

加权加标网络的稳定与平衡

王轶

董惠敏 

摘要: 经典结构平衡理论对不带权重的加标网络有较为完善的研究。Morrisette (1958) 将结构平衡理论推广到加权加标网络并加以经验研究。近年来出现了基于时态逻辑 CTL 的结构平衡逻辑研究, 但所探讨的社会网络局限于不带权重的加标网络。本文将结构平衡逻辑推广到带权重的加标网络, 引入几种适用的形式语言和语义, 探讨由此得到的几个逻辑的表达能力, 并给出证明系统。

关键词: 加权加标网络; 结构平衡理论; 稳定性; 平衡性; 分支时间逻辑

中图分类号: B81

文献标识码: A

对社会网络演变的预测是社会网络分析领域研究工作的一个关注点, 涉及理论、经验研究等不同的方面。社会网络的演变可以从不同的角度加以刻画。研究进路之一是探讨网络内部因素（主要是网络结构）与外部因素（例如个体性别、种族、技能和兴趣爱好等可变或不可变属性）之间的相互影响。社会影响（social influence）说的是网络内部因素对外部因素的作用；古语“近朱者赤，近墨者黑”“居必择乡，游必就士”等即是佐证这一影响的箴言。反过来，个体选择（individual selection）则是指网络外部因素对内部因素的作用；例如，个人的性别、工作性质或习性会影响她对朋友圈的选择。个体的知识和信念也可视为网络的外部因素。¹ 对社会网络及其上信息流之间相互作用的逻辑研究（[2, 13, 14, 16]）就是这一进路上的工作。

结构平衡理论（structural balance theory, [1, 4, 6, 7]）则选择了另一进路：在不考虑外部因素的情况下（或者将网络外部因素视为恒定不变、不造成干扰或对结论没有太大影响），依据内部因素来探讨社会网络的演变。一个主要结论是社会网络有走向平衡的趋势，并得到一些经验研究和数据的佐证（[11, 12]）。经典结构平衡理论总体上还是探讨与此相关的是非问题，例如上述趋势是否成立？如何表

收稿日期: 2021-12-12

作者信息: 王轶 中山大学哲学系（珠海）
ynw@xixilogic.org

董惠敏  维也纳工业大学逻辑与计算研究所
huimin@logic.at

¹网络的内部因素与外部因素之间的区分是相对的，取决于将哪些因素作为网络的要件。例如，经典结构平衡理论中的社会网络由一些个体以及之间的关系组成，除此以外的所有因素都是外部因素。而本文后续工作则进一步将个体间关系的强度作为网络的内部因素。

示?近年来对结构平衡理论的探讨逐渐推进到如何和为何两个层面。通过引入稳定性这一弱于平衡性的概念, [8, 9] 从逻辑学的角度回答了社会网络如何向平衡网络演变这一问题; [18] 中进一步实现该过程的程序模拟。采用平衡博弈来刻画个体对所处邻里关系的选择, [15, 17] 回答了给定社会网络为何会走向平衡、是否注定达成平衡等问题。

然而, 经典结构平衡理论总体上停留在探讨社会关系的质(积极、消极或中立的关系)对网络结构的影响, [8, 9] 中进一步结合了社会关系的量(例如两人之间的五项共识与三项分歧带来的总体关系是积极的)。而社会关系的度(例如好朋友和普通朋友的差别)却并未得到足够的重视。诚然, 在结构平衡理论中对关系的度的研究早已有之, 例如为两者之间的每一种联系都加上权重以刻画联系的强度([10]), 但已有的工作仅是“是非”问题的经验研究。基于结构平衡理论并结合关系强度来探讨“如何”和“为何”平衡——特别是采用逻辑学方法的研究工作——是本文的出发点。

本文采用 [8, 9] 提出的方法探讨区分强弱的积极和消极关系的结构平衡理论, 侧重于回答“如何”问题。这里所探讨的网络是较为一般的结构: 加权加标有向图(权重表示关系的强度, 标记用于区分积极和消极关系, 而有向图则利于探讨单向/非对称关系——例如甲对乙的态度)。文章结构安排如下。第1节中引入加权加标网络中与结构平衡逻辑有关的概念, 包括对平衡性和稳定性这两个概念的推广以及结构平衡逻辑的语言和语义。第2节探讨结构平衡逻辑的表达能力, 包括介绍一些有用的公式, 使用该逻辑探讨结构平衡概念, 以及对比不同版本语言的相对表达能力。第3节给出可靠和完全的公理系统。第4节是全文的总结。

1 结构平衡逻辑

经典结构平衡理论([1, 5])对不带权重的加标网络有比较完善的研究。Morrisette([10])将结构平衡理论推广到加权加标网络并加以经验研究。近年来出现了基于时态逻辑 CTL 的结构平衡逻辑研究([8, 9, 17, 18]), 但所探讨的社会网络局限于不带权重的加标网络。本节引入结构平衡理论的基于加权加标网络的历时演进逻辑。在不致引起混淆的情况下, 本文称该逻辑为结构平衡逻辑(logic of structural balance)。

1.1 形式模型

严格说来, 本文所探讨的加权加标网络是指边上带有权重和标记的有向图, 具体定义如下。

定义 1.1. 加权加标网络 (many-signed network, 简称网络) 是一个二元组 (A, E) ,

满足:

- A 是一个有穷非空集合, 其中的元素用于表示主体;
- $E: \{(x, y) \in A \times A \mid x \neq y\} \rightarrow [-1, 1]$ 是标记函数, 为 A 上的每条边 (x, y) 赋予一个带正或负标记的权重 (以 -1 至 1 闭区间内的实数标记), 用于表示 x 对 y 的态度。权重值为正数的边所代表的是肯定态度或正面态度 (positive attitude), 负数代表否定态度或负面态度 (negative attitude), 而 0 则代表中立态度或无态度 (neutral attitude)。²

每个加权加标网络都可以使用矩阵进行表示。通常每行表示一个出发节点, 每列表示一个终止节点, 在对应的位置写上权重值。以表 1 为例, 该表定义了包含 5 个节点 (a 至 e) 的网络 N_0 , 每条边上的权重值在表中给定。例如, 行 b 列 a 处的权重值为 -0.5 , 即表示网络 N_0 中的边 (b, a) 的权重为 -0.5 。

表 1: 网络 N_0

权重 出发 \ 终止					
	a	b	c	d	e
a	—	0.5	0.1	0.6	0.4
b	-0.5	—	0.3	0.5	0.2
c	-0.1	-0.3	—	0.4	0.8
d	-0.6	-0.5	-0.4	—	0.7
e	-0.4	-0.2	-0.8	-0.7	—

在基于无向图的经典结构平衡理论中, 无向边用于表示两个主体之间的 (对称的) 关系, 可以作为态度的特例, 即具有对称性的态度。本文不专门探讨对称性态度的情形。

网络中的主体甲对乙的态度受到如下因素的影响:³

- (1) 乙对甲的态度;
- (2) 甲乙之间对每个第三主体的认同度, 这又由四个方向上的态度相似度决定:
 - 甲乙对第三主体态度的相似度或背离度;
 - 甲对第三主体的态度和第三主体对乙态度的相似度或背离度;
 - 乙对第三主体的态度和第三主体对甲态度的相似度或背离度;

