phi, \psi)$ 。

于是就证明了 $x(\phi \triangleright \theta) = V_x(\phi \triangleright \theta)$ 。由此可以得到 $\mathbf{L}_\infty \mathbf{CK}$ 的完全性。当然, 我们也可以采用代数语义来证明 $\mathbf{L}_\infty \mathbf{CK}$ 的完全性。

把 **LCK2** 推广到无穷值情形情况比较复杂。根据 **LCK2** 语义得到的 Łukasiewicz 无穷值模态逻辑系统需要引入无穷演绎规则。([18]) 因此, 把 **LCK2** 推广到无穷值情形, 也会引进无穷值规则。鉴于其复杂性, 该话题留待后续论文讨论。

5 结语

我们在本文构建了基本 Łukasiewicz m -值条件逻辑系统 **LCK** 和 **LCK2**, 通过对这些系统进行扩充, 可以得到类似于斯塔尔纳克和刘易斯的条件逻辑系统。我们证明了这两个逻辑系统的可靠性、完全性和有穷模型性质, 把 **LCK** 推广到无穷值情形。我们仍有一些问题值得进一步研究。如何建立 Łukasiewicz m -值条件逻辑系统的代数语义和其他语义, 如何构建其他多值逻辑的条件句逻辑系统, 如中介逻辑的, 其他模糊逻辑的, 需要进一步探讨。

参考文献

- [1] R. Bělohlávek, W. D. Joseph and G. J. K., 2017, *Fuzzy Logic and Mathematics: A Historical Perspective*, Oxford University Press.
- [2] F. Bou, F. Esteva, L. Godo and R. O. Rodríguez, 2011, “On the minimum many-valued modal logic over a finite residuated lattice”, *Journal of Logic and Computation*, **21(5)**: 739–790.
- [3] B. Chellas, 1975, “Basic conditional logic”, *Journal of Philosophical Logic*, **4(2)**: 133–153.
- [4] I. Ciardelli and X. Liu, 2020, “Intuitionistic conditional logics”, *Journal of Philosophical Logic*, **49(4)**: 807–832.
- [5] R. L. O. Cignoli, I. M. L. D’Ottaviano and D. Mundici, 2000, *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Vol. 7, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [6] F. Esteva, L. Godo and R. Ó. Rodríguez, 2017, “On the relation between modal and multi-modal logics over Łukasiewicz logic”, *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pp. 1–6.
- [7] M. Fitting, 1991, “Many-valued modal logics”, *Fundamenta Informaticae*, **15**: 235–254.
- [8] M. Fitting, 1992, “Many-valued modal logics ii”, *Fundamenta Informaticae*, **17**: 55–73.
- [9] H. Goldberg, H. Leblanc and G. Weaver, 1974, “A strong completeness theorem for 3-valued logic”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **15(2)**: 325–330.
- [10] S. Gottwald, 2001, *A Treatise on Many-Valued Logics*, Vol. 9, Baldock: Research Studies Press Ltd.

- [11] S. Gottwald, 2015, “Many-valued logic”, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <https://plato.stanford.edu/entries/logic-many-valued/>.
- [12] R. Grigolia, 1977, “Algebraic analysis of Łukasiewicz-Tarski n -valued logical systems”, in R. Wójcicki and G. Malinowski(eds.), *Selected papers on Łukasiewicz Sentential Calculi*, pp. 81–92, Wrocław: Ossolineum.
- [13] S. Haack, 1978, *Philosophy of Logics*, London, New York, Melbourne: Cambridge University Press.
- [14] S. Haack, 1979, “Do we need ‘fuzzy logic’?”, *International Journal of Man-Machine Studies*, **11**: 437–445.
- [15] S. Haack, 1996, *Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism*, Chicago: University of Chicago Press.
- [16] P. Hájek, 1998, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, **Vol. 4**, Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- [17] P. Hájek and V. Novák, 2003, “The sorites paradox and fuzzy logic”, *International Journal of General Systems*, **32(4)**: 373–383.
- [18] G. Hansoul and B. Teheux, 2006, “Completeness results for many-valued Łukasiewicz modal systems and relational semantics”, Available at <http://arxiv.org/abs/math/0612542>.
- [19] G. Hansoul and B. Teheux, 2013, “Extending Łukasiewicz logics with a modality: algebraic approach to relational semantics”, *Studia Logica*, **101(3)**: 505–545.
- [20] S. J. Krolikoski, 1979, “Does many-valued logic begin with a mistake?”, *Proceedings of the ninth International Symposium on Multiple-Valued Logic*, pp. 104, Bath, England: IEEE.
- [21] D. Lewis, 1971, “Completeness and decidability of three logics of counterfactual conditionals”, *Theoria*, **37(1)**: 74–85.
- [22] D. Lewis, 1973, *Counterfactuals*, Oxford: Blackwell Publishers.
- [23] G. Malinowski, 1993, *Many-Valued Logics*, Oxford: Clarendon Press.
- [24] V. Marra, 2014, “The problem of artificial precision in theories of vagueness: a note on the rôle of maximal consistency”, *Erkenntnis*, **79**: 1015–1026.
- [25] S. McCall, 1967, *Polish Logic: 1920-1939*, Oxford: Clarendon Press.
- [26] O. Morikawa, 1989, “Some modal logics based on a three-valued logic”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **30**: 130–137.
- [27] P. Ostermann, 1988, “Many-valued modal propositional calculi”, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **34**: 343–354.
- [28] N. Rescher, 1969, *Many-Valued Logic*, New York and Toronto: McGraw-Hill.
- [29] J. B. Rosser and A. R. Turquette, 1952, *Many-Valued Logics*, Amsterdam: North-Holland.
- [30] P. K. Schotch, J. B. Jensen and P. F. Larsen, 1977, “A strong completeness theorem for Łukasiewicz finitely many-valued logics”, *Proceedings of the Seventh International Symposium on Multiple-Valued Logic (Held at North Carolina University at Charlotte)*, pp. 89–91.

