逻辑学研究　2024 年第 2 期，56–72
文章编号：1674-3202(2024)-02-0056-17

交错群 A_4 在布尔系统上的不可表示性

曹航杰　　　　熊明

摘　要：非非悖论是一类比较典型的具有对称性的语义悖论，这类悖论的对称性都可用置换群进行刻画。当一个置换群刻画了某个悖论的对称性时，我们称此置换群可由该悖论表示。Hisung（2022）提出如下猜测：任意置换群都可由非非类型的悖论表示。本文通过使用群映射等概念来分析群作用到真值序列集上的轨道和稳定化子，证明了交错群 A_4 不能被任何布尔系统表示。这表明如果把非非类型的悖论限制在布尔悖论的范围内，并不是每个置换群都能由非非类型悖论来表示。本文还通过置换群直和构造给出了其他不能被布尔系统表示的置换群例子。研究表明不可被布尔系统表示的置换群不是孤立的，而是有一定存在基础的。

关键词：非非悖论；布尔系统；对称性；置换群；可表示

中图分类号：B81　　　　**文献标识码：**A

1　引言

有些悖论与其语句形式上的对称性密切相关。这方面最简单的一个例子是所谓的非非悖论（the no-no paradox）。它由两个语句构成，其中每个语句都说另一个语句为假。通常情况下，我们会认为这两个语句并没有产生悖论，因为若使这两个语句一个为真另一个为假并不会导致矛盾。然而，如果看到这两个语句在形式上是对称的，那么它们在真值上也必须是无法分辨的。这正是 Sorensen 所指出的一个对称性赋值原则：相互对称的语句只能被赋予同一真值。（[12]，第 166–167 页）这样上述两个语句因为没有这样的赋值而被认为是悖论的。[1] Sorensen 还指出

收稿日期：2023-10-20
作者信息：曹航杰　华南师范大学哲学与社会发展学院
caohangjie@163.com
熊明　华南师范大学哲学与社会发展学院
mingshone@163.com

[1] 这一语句组的提出归功于布里丹（J. Buridan），戈德斯坦（L. Goldstein）在 [5] 中也指出了这一语句组赋值的对称性问题。

上述悖论现象并不限于非非悖论（[12]，第 170 页），考虑如下形式的语句集：

$$\text{语句 } (\delta_n) \text{ 为假} \tag{δ_1}$$

$$\text{语句 } (\delta_1) \text{ 为假} \tag{δ_2}$$

……

$$\text{语句 } (\delta_{n-1}) \text{ 为假} \tag{δ_n}$$

当 n 是奇数时，上述语句集在通常意义下是悖论的；而当 n 是偶数时，上述语句集合就属于 Sorensen 指出的那种对称性悖论，非非悖论正是上述一般情形中的 $n=2$ 时的特例。除此之外，下面的例子也来自于 Sorensen（[12]，第 175 页）：

$$\text{此列语句中除 } (\delta_n) \text{ 外的某个语句为假} \tag{δ_1}$$

$$\text{此列语句中除 } (\delta_1) \text{ 外的某个语句为假} \tag{δ_2}$$

……

$$\text{此列语句中除 } (\delta_{n-1}) \text{ 外的某个语句为假} \tag{δ_n}$$

非非悖论及其更复杂的变体的一般特征是：它们在形式上具有对称性但又缺乏对称性赋值。此种悖论自提出后引起了逻辑学界的关注，Goldstein （[5]）、Armour-Garb 与 Woodbridge （[1]）及 Cook （[3]）等人先后对此悖论展开哲学与逻辑上广泛深入的探讨。他们主要围绕产生这一悖论的逻辑条件进行分析。这里，延续文 [9] 借助置换群对上述对称性悖论的刻画思想，我们把研究聚焦于非非类型悖论的对称性。

注意，悖论语句集（或其标签）上的置换自然地作用于语句集。如果一个悖论在此置换的作用下能够保持不变，那么可以认为此悖论关于此置换对称。而置换群刻画某个悖论的对称性则是指，恰是此群中的置换使得对应悖论的所有语句在置换变换后保持不变，从而我们认为该置换群正反映了对应悖论的对称性。