²中立态度或无态度具备不同的涵义, 但对于本文所探讨的逻辑而言, 在技术上具备相似的特征, 故而皆可作为权重值为 0 的边所代表的的态度。这方面的展开讨论参见 [17]。

³如前文所述, 在结构平衡理论中只考虑网络的内部因素——网络结构本身, 而个体特征之类的外部因素不在考虑范围中。

- 第三主体对甲乙态度的相似度或背离度。

这些影响因素的复合——采用求和并按人取均值来加以计算——称为甲对乙的从众态度。其准确定义如下：

定义 1.2. 从众态度 (conformity)。任给网络 $N = (A, E)$ 和两个主体 $x, y \in A$, x 对 y 在 N 中的从众态度, 记为 $T_N(x, y)$, 是如下数值：

$$\frac{E(y, x) + \sum_{z \in A \setminus \{x, y\}} \frac{1}{4} (E(x, z) \cdot E(y, z) + E(x, z) \cdot E(z, y) + E(z, x) \cdot E(y, z) + E(z, x) \cdot E(z, y))}{|A| - 1}$$

直观上来讲, 主体对他人采用从众态度符合大众的预期, 而不采用从众态度则显得有些不够深思熟虑乃至离经叛道。

以表 1 所展示的网络 N_0 为例。边 (a, b) 的从众态度 $T_{N_0}(a, b)$ ：

$$\begin{aligned} &= \frac{E(b, a) + \sum_{x \in \{c, d, e\}} \frac{1}{4} (E(a, x) \cdot E(b, x) + E(a, x) \cdot E(x, b) + E(x, a) \cdot E(b, x) + E(x, a) \cdot E(x, b))}{4} \\ &= \frac{-0.5 + 0 + 0 + 0}{4} \\ &= -0.125 \end{aligned}$$

由于网络 N_0 的特殊性, 不难算出任意边 (x, y) 的从众态度 $T_{N_0}(x, y) = \frac{E(y, x)}{4}$ 。

可以从结构平衡的角度对上述问题加以刻画：如果甲对乙当下的态度符合其从众态度（即同正、同负或从众态度为中立），则称该态度稳定。准确定义如下：

定义 1.3. 稳定性 (stability)。任给网络 $N = (A, E)$, 称主体 x 对 y 的态度 $E(x, y)$ 是稳定的（简称为边 (x, y) 稳定），如果：

- 当 $E(x, y) \neq 0$ 时, $E(x, y) \cdot T_N(x, y) \geq 0$;
- 当 $E(x, y) = 0$ 时, $T_N(x, y) = 0$ 。

否则, 称 $E(x, y)$ 不稳定。称网络 N 稳定, 当且仅当它的每条边都是稳定的；否则称 N 不稳定。

仍以表 1 所展示的网络 N_0 为例, a 对 b 的当前态度是 $E(a, b) = 0.5$, 而上文计算得知 a 对 b 的从众态度为 $T_{N_0}(a, b) = -0.125$ 。因此, N_0 中 a 对 b 的态度不稳定, 网络 N_0 也不稳定。甚至, 由于 N_0 中的每条边的实际态度 $E(x, y) = -E(y, x)$ 都不为零且不等于从众态度 $T_{N_0}(x, y) = \frac{E(y, x)}{4}$, 因此 N_0 中的每条边都不稳定。

在不稳定网络中, 有主体受到来自网络结构的压力（称为网络内因）以使其改变对他人的态度。⁴ 而稳定网络中的每个主体均无此压力, 或者说, 稳定网络的结构保障了其自身的维系。这可以通过后继概念加以刻画。

⁴ 主体因网络结构之外的因素（称为网络外因）而改变态度则不在此列。例如, 因精神沮丧而错误地怪罪理应友善对待的家人, 这样的改变源自网络外因。

定义 1.4. 网络的后继 (successor of a network)。对于同一主体集上的任意两个网络 $N_1 = (A, E_1)$ 和 $N_2 = (A, E_2)$, 称 N_2 是 N_1 的后继, 记为 $N_1 \rightsquigarrow N_2$, 如果下列条件成立:

- 若 N_1 稳定, 则 $N_1 = N_2$;
- 若 N_1 不稳定, 则 N_1 中存在不稳定边 (x, y) 使得
 - “后继网络中 x 对 y 的态度是其在先驱网络中的从众态度”, 即 $E_2(x, y) = T_{N_1}(x, y)$, 且
 - 对任意两个不同的 $z, z' \in A \setminus \{x, y\}$ 有 $E_2(z, z') = E_1(z, z')$ 。

简单地说, 在不稳定的网络中某个主体会将其态度修正为从众态度, 从而使网络发生改变。稳定网络则不再发生变化——在只考虑网络内因的设定之下。此外, 根据上述定义, 网络与其后继之间最多只有一条边的权重有差别。

表 2 和 3 中展示了网络 N_0 的两个后继 N_{00} 和 N_{01} 。它们是 N_0 的 20 个后继中的两个。

表 2: 网络 N_{00} , 表 1 中网络 N_0 的一个后继

权重 出发 \ 终止					
	a	b	c	d	e
a	—	-0.125	0.1	0.6	0.4
b	-0.5	—	0.3	0.5	0.2
c	-0.1	-0.3	—	0.4	0.8
d	-0.6	-0.5	-0.4	—	0.7
e	-0.4	-0.2	-0.8	-0.7	—

表 3: 网络 N_{01} , 表 1 中网络 N_0 的一个后继

权重 出发 \ 终止					
	a	b	c	d	e
a	—	0.5	-0.025	0.6	0.4
b	-0.5	—	0.3	0.5	0.2
c	-0.1	-0.3	—	0.4	0.8
d	-0.6	-0.5	-0.4	—	0.7
e	-0.4	-0.2	-0.8	-0.7	—

网络 N_{00} 中, 边 (a, b) 处于稳定状态, 因此 N_{00} 是其自身的一个后继。以本

文的命名方式即 N_{000} 表示网络 N_{00} 中边 (a, b) 取得“更新权”后得到的后继网络, 而在此情形下 $N_{000} = N_{00}$ 。表 4 中展示了网络 N_{00} 的另一后继 N_{005} 。

表 4: 网络 N_{005} , 表 2 中网络 N_{00} 的一个后继

权重 出发 \ 终止					
	a	b	c	d	e
a	—	-0.125	0.1	0.6	0.4
b	-0.5	—	$-\frac{0.2625}{4}$	0.5	0.2
c	-0.1	-0.3	—	0.4	0.8
d	-0.6	-0.5	-0.4	—	0.7
e	-0.4	-0.2	-0.8	-0.7	—