- [31] P. K. Schotch, J. B. Jensen, P. F. Larsen and E. J. Maclellan, 1978, “A note on three-valued modal logic”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **19(1)**: 63–68.
- [32] K. Segerberg, 1989, “Notes on conditional logic”, *Studia Logica*, **48(2)**: 157–168.
- [33] P. Smets and P. Magrez, 1987, “Implication in fuzzy logic”, *International Journal of Approximate Reasoning*, **1(4)**: 327–347.
- [34] N. J. J. Smith, 2008, *Vagueness and Degrees of Truth*, Oxford: Oxford University Press.
- [35] N. J. J. Smith, 2017, “Undead argument: the truth-functionality objection to fuzzy theories of vagueness”, *Synthese*, **194**: 3761–3787.
- [36] R. Stalnaker, 1968, “A theory of conditionals”, in N. Rescher(ed.), *Studies in Logical Theory*, pp. 98–112, Oxford: Blackwell.
- [37] R. Stalnaker, 1980, “A defense of conditional excluded middle”, in W. L. Harper, R. Stalnaker and G. Pearce(eds.), *Ifs: Conditionals, Belief, Decision, Chance, and Time*, pp. 87–104, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- [38] R. Stalnaker and R. H. Thomason, 1970, “A semantic analysis of conditional logic”, *Theoria*, **36(1)**: 23–42.
- [39] A. Strollo, 2022, “Truth pluralism and many-valued logic: lesson from Suszko’s thesis”, *The Philosophical Quarterly*, **72(1)**: 155–176.
- [40] R. Suszko, 1977, “The Fregean axiom and Polish mathematical logic in the 1920’s”, *Studia Logica*, **36**: 373–380.
- [41] N. Y. Suzuki, 1997, “Kripke frame with graded accessibility and fuzzy possible world semantics”, *Studia Logica*, **59(2)**: 249–269.
- [42] B. Teheux, 2007, “A duality for the algebras of a Łukasiewicz $n+1$ -valued modal system”, *Studia Logica*, **87(1)**: 13–36.
- [43] S. K. Thomason, 1978, “Possible worlds and many truth values”, *Studia Logica*, **37**: 195–204.
- [44] M. Tokarz, 1974, “A method of axiomatization of Łukasiewicz logics”, *Studia Logica*, **33**: 333–338.
- [45] R. Tuziak, 1988, “An axiomatization of the finite-valued Łukasiewicz calculus”, *Studia Logica*, **47(1)**: 49–55.
- [46] Y. Weiss, 2019, “Basic intuitionistic conditional logic”, *Journal of Philosophical Logic*, **48(3)**: 447–469.
- [47] T. Williamson, 1994, *Vagueness*, London and New York: Routledge.

(责任编辑: 执子)

Basic Łukasiewicz m -valued Conditional Logics

Shuquan Huo

Abstract

Classical conditional logic has been studied extensively. In recent years, some non-classical conditional logic has also appeared. Many-valued logic admits that propositions can take many truth values, has fault-tolerant ability, its implication word is similar to the classical implication word, and can also describe conditionals sentence, so we should have many-valued conditional logic. In this paper, we will construct the basic conditional logic systems **LCK** and **LCK2** based on Łukasiewicz m -valued propositional logic, and prove the reliability, completeness, and finite model properties of these systems. Finally we generalize **LCK** to the infinite-valued case.