具体而言，对非非悖论中的两个语句进行对换，即 δ_1 变为 δ_2，δ_2 变为 δ_1，得到的仍然是非非悖论。上述变换一般表示为置换 (12)。保持非非悖论不变的变换还有恒等映射。因此，保持非非悖论在 (12) 和恒等映射（记为 e）这两个置换下保持不变。这两个置换构成了对称群 S_2。在此意义上，非非悖论的对称性由对称群 S_2 刻画。更一般地，前面提到的第二例子中的语句集 $\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$ 的对称性由置换 $(12\dots n)$ 生成的循环群 C_n 来刻画。在同样的意义下，第三例子中的语句集则对应对称群 S_n。[2] 由此，一个相反的问题是：是否每个置换群，都有一个悖论，其对称性恰好由此置换群来刻画。这实际上引发了置换群在悖论上可表示问题的研究。对于一个置换群 G，如果存在布尔系统，其对称性由 G 刻画，那么就称 G 是可表示的。对此，有下述猜想：

[2] 参见文 [9] 第 1930 页。关于置换群的定义及置换群与悖论之间的关系，详见本文第 2节。

> 对于任意 n，以及任意 S_n 的非平庸子群 G，我们可以构造一个非非类型悖论的对称性恰好由 G 刻画。（[9]，第 1930 页）

但是本文的研究将表明，如果对于置换群不做限定那么这个猜想不成立。而且这一否定性的结论基于布尔系统意义上的不可表示性：存在着置换群不能被任何布尔系统表示，并因此不能被任何非非类型悖论所表示。具体地，我们发现了四元交错群 A_4 与 S_4 之间具有一种 B-扩张关系，这将使得前者是不可表示的。

证明的大致思路是：对任何一个布尔系统，如果它能够在四元交错群的每个置换下保持不变，那么也一定在对称群 S_4 的每个置换下保持不变。换言之，对称性一定会超过 A_4，因此布尔系统的对称性不会刚好由 A_4 来刻画。我们将引入置换群的"B-扩张"概念来具体展开上述想法。

本文除了证明交错群 A_4 是不可表示的之外，还会讨论置换群直和构造的可表示性。我们发现，两个可表示的置换群的直和也将是可表示的（定理 5.1 ）。对于不可表示性，置换群已知的 B-扩张能够在直和的层面被重新构建，应用证明 A_4 不可表示的方法，我们将能够得到直和构造下不可表示的实例。

本文的结构如下。第 2 节在带真谓词的算术语言中给出布尔系统概念，并解释其对称性的描述方法。第 2 节还将为布尔系统的对称性提供了一个真值语义上的等价条件，由此将对称性问题简化为布尔系统转移函数的配置问题。第 3 节分析了实现转移函数的特定对称性的必要条件和充分条件，并提供了一种限制条件下的实现给定置换群对称性的布尔系统的构造。在第 4 节，置换群的 B-扩张关系被引入，借助这个概念我们将论证，转移函数的实际配置如果对某个置换群的对称性是必要的，则对它的 B-扩张置换群的对称性是充分的。然后，我们说明了一个具体的置换群 A_4 有一个真包含它的 B-扩张，进而说明 A_4 不能是任意布尔系统的对称群。第 5 节引入置换群的直和构造，通过直和构造得到其他不可表示置换群。第 6 节回顾了本文的主要结论，并对后续研究进行展望。

2 布尔系统及其对称性

本文使用分析悖论的标准语言，即在皮亚诺算术语言 $\mathfrak{L}$ 基础上添加真谓词符 T 得到的一阶语言 $\mathfrak{L}_T$。我们将固定算术结构 $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, ', +, \cdot, 0\rangle$ 作为 $\mathfrak{L}$ 的模型，因此 $\mathfrak{L}_T$ 的模型都形如二元组 $\mathcal{M} = \langle \mathfrak{N}, X\rangle$，其中 X 作为 $\mathscr{T}$ 的外延是 $\mathfrak{N}$ 的子集。以后，除非特别申明，公式或语句都相对于 $\mathfrak{L}_T$ 而言。给定模型 $\mathcal{M} = \langle \mathfrak{N}, X\rangle$，$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$ 则表示从 $\mathfrak{L}_T$ 公式集到真值集 $\{1, 0\}$ 的赋值函数，如果 $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(A) = 1$，则称语句在模型 $\mathcal{M}$ 中为真。特别地，对语句 A，$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(T\ulcorner A\urcorner) = 1$ 当且仅当 $\ulcorner A\urcorner \in X$，其中 $\ulcorner\delta\urcorner$ 既表示 $\mathfrak{L}_T$ 公式 δ 的哥德尔编码，又可表示这个编码对应的数字项，在记号上

不加区分。[3]

非非类型的悖论都可归入一大类被称为布尔系统的语句集。设 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是某个 n-元布尔函数的代数表达式，如果把 n 个公式 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ 对应变元指派 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 进行代入，得到的表达式 $F(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ 可称为这些公式的布尔组合。（[8]，第 887 页）