根据稳定性的定义, 网络 $N = (A, E)$ 中 x 对 y 的实际态度 (即 $E(x, y)$) 与从众态度 (即 $T_N(x, y)$) 同正、同负或从众态度为 0 时, N 即是稳定的; 其他情况 (一正一负、实际态度中立而从众态度非中立) 下 N 都不稳定。需要强调的是, 同正同负的情形不涉及数值。例如当实际态度为 0.5 时, 假设从众态度为 0.8, 则该边稳定, 并不会受结构平衡的压力而发生改变。这背后的理由如下。经典结构平衡理论所讨论的来自结构平衡的压力主要针对肯定、否定 (和中立) 等属性而言, 不涉及程度; 当 $E(x, y) = 0.5$ (x 视 y 为熟人) 时, 如果 $T_N(x, y) = 0.8$ (从社交圈的情况来看 x 应视 y 为朋友), 此时 x 对 y 的实际态度与从众态度属性相同, 数值不同, 虽然在某种意义上不够“理想”或“理性”, 但并非不稳定的情况。或许可以理解为, 人的态度存在一定的惯性, 不到必须正视其中问题的时候, 往往会倾向于维系不变。反过来, 如果实际态度值是 -0.1 (负面态度), 与从众态度 0.1 (正关系) 具有属性上的差别, 此时 x 可能不得不将态度加以调整, 哪怕中间的数值差别只有 0.2 (小于此前的 0.3)。至于调整后的态度, 直接变为从众态度是比较合理的方式。

定义 1.5. 网络演化 (evolution of a network)。网络 N 的演化结构, 记为 $e(N)$, 是满足如下条件的 $(\mathfrak{N}, \Rightarrow)$:

- (1) $\mathfrak{N}$ 是包含 N 和 N 的所有直接和间接后继在内的网络集, 即
$$\mathfrak{N} = \{N\} \cup \{N' \mid \text{存在有穷路径 } N \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow N'\};$$
- (2) $\Rightarrow$ 是后继关系 $\rightsquigarrow$ 限制到 $\mathfrak{N}$ 上的子关系。

上文中例举的网络 N_0, N_{00}, N_{01} 和 N_{005} 都出现于 N_0 的演化结构中, 即属于 $e(N_0)$ 。但并不是所有基于 $\{a, b, c, d, e\}$ 的网络都是 $e(N_0)$ 的成员。例如, 表 5 中的网络 N' 就不属于 $e(N_0)$ (N' 不是 N_{005} 的后继, 也不是 N_0 和 N_{00} 等 $e(N_0)$ 成员的后继)。

表 5: 网络 N'

权重 \ 终止 出发	a	b	c	d	e
a	—	-0.125	-1	0.6	0.4
b	-0.5	—	$-\frac{0.2625}{4}$	0.5	0.2
c	-0.1	-0.3	—	0.4	0.8
d	-0.6	-0.5	-0.4	—	0.7
e	-0.4	-0.2	-0.8	-0.7	—

网络演化过程是一个图形结构。是否可以通过修改稳定性的定义使演化过程必然形成树结构？这样的做法是可行的，并且更接近 [9, 18] 中敌友逻辑的做法。但由于加权加标模型中权重值有无穷多个，演化树通常也是无穷的（即未必能保证任给网络能在有穷步内达到稳定）。与之相对的是，在 [9, 18] 中引入的基于简单双标图的版本中，网络的演化路径都是有穷长的（命题 10），甚至可以找到路径的长度上限（命题 11）。

1.2 形式语言和语义

本节首先引入如下形式语言，并以此为基础提出刻画网络朝向结构稳定的历时演进逻辑。

定义 1.6 (语言). 任给主体集 A ，结构平衡逻辑的语言定义如下：

$$\varphi ::= i(a, a) \mid P(a, a) \mid N(a, a) \mid \neg\varphi \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid AX\varphi \mid AU(\varphi, \varphi) \mid EU(\varphi, \varphi) \mid \exists_{\geq n} x\varphi$$

其中 $a, x \in A$ ， $i \in [-1, 1]$ 且 $n \in \mathbb{N}$ 。

公式 $i(a, b)$ 读作“ a 对 b 的态度值是 i ”， $P(a, b)$ 表示“ a 对 b 的态度是正面的”，而 $N(a, b)$ 表示“ a 对 b 的态度是负面的”。通过否定联结词 ($\neg$) 和蕴涵联结词 ($\rightarrow$) 可以定义其他所有一元或二元命题联结词。 AX 、 AU 和 EU 是经典的 CTL 算子， AF 、 EF 、 EX 等其他 CTL 算子可定义得到。公式 $\exists_{\geq n} x\varphi$ 读作“至少存在 n 个主体 x 使得 $\varphi(x)$ 为真”。记 $\exists x\varphi$ 为 $\exists_{\geq 1} x\varphi$ 。与经典逻辑类似可引入全称量词 $\forall_{\geq n}$ 和 $\forall$ 。

主体集 A 上的语言将通过 A 上的网络加以解释——这里的主体集需要保持一致。如果将上述语言视为一个特殊的模态语言，则网络在这里扮演的角色类似于克里普克框架中的一个可能世界，框架本身实际上是所有网络及其后继所形成的结构。

定义 1.7 (语义). 称网络 $N = (A, E)$ 满足公式 φ , 或 φ 在 N 中为真, 记作 $N \models \varphi$, 如果下列归纳条件成立:

$$\begin{aligned}
 N \models i(a, b) &\Leftrightarrow E(a, b) = i \\
 N \models P(a, b) &\Leftrightarrow E(a, b) > 0 \\
 N \models N(a, b) &\Leftrightarrow E(a, b) < 0 \\
 N \models \neg\varphi &\Leftrightarrow \text{并非 } N \models \varphi \\
 N \models (\varphi \rightarrow \psi) &\Leftrightarrow N \models \varphi \text{ 实质蕴涵 } N \models \psi \\
 N \models AX\varphi &\Leftrightarrow \text{任给 } N', \text{ 如果 } N \rightsquigarrow N' \text{ 则 } N' \models \varphi \\
 N \models AU(\psi, \varphi) &\Leftrightarrow \text{任给后继序列 } N_0 \rightsquigarrow N_1 \rightsquigarrow N_2 \rightsquigarrow \dots \text{ (其中 } N_0 = N), \\
 &\quad \text{存在 } i \in \mathbb{N} \text{ 使得 } N_i \models \varphi \text{ 且对任意 } j < i, N_j \models \psi \\
 N \models EU(\psi, \varphi) &\Leftrightarrow \text{存在后继序列 } N_0 \rightsquigarrow N_1 \rightsquigarrow N_2 \rightsquigarrow \dots \text{ (其中 } N_0 = N), \\
 &\quad \text{存在 } i \in \mathbb{N} \text{ 使得 } N_i \models \varphi \text{ 且对任意 } j < i, N_j \models \psi \\
 N \models \exists_{\geq n} x\varphi &\Leftrightarrow \text{存在不同的 } a_1, \dots, a_n \in A \text{ 使得 } N \models (\varphi[\frac{a_1}{x}] \wedge \dots \wedge \varphi[\frac{a_n}{x}])
 \end{aligned}$$

如果所有的网络都满足公式 φ , 则称 φ 有效, 记为 $\models \varphi$.

2 表达能力

本节探讨结构平衡逻辑的表达能力。首先探讨该逻辑中一些公式的性质, 然后对比不同版本语言的相对表达能力, 最后借助形式语言探讨对结构平衡的刻画。

2.1 初步结论

这里列举几条有效、偶然真或矛盾的公式以展现结构平衡逻辑的表达能力和一些特征。

命题 2.1. 如下公式是有效式 (其中 $i, j \in [-1, 1]$ 且 a 和 b 是不同主体):

- (1) $\neg i(a, a) \wedge \neg P(a, a) \wedge \neg N(a, a)$ (“主体对自身不持任何态度”)
- (2) $i(a, b) \rightarrow \neg j(a, b)$, 如果 $i \neq j$
- (3) $i(a, b) \rightarrow P(a, b)$, 如果 $i > 0$
- (4) $i(a, b) \rightarrow N(a, b)$, 如果 $i < 0$
- (5) $(i(a, b) \rightarrow \exists x i(x, b)) \wedge (i(a, b) \rightarrow \exists y i(a, y))$
- (6) $\exists_{\geq n} x\varphi \leftrightarrow \bigvee_{B \in \{X \subseteq A: |X| \geq n\}} \bigwedge_{a \in B} \varphi[\frac{a}{x}]$

先前所引入的概念, 如态度的稳定性和网络的稳定性, 可使用结构平衡逻辑加以表达:

- 令 $\text{stb}(a, b)$ 为公式 $(i(a, b) \wedge AX i(a, b))$

- 令 stb 为公式 $\forall x \forall y stb(x, y)$

命题 2.2. 关于稳定性有如下结论:

- (1) 任给主体 a , $\models \neg stb(a, a)$
- (2) 任给网络 $N = (A, E)$ 及其中的两个不同主体 a 和 b ,
 $N \models stb(a, b)$ 当且仅当 $E(a, b)$ 是稳定的
- (3) 任给网络 N , $N \models stb$ 当且仅当 N 稳定
- (4) $\models stb \rightarrow (\varphi \rightarrow AX\varphi)$ (“稳定网络的后继是其自身”)

2.2 语言的表达能力对比

结构平衡逻辑的语言 (定义 1.6) 是在 CTL 语言的基础上进行增改所得到的。一是将原子命题限制为几类特殊形式: $i(a, b)$ 、 $P(a, b)$ 和 $N(a, b)$, 其中 $i(a, b)$ 用于描述 a 对 b 的态度值, 而 $P(a, b)$ 和 $N(a, b)$ 是对态度正负面性质的断言; 再者语言中允许使用形如 $\exists_{\geq n} x$ 的量词。但态度值命题、态度正负面性质命题和量化命题这三类是否实际上增强了语言的表达能力则值得进一步探讨。为此本节引入如下四个子语言, 分别记为 L_i 、 $L_{i,\exists}$ 、 $L_{\pm}$ 和 $L_{\pm,\exists}$ (其中 a, x 是 A 中的主体, i 是 $[-1, 1]$ 区间内的实数且 n 是自然数):

$$\begin{aligned}
 L_i \quad \varphi &::= i(a, a) \mid \neg\varphi \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid AX\varphi \mid AU(\varphi, \varphi) \mid EU(\varphi, \varphi) \\
 L_{i,\exists} \quad \varphi &::= i(a, a) \mid \neg\varphi \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid AX\varphi \mid AU(\varphi, \varphi) \mid EU(\varphi, \varphi) \mid \exists_{\geq n} x\varphi \\
 L_{\pm} \quad \varphi &::= P(a, a) \mid N(a, a) \mid \neg\varphi \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid AX\varphi \mid AU(\varphi, \varphi) \mid EU(\varphi, \varphi) \\
 L_{\pm,\exists} \quad \varphi &::= P(a, a) \mid N(a, a) \mid \neg\varphi \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid AX\varphi \mid AU(\varphi, \varphi) \mid EU(\varphi, \varphi) \mid \exists_{\geq n} x\varphi \\
 L_{i,\pm} \quad \varphi &::= i(a, a) \mid P(a, a) \mid N(a, a) \mid \neg\varphi \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid AX\varphi \mid AU(\varphi, \varphi) \mid EU(\varphi, \varphi)
 \end{aligned}$$

使用类似的命名方法可以将前文引入的结构平衡逻辑的语言记为 $L_{i,\pm,\exists}$ 。

任给语言 Λ 和 K , 称 Λ 的表达能力不强于 K (记为 $\Lambda \preceq K$), 如果对 Λ 的任一公式都存在 K 公式与之逻辑等值; 对于结构平衡逻辑的上述语言而言, 即 $\forall \varphi \in \Lambda, \exists \psi \in K, \forall N, N \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ 。称 Λ 和 K 具有相同表达能力 (记作 $\Lambda \simeq K$), 如果 $\Lambda \preceq K$ 且 $K \preceq \Lambda$ 。称 Λ 的表达能力严格弱于 K (记作 $\Lambda \prec K$), 如果 $\Lambda \preceq K$ 且并非 $\Lambda \simeq K$ 。此外, 称 Λ 与 K 的表达能力不可比较 (记为 $\Lambda \asymp K$), 如果并非 $\Lambda \preceq K$ 且并非 $K \preceq \Lambda$ 。

命题 2.3. 上述语言在表达能力方面存在如下关系:

- (1) $L_i \simeq L_{i,\exists}$, $L_{\pm} \simeq L_{\pm,\exists}$ 且 $L_{i,\pm} \simeq L_{i,\pm,\exists}$
- (2) $L_i \prec L_{\pm}$
- (3) $L_i \prec L_{i,\pm}$ 且 $L_{\pm} \prec L_{i,\pm}$

证明. (1) 由引理 2.1(6) 知带有量词的公式可以等值地归约为不带量词的公式, 故易得此结论。

(2) 一方面, 并非 $L_i \prec L_{\pm}$: 对于 L_i 公式 $i(a, b)$ 而言, 对任意 $\varphi \in L_{\pm}$ 都存在网络 N 使得 $N \models i(a, b) \leftrightarrow \varphi$. 证明可通过施归纳于 φ 的结构得到, 此处从略。另一方面, 对 $L_{\pm}$ 公式 $P(a, b)$ 而言, 对任意 $\varphi \in L_i$ 都存在网络 N 满足 $N \models P(a, b) \leftrightarrow \varphi$. 证明可以类似地通过对 L_i 公式的结构归纳得到。

(3) 由 (2) 的证明可得。 □

本节探讨的 6 个语言的表达能力对比可以通过图 1 加以归纳。

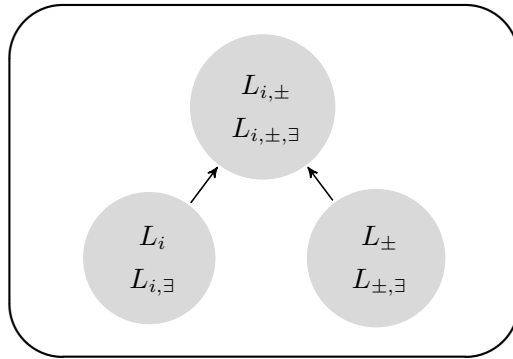


图 1: 结构平衡语言的相对表达能力。其中, 同一个框内的语言具有相同的表达能力, 从一个框出发指向另一个框的箭头代表前一框中语言的表达能力严格弱于后一框中的语言, 而其他语言之间的表达能力不可比较。