定义 2.1 ([8]，第 888 页)**.** 布尔系统是指这样的语句集 $\Sigma = \{\delta_i | 1 \leq i \leq n\}$，其中每个语句 δ_i 都对应一个布尔组合 $F_i(T\ulcorner\delta_1\urcorner, \ldots, T\ulcorner\delta_n\urcorner)$，且 δ_i 与对应的布尔组合式形成的等值式，即：

$$\delta_i \leftrightarrow F_i(T\ulcorner\delta_1\urcorner, T\ulcorner\delta_2\urcorner, \ldots, T\ulcorner\delta_n\urcorner)$$

在所有模型中为真。

布尔系统都可通过哥德尔的不动点定理获得，细节略去。为简便起见，以后列出的等值式都意味者它在每个形如 $\langle\mathfrak{N}, X\rangle$ 的模型上为真，不再一一指明。例如，非非悖论对应语句集 $\{\delta_1, \delta_2\}$，其中 δ_1 和 δ_2 满足下述两个等值式：

$$\begin{cases} \delta_1 \leftrightarrow \neg T\ulcorner\delta_2\urcorner \\ \delta_2 \leftrightarrow \neg T\ulcorner\delta_1\urcorner \end{cases}$$

下面的定义说明了如何使用置换来刻画包含非非类型悖论在内的布尔系统的对称性。指标集 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的置换是指从 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 到其自身的双射。本文以代数的标准记法来表示置换，即按照轮换（cycle）的形式表示置换。例如，$\{1, 2, 3\}$ 上的置换 τ 满足 $\tau(1) = 1, \tau(2) = 3, \tau(3) = 2$，它的轮换分解形式写作 (1)(23)（根据上下文，可简化为 (23)）。$\{1, 2, \ldots\ldots, n\}$ 上的恒等映射则一般地记为 e。集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上所有置换构成了一个群，被称为 n 次对称群，记为 S_n。注意到 S_n 的单位元就是恒等映射 e。S_n 的子群都称为是一个置换群。

定义 2.2 ([9]，第 1926 页)**.** 设 Σ 为定义 2.1 中的布尔系统，σ 是集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的置换。如果对任意 $1 \leq i \leq n$，

$$F_i\left(T\ulcorner\delta_{\sigma(1)}\urcorner, T\ulcorner\delta_{\sigma(2)}\urcorner, \ldots, T\ulcorner\delta_{\sigma(n)}\urcorner\right) \leftrightarrow F_{\sigma(i)}\left(T\ulcorner\delta_1\urcorner, T\ulcorner\delta_2\urcorner, \ldots, T\ulcorner\delta_n\urcorner\right)$$

那么称 Σ 是 σ-对称的。

一个基本的事实是：对任意布尔系统 Σ，$\left\{\sigma \in \delta_n \mid \Sigma\text{是}\sigma\text{-对称的}\right\}$ 构成了一个群，此群被认为 Σ 的对称群。（[9]，第 1926 页）换言之，该对称群在布尔系统 Σ 上**可表示**。引论提到的问题本质上就是研究在布尔系统上可表示的群究竟有哪些。

[3]也就是说，后文中形如 $T\ulcorner\delta\urcorner$ 的语句总是指 $T(\overline{\ulcorner\delta\urcorner})$。

一个布尔系统，如果它的对称群是平凡群 $\{e\}$，那么可认为此布尔系统不具有（非平凡的）对称性。不难看出，非非悖论的对称群是 $S_2 = \{e, (12)\}$。一般地，引论中第二个例子中的布尔系统的对称群是由 $(12\ldots n)$ 生成的 n 阶循环群，而第三个例子的对称群则是 S_n。

为了方便研究置换群与布尔系统的对称性之间的关联，我们把布尔系统的对称性特征归结为真值序列（或二进制数组）之间映射的特征。在下文中，如数学中的惯常做法那样，我们将用同一符号表示布尔函数本身及其对应布尔表达式。于是，对于 n 元布尔函数 F 和语句 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ 有

$$F\left(\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(\delta_1\right), \mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(\delta_2\right), \ldots, \mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(\delta_n\right)\right) = \mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(F\left(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\right)\right).$$

左侧的 F 代表布尔函数本身，而右侧的 F 代表此函数的布尔表达式。

令 $\boldsymbol{B} = \{0, 1\}$。对任意正整数 n，$\boldsymbol{B}^n$ 中的元素将被称为 n 元真值序列，一般地用符号 x 表示。