2.3 对平衡性的刻画

网络出于各种原因随时可能会发生变化。按照结构平衡理论, 理想 (即只考虑网络内因对主体之间关系的影响) 状况下, 网络将朝着平衡的方向演变。演变是由网络中 n 个主体之间的关系结构是否处于“适当”状态而引起。经典结构平衡理论使用平衡这一概念来刻画上述适当性。下面首先将平衡概念推广到加权加标有向图, 然后使用结构平衡逻辑进行分析。

定义 2.1 (三标转换网络). 任给加权加标网络 $N = (A, E)$, 其三标转换网络 $\tau(N)$ 是一个二元组 (A, L) 使得 $L: A \times A \rightarrow \{+, -, \circ\}$ 满足对任意 $x, y \in A$:

$$L(x, y) = \begin{cases} +, & \text{如果 } E(x, y) > 0, \\ -, & \text{如果 } E(x, y) < 0, \\ \circ, & \text{如果 } E(x, y) = 0, \\ \text{无定义}, & \text{如果 } E(x, y) \text{ 无定义}. \end{cases}$$

网络平衡的定义取决于其三标转换网络中两者和三者之间的关系结构。在一个三标网络中, 任意两个不同主体 x 和 y 之间的关系结构 (称为两者结构) 是指二元组 $(\{x, y\}, \lambda)$ 使得 $\lambda: \{(x, y), (y, x)\} \rightarrow \{+, -, \circ\}$ 为两者之间的两条边各赋予一个标记。不同构的两者结构共有六个:

- (1) $++$, 即 $L(x, y) = L(y, x) = +$;
- (2) $+-$, 即 $L(x, y) = L(y, x) = -$;
- (3) $+ -$, 即或者 $L(x, y) = +$ 且 $L(y, x) = -$, 或者 $L(x, y) = -$ 且 $L(y, x) = +$;
- (4) $+ \circ$, 即或者 $L(x, y) = +$ 且 $L(y, x) = \circ$, 或者 $L(x, y) = \circ$ 且 $L(y, x) = +$;
- (5) $- \circ$, 即或者 $L(x, y) = -$ 且 $L(y, x) = \circ$, 或者 $L(x, y) = \circ$ 且 $L(y, x) = -$;
- (6) $\circ \circ$, 即或者 $L(x, y) = L(y, x) = \circ$ 。

任意三个不同主体 x 、 y 和 z 之间的三者结构是指二元组 $(\{x, y, z\}, \lambda)$ 使得 $\lambda: \{e_1, e_2, e_3\} \rightarrow \{+, -, \circ\}$ (其中 $e_1 \in \{(x, y), (y, x)\}$, $e_2 \in \{(x, z), (z, x)\}$ 且 $e_3 \in \{(y, z), (z, y)\}$) 为三者中两两之间的各一条边赋予一个标记。不同构的三者结构较多, 这里不再逐一明确, 具体见图 3 中的直观表示。

两者和三者结构均划分为如下四种类型:

- 平衡型 (balanced): 结构中每个主体对另一主体的态度都得到结构的支持; 形式上来看, 即两者或三者结构中不含 $\circ$ 标记, 并且带 $-$ 标记的边刚好有偶数多条的那些;
- 无压力型 (pressure free): 结构中每个主体对另一主体的态度都没有改变的的压力; 形式上来看, 即两者或三者结构中至多只有一条边的标记不是 $\circ$ 的那些;
- 不平衡型 (unbalanced): 结构中每个主体对另一主体的态度都不具备可持续性; 即两者或三者结构中不含 $\circ$ 标记, 并且带 $-$ 标记的边刚好有奇数多条的那些;
- 部分平衡型 (partially balanced): 结构中某个/些主体对另一主体的态度具备可持续性, 而某个/些主体对另一主体的态度不具备可持续性; 即两者或三者结构中恰有一条边带 $\circ$ 标记的那些。

两者和三者结构对四种类型的划分分别如图 2 和 3 所示。直观上看, 平衡型和无压力型的结构通常可以维持和延续, 而不平衡型和部分平衡型结构中的全部或部分态度受到结构带来的促使改变的压力。

定义 2.2. 类平衡性。任给加权加标网络 N , 如果其三标转换网络 $\tau(N)$ 中的每个两者和三者结构都是平衡型或无压力型, 则称 N 是类平衡 (balanced-ish) 的。

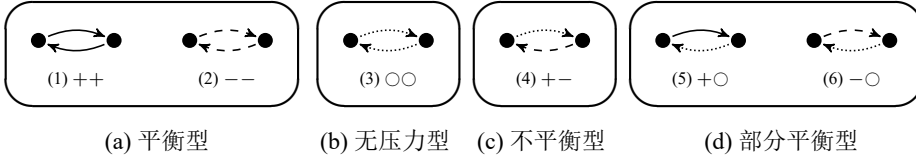


图 2: 实线箭头表示标记为 + 的有向边, 虚线箭头表示标记为 - 的有向边, 点线箭头表示标记为 ○ 的有向边。

结构平衡逻辑中可以刻画上面定义的平衡性概念。

命题 2.4. 如下公式分别刻画了网络上的对应概念:

- (1) $\text{pf}(a, b) := 0(a, b) \wedge 0(b, a)$ (“ ab 间的两者结构是无压力型”)
- (2) $\text{pf}(a, b, c) := (0(a, b) \wedge 0(c, b) \wedge 0(c, a)) \vee (0(a, b) \wedge 0(b, c) \wedge 0(c, a)) \vee$
 $(P(a, b) \wedge 0(c, b) \wedge 0(c, a)) \vee (P(a, b) \wedge 0(b, c) \wedge 0(c, a)) \vee$
 $(P(a, b) \wedge 0(c, b) \wedge 0(a, c)) \vee (P(a, b) \wedge 0(b, c) \wedge 0(a, c)) \vee$
 $(N(a, b) \wedge 0(c, b) \wedge 0(c, a)) \vee (N(a, b) \wedge 0(b, c) \wedge 0(c, a)) \vee$
 $(N(a, b) \wedge 0(c, b) \wedge 0(a, c)) \vee (N(a, b) \wedge 0(b, c) \wedge 0(a, c))$
 (“ abc 间的三者结构是无压力型”)
- (3) $\text{bal}(a, b) := (P(a, b) \wedge P(b, a)) \vee (N(a, b) \wedge N(b, a))$
 (“ ab 间的两者结构是平衡型”)
- (4) $\text{bal}(a, b, c) := (P(a, b) \wedge P(b, c) \wedge P(c, a)) \vee (P(a, b) \wedge P(c, b) \wedge P(c, a)) \vee$
 $(N(a, b) \wedge N(b, c) \wedge P(a, c)) \vee (N(a, b) \wedge N(c, b) \wedge P(c, a)) \vee$
 $(N(a, b) \wedge N(b, c) \wedge P(c, a)) \vee (N(b, a) \wedge N(b, c) \wedge P(a, c))$
 (“ abc 间的三者结构是平衡型”)
- (5) $\text{bal} := \forall xy(\text{pf}(x, y) \vee \text{bal}(x, y)) \wedge \forall xyz(\text{pf}(x, y, z) \vee \text{bal}(x, y, z))$
 (“当前网络是类平衡的”)

如此, 不难看出有如下有效式成立。

命题 2.5. 如下公式是结构平衡逻辑的有效式:

- (1) $\text{bal} \rightarrow \text{stb}$ (“类平衡性蕴涵稳定性”)
- (2) $\exists_{\geq |A|} x\varphi \leftrightarrow \forall x\varphi$ (“存在 $|A|$ 个主体”)

3 公理系统

本节探讨结构平衡逻辑的公理系统。由于网络的演变涉及数值变化, 而结构平衡逻辑的语言未包含可用于此类计算的机制, 导致公理系统的提出存在一定的

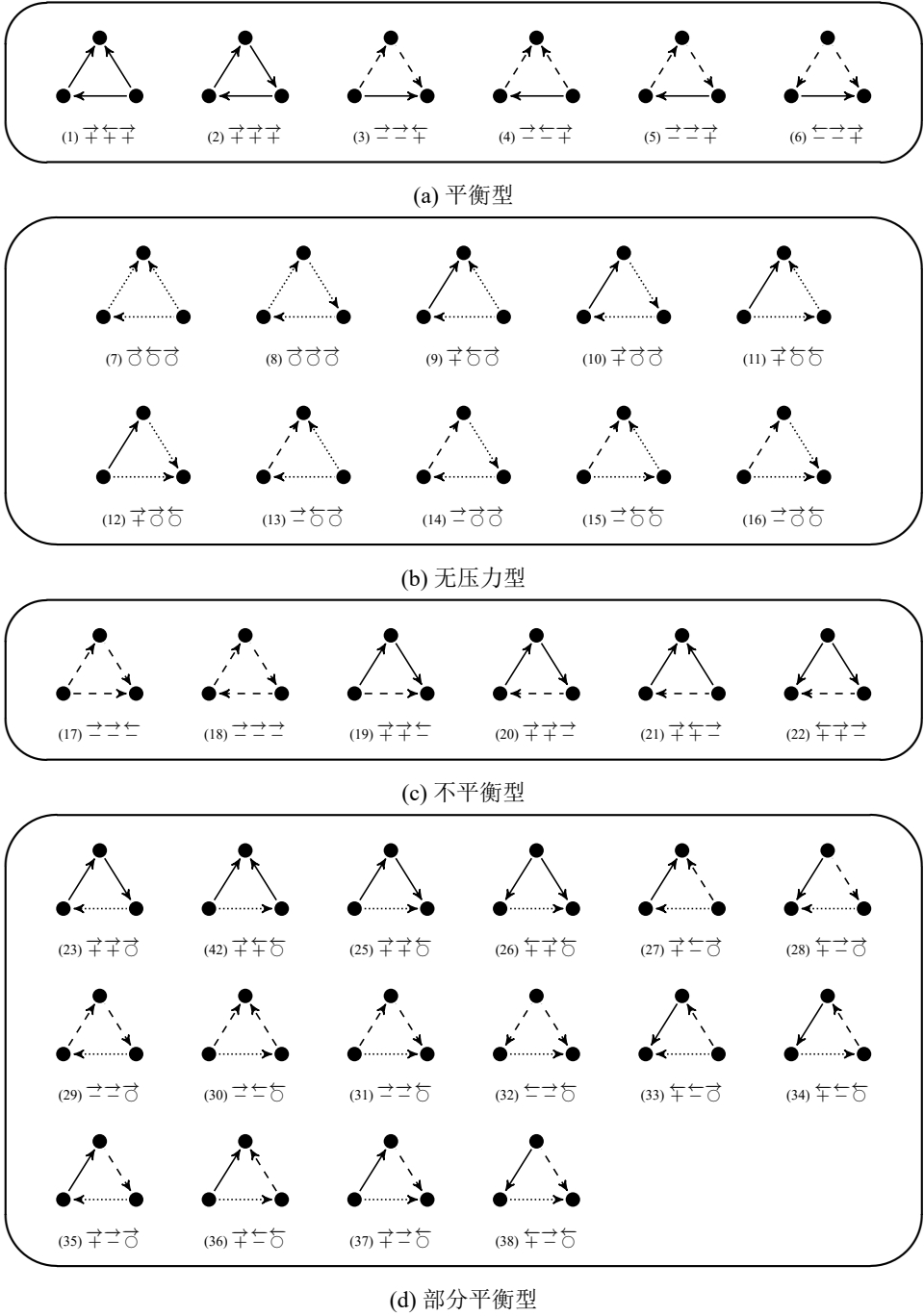


图 3: 实线箭头表示标记为 $+$ 的有向边, 虚线箭头表示标记为 $-$ 的有向边, 点线箭头表示标记为 $\circ$ 的有向边。

难度。这里采用 [17, 18] 中提出的基于网络描述的方法, 将其扩充并推广到适用于加权加标网络的情形。

3.1 网络及网络演化的描述

任给加权加标网络 $N = (A, E)$, 其描述 $\delta(N)$ 是公式 $\bigwedge_{x, y \in A: x \neq y} \epsilon(x, y)$ (其中 $\epsilon = E(x, y)$ 是区间 $[-1, 1]$ 中的实数)。⁵ 网络 N 到其后继的演化步骤可以通过明日公式 $tf(N) = \delta(N) \rightarrow \nabla\{\delta(N_1), \dots, \delta(N_m)\}$ 加以描述, 其中:

- $\{N_1, \dots, N_m\}$ ($m \geq 1$) 是 N 的所有后继的集合 (该集合有穷);
- ∇ 是覆盖模态词 (cover modality), 即其后接公式集完全描述了明天的所有可能情况 (其中每条公式分别描述了明天的一种情形); 即 $\nabla\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ 代表公式 $AX(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_m) \wedge EX\varphi_1 \wedge \dots \wedge EX\varphi_m$ 。⁶

将明日公式完全展开, 即

$$tf(N) = \delta(N) \rightarrow (AX(\delta(N_1) \vee \dots \vee \delta(N_m)) \wedge EX\delta(N_1) \wedge \dots \wedge EX\delta(N_m))$$

根据上述定义、网络后继及语义定义不难得到如下命题:

命题 3.1. 任给网络 N , N 是稳定的当且仅当 $\models tf(N) \leftrightarrow (\delta(N) \rightarrow \nabla\{\delta(N)\})$ 。

3.2 公理系统

使用网络及其演化的描述, 可以得到结构平衡逻辑的一个公理系统 $\mathbf{BL}_A$, 如图 5 所示。系统 $\mathbf{BL}_A$ 由两部分组成:

- 经典 CTL 系统, 这里采用 [3, 第 9 章] 中给出的系统 (图 4);
- 网络及其演化的有关公理和规则。

结构平衡逻辑的语言中包含了全套 CTL 算子, 语义解释完全符合 CTL 设定, 差别仅在于 (1) 对语言中的原子命题的形式做了限制, 且 (2) 语义模型从一般的时态模型改为网络演化模型——每个网络代替了一个时刻。这样的限制并不会对 CTL 系统的可靠性造成影响, 事实上所有公理和规则的有效性证明仍可按照 CTL 的可靠性证明加以完成。