定义 2.3 ([14]，第 1043 页). 设 Σ 为定义 2.1 中的布尔系统，如果

$$f(x) = \left(F_1(x), \ldots, F_n(x)\right)$$

则称 $f : \boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}^n$ 是由 Σ 转移函数。[4]

置换能自然地作用于真值序列，如下规定。

定义 2.4. 设 G 是 S_n 的一个子群，g 是 G 中的任意置换，$x = (\epsilon_1\, \epsilon_2 \cdots \epsilon_n)$ 是 n 元真值序列，定义 $g \cdot x$ 如下：

$$g \cdot x = g \cdot \left(\epsilon_1\ \epsilon_2 \cdots \epsilon_n\right) := \left(\epsilon_{g(1)}\ \epsilon_{g(2)} \cdots \epsilon_{g(n)}\right).$$

例如，$(13) \cdot (1001) = (0011)$。下面的命题给出了布尔系统的 σ-对称性的一个等价条件。

命题 2.1. 设 Σ 为定义 2.1 中的布尔系统，$\sigma \in S_n$。Σ 是 σ-对称的，当且仅当，Σ 的转移函数 f 满足以下条件：对任意 $x \in \boldsymbol{B}^n$，$f(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot f(x)$。

证明. 对于任意语义模型 $\mathcal{M} = \langle \mathfrak{N}, X \rangle$，$T\ulcorner\delta_1\urcorner, T\ulcorner\delta_2\urcorner, \ldots, T\ulcorner\delta_n\urcorner$ 的赋值情况都能可以通过一个 n 元真值序列 $x = (\epsilon_1\, \epsilon_2 \cdots \epsilon_n)$ 表示，满足 $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(T\ulcorner\delta_i\urcorner\right) = \epsilon_i$。而反过来，任意的 n 元真值序列 $x = (\epsilon_1\, \epsilon_2 \cdots \epsilon_n)$ 都能表示任意模型对 $T\ulcorner\delta_1\urcorner, \ldots, T\ulcorner\delta_n\urcorner$

[4] 相似的概念也被称为克里普克跳跃算子（Kripke Jump，[7]，第 64 页）。在文献 [14] 中，这个函数被称为“从修正序列中诱导出来的函数”（induced from the revision sequence）。本文使用的名称（transition function）直接来源于文 [13] 第 214 页。

的赋值情况，满足 $\mathcal{V}(T\ulcorner\delta_i\urcorner)=\epsilon_i$。根据 $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$ 的赋值规则，我们分别有：

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(F_i\left(T\ulcorner\delta_{\sigma(1)}\urcorner,\ldots,T\ulcorner\delta_{\sigma(n)}\urcorner\right)) &= F_i\left(\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(T\ulcorner\delta_{\sigma(1)}\urcorner\right),\ldots,\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(T\ulcorner\delta_{\sigma(n)}\urcorner\right)\right)\\
&= F_i\left(\epsilon_{\sigma(1)},\epsilon_{\sigma(2)},\ldots,\epsilon_{\sigma(n)}\right)\\
\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(F_{\sigma(i)}\left(T\ulcorner\delta_1\urcorner,\ldots,T\ulcorner\delta_n\urcorner\right)\right) &= F_{\sigma(i)}\left(\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(T\ulcorner\delta_1\urcorner\right),\ldots,\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(T\ulcorner\delta_n\urcorner\right)\right)\\
&= F_{\sigma(i)}\left(\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n\right)
\end{aligned}$$

σ-对称性意味着 $F_i\left(T\ulcorner\delta_{\sigma(1)}\urcorner,\ldots,T\ulcorner\delta_{\sigma(n)}\urcorner\right)\leftrightarrow F_{\sigma(i)}\left(T\ulcorner\delta_1\urcorner,\ldots,T\ulcorner\delta_n\urcorner\right)$，即对任意赋值 $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$ 有 $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(F_i\left(T\ulcorner\delta_{\sigma(1)}\urcorner,\ldots,T\ulcorner\delta_{\sigma(n)}\urcorner\right)\right)=\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\left(F_{\sigma(i)}\left(T\ulcorner\delta_1\urcorner,\ldots,T\ulcorner\delta_n\urcorner\right)\right)$，也就是说，$F_i\left(\epsilon_{\sigma(1)},\epsilon_{\sigma(2)},\ldots,\epsilon_{\sigma(n)}\right)=F_{\sigma(i)}\left(\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n\right)$。后者要在给定任意模型的条件下成立，当且仅当，对任意 $x\in\boldsymbol{B}^n$，$f(\sigma\cdot x)=\sigma\cdot f(x)$。 □