系统 $\mathbf{BL}_A$ 新增加的公理和规则用于刻画网络及其演化的性质。其中, 公理 (Trichotomy) 称为三歧性公理, 刻画了主体对其他主体的态度要么正面, 要么负面, 要么中立; 其有效性易见。公理 (Self)(SN1)(SN2)(SN3) 和 (Num) 的有效性见

⁵三点说明: (1) 对任意两个不同的主体 $x, y \in A$, $E(x, y)$ 必为 -1 至 1 闭区间中的实数, 并因此 $\epsilon(x, y)$ 是原子公式; (2) 同一主体对自身没有态度值, 即 $E(x, x)$ 无定义, 这里也无需通过公式对其进行描述; (3) 该合取式不唯一, 但可通过固定 A 中主体的顺序使每个网络拥有唯一的描述。更多说明不妨参考 [17, 第 4.1.4 节]。

⁶通过规定网络的排序, 可以保证明日公式的唯一性, 但明日公式是否唯一在这里并非关键问题。

(PC)	所有命题重言式的代入
(K _X)	$AX(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (AX\varphi \rightarrow AX\psi)$
(D _X)	$EX\top$
(EU)	$EU(\varphi, \psi) \leftrightarrow (\psi \vee (\varphi \wedge EXEU(\varphi, \psi)))$
(AU)	$AU(\varphi, \psi) \leftrightarrow (\psi \vee (\varphi \wedge AXAU(\varphi, \psi)))$
(MP)	由 φ 和 $\varphi \rightarrow \psi$, 得到 ψ
(Nec)	由 φ , 得到 $AX\varphi$
(E-ind)	由 $(\psi \vee (\varphi \wedge EX\chi)) \rightarrow \chi$, 得到 $EU(\varphi, \psi) \rightarrow \chi$
(A-ind)	由 $(\psi \vee (\varphi \wedge AX\chi)) \rightarrow \chi$, 得到 $AU(\varphi, \psi) \rightarrow \chi$

图 4: CTL 的公理系统 [3]

命题 2.1: 三歧性公理同这些公理一起刻画了与主体间态度有关的一些性质。明日公理 (TF) 的有效性由上述定义易得。规则 (R1) 和 (R2) 保持有效性, 具体证明这里不再赘述。需要注意的是, 结构平衡逻辑是在给定的有穷非空主体集 A 上定义出来的 (语言和语义模型都依赖于相同的主体集); 相应地, 公理系统 $\mathbf{BL}_A$ 也以 A 为参数, 用于形式化 A 上的结构平衡逻辑。

3.3 完全性证明

完全性的证明思路类似于 [17, 18]: 定义任给网络的唯一描述, 并通过网络描述沟通语法证明与语义满足, 从而扮演“典范”网络的角色以得到结论。本节只提供与参考文献中不同情形的具体证明。

引理 3.1. 对任意网络的描述 δ 和任意公式 φ , 要么 $\vdash \delta \rightarrow \varphi$, 要么 $\vdash \delta \rightarrow \neg\varphi$ 。

证明. 首先证明 $\vdash \delta \rightarrow \varphi$ 和 $\vdash \delta \rightarrow \neg\varphi$ 不能同时成立。如若不然, 则 δ 本身不一致; 由 $\mathbf{BL}_A$ 的可靠性, 所有网络都不满足 δ ; 但另一方面, δ 是网络的描述, 根据定义, 在其所描述的网络中应当为真。

接下来证明 $\vdash \delta \rightarrow \varphi$ 和 $\vdash \delta \rightarrow \neg\varphi$ 至少有一项成立。施归纳于 φ 的结构:

- φ 是原子公式 $i(a, a)$ 、 $P(a, a)$ 或 $N(a, a)$ 。由公理 (Self) 知 $\neg i(a, a)$ 、 $\neg P(a, a)$ 和 $\neg N(a, a)$ 都是定理, 因此 $\vdash \delta \rightarrow \neg i(a, a)$ 。
- φ 是原子公式 $i(a, b)$ (其中 $a \neq b$)。如果 $i(a, b)$ 是 δ 的合取支, 则 $\vdash \delta \rightarrow i(a, b)$ 。否则有某个 $j \neq i$ 使得 $j(a, b)$ 是 δ 的合取支, 并因此 $\vdash \delta \rightarrow j(a, b)$ 。由公理 (SN1) 知 $\vdash j(a, b) \rightarrow \neg i(a, b)$, 并因此 $\vdash \delta \rightarrow \neg i(a, b)$ 。
- φ 是原子公式 $P(a, b)$ (其中 $a \neq b$)。根据描述的定义, δ 中必然存在形如 $i(a, b)$ 的合取支, 并因此 $\vdash \delta \rightarrow i(a, b)$ 。如果 $i > 0$, 则由公理 (SN2) 可

(CTL)	CTL 系统的所有公理和规则 (图 4)
(Self)	$\neg i(a, a) \wedge \neg P(a, a) \wedge \neg N(a, a)$
(Trichotomy)	$(P(a, b) \wedge \neg N(a, b) \wedge \neg 0(a, b)) \vee$ $(\neg P(a, b) \wedge N(a, b) \wedge \neg 0(a, b)) \vee$ $(\neg P(a, b) \wedge \neg N(a, b) \wedge 0(a, b))$ (其中 $a \neq b$)
(SN1)	$i(a, b) \rightarrow \neg j(a, b)$ (其中 $i \neq j$)
(SN2)	$i(a, b) \rightarrow P(a, b)$ (其中 $i > 0$)
(SN3)	$i(a, b) \rightarrow N(a, b)$ (其中 $i < 0$)
(TF)	所有明日公式
(R1)	由 $\delta \rightarrow \nabla \delta$, 得到 $\delta \rightarrow (AU(\varphi, \psi) \rightarrow \psi)$
(R2)	由 $\delta \rightarrow \nabla \delta$, 得到 $\delta \rightarrow (EU(\varphi, \psi) \rightarrow \psi)$
(Num)	$\exists_{\geq n} x \varphi \leftrightarrow \bigvee_{B \in \{X \subseteq A: X \geq n\}} (\bigwedge_{a \in B} \varphi[a/x])$

图 5: 公理系统 $\mathbf{BL}_A$, 其中参数 A 是给定的有穷非空主体集; 上述公理及规则中, φ 、 ψ 和 χ 代表任一公式, δ 代表任一网络的描述, $a, b, x \in A$ 且 $i, j \in [-1, 1]$ 。

得 $\vdash \delta \rightarrow P(a, b)$ 。如果 $i = 0$ 或 $i < 0$, 则由三歧性公理 (Trichotomy) 知 $\vdash \delta \rightarrow \neg P(a, b)$ 。

- φ 是原子公式 $N(a, b)$ (其中 $a \neq b$)。该情形可通过类似于上一项的方法证明, 其中公理 (SN2) 处改用 (SN3)。
- 剩余情形均可参照 [18, 引理 2] 的证明给出。

由此可知 $\vdash \delta \rightarrow \varphi$ 与 $\vdash \delta \rightarrow \neg \varphi$ 恰有一项成立。 $\square$