置换对真值序列的变换（定义 2.4 ）具有特殊的代数性质，它是一个群作用（group action）。置换群 G 在集合 X 上的群作用是一个二元运算 $\cdot: G\times X\to X$，满足 $(g\circ h)\cdot x=g\cdot(h\cdot x)$ 以及 $e\cdot x=x$。易验证定义 2.4 引入的运算正是 $\boldsymbol{B}^n$ 上的群作用。真值序列集也因此具有了相对于该运算的特定代数性质。

设 G、H 是群，$G\leqslant H$ 表示 G 是 H 的子群，$G<H$ 则表示 G 是 H 的真子群。置换群理论更多的知识可参见文 [4]。下文会在适当的地方引入必需的群论概念和记号。

3　G-映射与可表示的置换群

命题 2.1 说明对称布尔系统的构造任务现在实质上是一个转移函数配置的工作。此工作可分成两个部分：对 G 中的 σ，需确保对任意 $x\in\boldsymbol{B}^n$，$f(\sigma\cdot x)=\sigma\cdot f(x)$（正面要求）；对 G 外的 σ，要有 $x\in\boldsymbol{B}^n$ 使 $f(\sigma\cdot x)\neq\sigma\cdot f(x)$（负面要求）。为讨论正面要求部分，先引入一个概念：

定义 3.1 ([11]，第 260 页). 群 G 作用于集合 X。称函数 $f: X\to X$ 是 G-映射（G-map），如果对任意 $\sigma\in G$，任意 $x\in X$，$f(\sigma\cdot x)=\sigma\cdot f(x)$。

本文仅关注 $X=\boldsymbol{B}^n$ 的情况。注意到，如果群 G 中的置换 σ 不改变真值序列 x 的取值，即 $\sigma\cdot x=x$，那么对于映射 f 来说，有 $f(x)=f(\sigma\cdot x)=\sigma\cdot f(x)$。换言之，保持真值序列 x 不变的置换也应对转移函数的取值 $f(x)$ 保持不变。

上述观点可以更一般地表述，为此引入稳定化子的概念。当群 G 作用于集合 X 上时，对于 $x\in X$，x 的稳定化子 $G(x)$ 是由那些在作用后不改变 x 的元素组成的集合，即 $G(x)$ 定义为 $\{\sigma\in G\mid\sigma\cdot x=x\}$.

还需引入 G-轨道的概念。考虑置换 G 作用于集合 X，设 $x,y\in X$。如果存在 $g\in G$ 使得 $g\cdot x=y$，则称 y 在 G 下与 x 等价，记作 $y\sim^G x$。易见 $\sim^G$ 是一个

等价关系。按此等价关系给出的 x 的 G-轨道 $[x]^G$，即：

$$[x]^G := \{y \in X \mid y \sim^G x\} = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

所有 G-轨道构成了对 X 的一个划分。特别地，按定义 2.4 给出的作用，真值序列集 $\boldsymbol{B}^n$ 划分为若干个不相交的轨道，即形如 $[x]^G = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ 的 $\boldsymbol{B}^n$ 子集。

引理 3.1. 如果 f 是定义在 $\boldsymbol{B}^n$ 上的 G-映射，那么 f 满足以下条件：

(1) 对于任意 $x \in \boldsymbol{B}^n$，x 的稳定化子 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的稳定化子 $G(f(x))$ 的子群，即 $G(x) \leqslant G(f(x))$。

(2) 对于 $\boldsymbol{B}^n$ 的任意 G-轨道 $[x]^G$，其中的任意元素 $y = g \cdot x$（$g \in G$），都有 $f(y) = g \cdot f(x) \in [f(x)]^G$。

引理 3.1 表达了 G-映射的两个必要条件。(1) 是因为 f 应当是函数，需确保对相同序列的取值一致：如果 $\sigma \cdot x = x$，即 $\sigma \in G(x)$，那么必定有 $f(\sigma \cdot x) = f(x)$。由于任意 $x \in \boldsymbol{B}^n$ 有 $f(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot f(x)$，所以 $\sigma \cdot f(x) = f(x)$，即 $\sigma \in G(f(x))$。对于 (2)，只需注意到 $f(y) = f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ 即可。

定理 3.2. 给定任意 S_n 的子群 G，都可构造一个 $\boldsymbol{B}^n$ 上的 G-映射。

证明. 我们按照以下步骤构造一个 $\boldsymbol{B}^n$ 上的函数 f：

(i) G 的作用将 $\boldsymbol{B}^n$ 划分成若干轨道，考虑其中的任意轨道 $[x]^G$，为其代表元 x 赋予一个函数值 $f(x) = a$，其中 a 满足 $G(x) \leqslant G(a)$。