引理 3.2 ([18, 引理 3]). 任给极大一致的公式集 Φ 、描述 δ 和公式 φ , 若 $\delta, \varphi \in \Phi$, 则 $\vdash \delta \rightarrow \varphi$ 。

任给极大一致的公式集 Φ , 定义网络 $N^\Phi = (A, E)$ 使得: 对任意 $a, b \in A$,

$$E(a, b) = \begin{cases} i, & \text{如果 } i(a, b) \in \Phi, \\ \text{无定义}, & \text{否则} \end{cases}$$

公理系统 $\mathbf{BL}_A$ 保证 N^Φ 存在且唯一。

引理 3.3. 令 Φ 为极大一致集, 且 δ 为某个网络的描述, 则如下三个命题等价:

- (1) $N^\Phi \models \delta$
- (2) δ 描述网络 N^Φ
- (3) $\delta \in \Phi$

证明. 可参考 [18, 引理 4] 给出。□

令 Φ 为极大一致的公式集, 由上述引理易得 $N^\Phi \models \Phi$ 。系统 $\mathbf{BL}_A$ 的完全性是其推论:

定理 3.4 (强完全性). 任给有穷非空主体集 A 和公式 φ , 任给 $\mathbf{BL}_A$ 中的极大一致公式集 Φ , 如果 $\Phi \models \varphi$, 那么 $\Phi \vdash_{\mathbf{BL}_A} \varphi$ 。

4 结语

在结构平衡逻辑 ([8, 9, 17]) 的基础上, 本文将关注点拓展到带权重的网络; 由此引入加权加标网络上的结构平衡逻辑, 推广了稳定性、平衡性等有关概念, 并探讨了该逻辑的表达能力和公理系统。本文的工作看起来似乎只是已有概念、理论和方法的普通推广, 但其价值至少可以从如下两个方面来看:

一、加权网络具备很强的实用价值。真正的社会网络如果仅采用不带权重的图来加以刻画, 则在很多时候会失掉其代表性, 毕竟在现实场景下关系或态度的强度往往并不能忽略。因而这样的推广本身即提供了很好的研究动机, 并与 [10] 开创的基于加权网络的经验研究形成了互动。

二、结构平衡逻辑在加权网络上的推广并非简单平庸的工作。将网络中的标记从两三个 ([9] 中考虑三个标记: +、- 和 $\circ$) 推广到无穷多个 (本文中的标记集是 $[-1, 1]$) 直接增加了技术难度。例如语义定义中有很多细致的考量, 又如逻辑的有效性检测上界无法再采用穷举法。

计算复杂性则变得较为艰难。虽依然可以如 [8, 9] 一般得到模型检测和可满足性问题的 PSPACE 下界, 但上界则不容易获得。主要问题在于权重数量的无穷 (特别是数值的稠密性) 使得网络的演化路径有可能无穷, 从而对形如 $\mathbf{AU}(\varphi, \psi)$ 和 $\mathbf{EU}(\varphi, \psi)$ 等公式的真值判断不再直接。这一问题将留待后续加以探究。

除此以外, 未来还将尝试在此框架下进一步探讨与结构平衡有关的工作, 包括“为何”会实现平衡以及与结构平衡有关的社会网络分析领域中的既定研究问题。

参考文献

- [1] D. Cartwright and F. Harary, 1956, “Structure balance: a generalization of Heider’s theory”, *Psychological Review*, **63**(5): 277–293.
- [2] Z. Christoff and J. U. Hansen, 2015, “A logic for diffusion in social networks”, *Journal of Applied Logic*, **13**(1): 48–77.
- [3] R. Goldblatt, 1992, *Logics of Time and Computation*, Revised and Expanded, CSLI.

- [4] F. Harary, 1953, “On the notion of balance of a signed graph”, *Michigan Mathematical Journal*, **2(2)**: 143–146.
- [5] F. Harary, R. Z. Norman and D. Cartwright, 1965, *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs*, New York: John Wiley & Sons Inc.
- [6] F. Heider, 1944, “Social perception and phenomenal causality”, *Psychological Review*, **51(6)**: 358.
- [7] F. Heider, 1946, “Attitudes and cognitive organization”, *The Journal of Psychology*, **21(1)**: 107–112.
- [8] W. van der Hoek, L. B. Kuijter and Y. N. Wáng, 2018, “A logic of allies and enemies”, *Thirteenth Conference on Logic and the Foundations of Game and Decision Theory (LOFT)*.
- [9] W. van der Hoek, L. B. Kuijter and Y. N. Wáng, 2020, “Logics of allies and enemies: a formal approach to the dynamics of social balance theory”, in C. Bessière(ed.), *Proceedings of the Twenty-Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-20*, pp. 210–216, International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization.
- [10] J. O. Morrisette, 1958, “An experimental study of the theory of structural balance”, *Human Relations*, **11(3)**: 239–254.
- [11] T. M. Newcomb, 1961, *Acquaintance Process*, New York: Holt, Rinehart & Winston.
- [12] S. F. Sampson, 1968, *A Novitiate in a Period of Change: An Experimental and Case Study of Social Relationships*, phdthesis, Cornell University.
- [13] J. Seligman, F. Liu and P. Girard, 2011, “Logic in the community”, *Indian Conference on Logic and Its Applications*, pp. 178–188.
- [14] S. Smets and F. R. Velázquez-Quesada, 2017, “The creation and change of social networks: a logical study based on group size”, *International Workshop on Dynamic Logic*, pp. 171–184.
- [15] L. B. K. Wiebe van der Hoek and Y. N. Wáng, 2019, “Who should be my friends? social balance from the perspective of game theory”, *Proceedings of the Seventh International Conference on Logic, Rationality and Interaction (LORI-VII)*.
- [16] Z. Xiong, T. Ågotnes, J. Seligman and R. Zhu, 2017, “Towards a logic of tweeting”, *International Workshop on Logic, Rationality and Interaction*, pp. 49–64.
- [17] 王轶, 逻辑、博弈与计算: 社会网络平衡研究, 南京: 江苏人民出版社, 2021 年。
- [18] 王轶、骆犀羚, “结构平衡理论的时态模型: 形式系统与程序实现”, 逻辑学研究, 2019 年第 2 期, 第 27–42 页。

(责任编辑: 袁之)

Stability and Balance in Many-Signed Networks

Yi N. Wáng Huimin Dong[✉]

Abstract

The classical theory of structural balance provides an extensive study of 2-signed networks. Morrisette (1958) expanded this framework to encompass many-signed networks and applies it to empirical fields. Recent advancements in structural balance theory have incorporated temporal logic, specifically Computation Tree Logic (CTL). However, these studies have been limited to 2-signed networks. Our research extends this temporal approach to many-signed networks. We introduce formal languages and semantics tailored to this expanded framework, analyze the expressive power of the resulting logics, and develop axiomatizations for them.

Yi N. Wáng

Department of Philosophy (Zhuhai), Sun Yat-sen University
ynw@xixilogic.org

Huimin Dong[✉]

Institute of Logic and Computation, TU Wien
huimin@logic.at