(ii) 接下来，在该轨道中的其他元素上继续生成函数值，对于任意 $g \cdot x \in [x]^G$，定义 $f(g \cdot x) = g \cdot a$

这里的生成的函数值是良定义的。如果 $g \cdot x = h \cdot x$，则 $h^{-1}g \in G(x)$，然后 $h^{-1}g \in G(a)$，因此 $g \cdot a = h \cdot a$，即 $f(g \cdot x) = f(h \cdot x)$。所有 $\boldsymbol{B}^n$ 的轨道都按照以上方式生成轨道中各元素的函数赋值。

该函数是一个 G-映射: 任意的 $\boldsymbol{B}^n$ 上的序列 y，必定唯一地属于某个 G-轨道 $[x]^G$，根据轨道的定义，存在 $g \in G$ 使得 $y = g \cdot x$。再考虑任意 $\sigma \in G$，

$$\begin{aligned}
f(\sigma \cdot y) = f(\sigma \cdot (g \cdot x)) &= f((\sigma g) \cdot x) && \text{（群作用条件）} \\
&= (\sigma g) \cdot f(x) && （\sigma g \in G） \\
&= \sigma \cdot (g \cdot f(x)) && \text{（群作用条件）} \\
&= \sigma \cdot f(g \cdot x) = \sigma \cdot f(y) && （g \cdot f(x) = f(g \cdot x)）
\end{aligned}$$

□

定理 3.2 给出的 G-映射构造过程被称为为轨道封闭性构造模式。该构造模式产生的函数仅满足了前述的正面要求部分，它可能产生超出给定置换群的 G-映射。考虑负面要求部分，我们需要引入一些额外的概念。设 G、H 是 S_n 的子群，若 G 是 H 的非平凡子群时，则 H 可以被写作 G 和 G 左陪集的不交并形式，即 $H = G \uplus h_1 G \uplus \cdots \uplus h_{m-1} G$。特别地，当 H 是 S_n 时，集合 $\{h_1, \ldots, h_{m-1}\}$ 被称为 G 的截线（transversal）。[5] 关于负面要求，下面的结果说明了我们无需逐个排除置换在 G 之外的情况：

定理 3.3. 设 f 是 $\boldsymbol{B}^n$ 上的 G-映射，$\{h_1, \ldots, h_{m-1}\}$ 是 G 的截线。如果对于任意截线中的 h_i 都能找到 $x_i \in \boldsymbol{B}^n$，使得 $h_i \cdot f(x_i) \neq f(h_i \cdot x_i)$，则对于所有 $\sigma \in S_n$ 且 $\sigma \notin G$，都存在 $y \in \boldsymbol{B}^n$ 使得 $\sigma \cdot f(y) \neq f(\sigma \cdot y)$。

证明. σ 属于某个 G 的左陪集 $h_i G (h_i \neq e)$，因此 σ 又写作 $\sigma = h_i g$，$g \in G$。

根据前提，对于截线中的 h_i，存在 $x_i \in \boldsymbol{B}^n$，使得 $h_i \cdot f(x_i) \neq f(h_i \cdot x_i)$。此时对 $h_i G$ 中的置换 $h_i g$，找到 $g^{-1} \cdot x \in \boldsymbol{B}^n$，使得

$$f((h_i g) \cdot (g^{-1} \cdot x_i)) = f(h_i \cdot x_i) \neq h_i \cdot f(x_i) = h_i \cdot g \cdot g^{-1} \cdot f(x_i) = (h_i g) \cdot f(g^{-1} \cdot x_i)$$

□

反过来讲，如果截线中的某个置换 h_i 的对称性没有被排除，那么可以由 G 中的所有置换加上 h_i 生成得到一个群 H，而 f 将是一个 H-映射。G 一定是 H 的真子群，因为 $h_i \notin G$，于是 f 的对称性超过了 G。总而言之，排除截线的对称性对于我们的构造任务不仅是充分的，而且是必要的。

考虑 S_3 的子群 3 阶循环群 $C_3 = \{e, (123), (132)\}$ 的情况，我们来构造一个以 C_3 作为对称群的布尔系统。为此，需要构造一个 C_3-映射 f，且它不是 S_3-映射。下面将结合表 1 来说明 f 的构造过程。在这个表中，x 所在行表示 $\boldsymbol{B}^3$ 中的 8 个真值序列，$f(x)$ 所在行则表示对这 8 个序列的转移函数配置。

首先注意，C_3 作用至 $\boldsymbol{B}^3$ 产生 4 个轨道，图中 x 所在行以竖线分隔这四个轨道。轨道的代表元用 * 标记。稳定化子则分为两种情况：序列 111 和 000 的稳定化子为 C_3；其他序列的稳定化子均为仅包含单位元 e 的平凡子群。我们注意到 110 与 011 的稳定化子相同，根据引理 3.1 (1)，可为 111 配置转移函数值 011。再注意到，$S_3 = C_3 \uplus (12) C_3$，根据定理 3.3 ，在 f 上需要排除的对称性是置换 (12)。如果固定 110 的取值为 101，那么就成功排除了置换 (12)。这是因为 $f((12) \cdot 110) = f(110) = 011$，但 $(12) \cdot f(110) = 101$。对其他轨道，代表元函数选择只需考虑稳定化子的条件，为方便构造，余下轨道的代表元全部取值为 000。

[5] 参见文 [11] 第 178 页。在给定置换群的条件下，截线的选择并不唯一。$m-1$ 个截线置换分别取自于 $m-1$ 个左陪集，而每个截线置换在对应陪集中的选择是任意的。

完成了 4 个轨道中代表元的函数选择后，再通过轨道封闭性取值进一步生成各个轨道中余下序列的函数取值，例如从 $f(110) = 011$ 生成得到 $f(011) = 101$，因为 $(132) \cdot 110 = 011$ 并且 $(132) \cdot 011 = 101$。以上给出了函数 f，由此可构造布尔系

表 1: C_3 的函数配置

x	110*	011	101	100*	010	001	111*	000*
$f(x)$	011	101	110	000	000	000	000	000

统，使 f 恰好是其转移函数。具体构造过程可参见文献 [8]，此不赘述，仅给出最后结果如下：

$$\begin{cases} \delta_1 \leftrightarrow (\neg T\ulcorner\delta_1\urcorner \wedge T\ulcorner\delta_2\urcorner \wedge T\ulcorner\delta_3\urcorner) \vee (T\ulcorner\delta_1\urcorner \wedge \neg T\ulcorner\delta_2\urcorner \wedge T\ulcorner\delta_3\urcorner) \\ \delta_2 \leftrightarrow (T\ulcorner\delta_1\urcorner \wedge T\ulcorner\delta_2\urcorner \wedge \neg T\ulcorner\delta_3\urcorner) \vee (T\ulcorner\delta_1\urcorner \wedge \neg T\ulcorner\delta_2\urcorner \wedge T\ulcorner\delta_3\urcorner) \\ \delta_3 \leftrightarrow (T\ulcorner\delta_1\urcorner \wedge T\ulcorner\delta_2\urcorner \wedge \neg T\ulcorner\delta_3\urcorner) \vee (\neg T\ulcorner\delta_1\urcorner \wedge T\ulcorner\delta_2\urcorner \wedge T\ulcorner\delta_3\urcorner) \end{cases}$$

读者可以验证该布尔系统的对称群恰是 C_3。

在置换群结构较简单时，排除截线中置换的对称性总是可行的，因此存在实现正面与负面要求的转移函数 f。事实上，所有比 4 元交错群 A_4 小的置换群都能按以上方式构造得到对此布尔系统。此外，以上布尔系统可以转变成一个非非类型悖论，只需要将 $f(000)$ 的取值变更为 111，并在 100 所处轨道上以恒等映射方式取值。这个例子暗示我们能够为任意循环群 C_n 构造对应的非非类型悖论[6]，限于篇幅，这里不展开构造性证明。

4 不可表示的置换群

前一节给出了一个在布尔系统上可表示群的例子。本节将给出一个不可表示的置换群例子，这是引论中提到猜想的一个反例。沿着前一节铺就的思路，我们将考虑一种群的扩张关系。

定义 4.1. 设 G、H 是 S_n 的子群，且 G 是 H 的子群。$\boldsymbol{B}^m$ 是所有 m 元真值序列的集合。称 H 为 G 的一个 B-扩张，如果对于任意 $m \geq n$

(a) G 与 H 对 $\boldsymbol{B}^m$ 的作用产生了相同的轨道划分[7]；

[6] 引论中的第二个语句组是对称群为 C_n 的最直观的例子，但在 n 为奇数的情况下，它不是非非类型悖论。

[7] 这个条件可以更弱一些，当 G 是 H 的子群时，处于同一 G-轨道中的序列都属于同一 H-轨道（对任意 x，$[x]^G \subseteq [x]^H$）。所以实际需要的仅是：处于同一 H 轨道中的序列都属于同一 G-轨道（对任意 x，$[x]^H \subseteq [x]^G$）。

(b) 对于任意 $x_1, x_2 \in \boldsymbol{B}^m$，如果 $G(x_1)$ 是 $G(x_2)$ 的子群，则 $H(x_1)$ 是 $H(x_2)$ 的子群。

简言之，一个置换群的B-扩张作用至给定 $\boldsymbol{B}^m$ 后，在轨道划分和稳定化子的子群关系上保持了（与该置换群）相同的结果。在以上定义以及随后的定理 4.1 中，之所以选择任意的 $\boldsymbol{B}^m$（而不是 S_n 置换自然作用的 $\boldsymbol{B}^n$）与不可表示结论有关——如果仅考虑相对于 $\boldsymbol{B}^n$ 上定义的 G 和 H 的轨道划分和稳定化子子群关系保持关系，后续能直接推论得到的结论仅仅是 G 不能被 $\boldsymbol{B}^n$ 上的函数表示。一个潜在的疑问是，不可表示性是否会随着真值序列长度的增加而不成立，例如某个 $\boldsymbol{B}^k(k > n)$ 提供了更多的函数使得 G 能够被表示。我们这里给出复杂的定义旨在彻底处理这种可能的状况。[8]

定理 4.1. *G、H 是 S_n 的任意子群。如果 H 是 G 的 B-扩张且 $m \geq n$，则对于任意 $\boldsymbol{B}^m$ 上的函数 f, 若 f 是 G-映射，则它是 H-映射。*

证明. 考虑任意 $x \in \boldsymbol{B}^m$ 以及任意 $h \in H$。$h \cdot x$ 处于 H-轨道 $[x]^H$，并且存在某个 $g \in H$ 使得 $h \cdot x = g \cdot x$，因为 H 是 G 的 B-扩张，$[x]^H$ 也是一个 G-轨道。

如果 f 是 G-映射，那么根据引理 3.1，$G(x) \leqslant G(f(x))$ 且 $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$。考虑到 H 是 G 的 B-扩张，前者也在 H 意义上成立：$H(x) \leqslant H(f(x))$(B-扩张定义 (b))。又因为 $h \cdot x = g \cdot x$，所以 $h^{-1}g \in H(x)$。H 意义上的稳定化子的子群关系使得以 $h^{-1}g \in H(f(x))$，也就是说 $h \cdot f(x) = h \cdot (h^{-1}g \cdot f(x)) = g \cdot f(x) = f(g \cdot x)$，由于 f 是一个函数，$f(h \cdot x) = f(g \cdot x)$，因此 $f(h \cdot x) = h \cdot f(x)$，即 f 是一个 H-映射。 □

这里的“如果……则……”实际可以换成“当且仅当”，即是说，G 与 H 之间有 B-扩张关系等价于所有 G-映射是 H-映射。但我们暂时不给出另一方向的证明，首要的目标是不可表示性。对该定理我们特别关心 G 是 H 的真子群的情况，下面的命题给出了 B-扩张的此种情况的一个具体例子。

引理 4.2. *S_4 是其非平庸子群 A_4 的 B-扩张。*

证明. 我们在此列出 A_4 所有元素：

$$A_4 = \{e, (123), (124), (142), (132), (134), (143), \\ (234), (243), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$$

[8]感谢现代逻辑会议匿名评审的意见，他（她）已经注意定义 4.1 中建立在任意 $\boldsymbol{B}^m(m > n)$ 的 G 与 H 扩张关系实际可被归结的 $\boldsymbol{B}^n$ 上的较弱意义的二者扩张关系，尽管最终我们还是要考虑任意 $\boldsymbol{B}^m$ 的函数。如后续的引理 4.2 所显示的，作为 S_4 的置换群，A_4 对任意 $\boldsymbol{B}^m(m > 4)$ 的作用只体现在序列的前四位真值上。由此，任意 $\boldsymbol{B}^m$ 上轨道划分与稳定化子子群关系的一致可归结于 $\boldsymbol{B}^4$ 上轨道划分与稳定化子子群关系的一致。额外的概念有助于优化后续一些结果的证明（特别是引理 4.2 ），只是对最后不可表示性结论而言并非必需。

A_4 与 S_4 是 S_4 的子群。首先验证 A_4 与 S_4 作用至 $\boldsymbol{B}^m(m \geqslant 4)$ 产生的相同的轨道划分对于轨道划分情况：它们都产生了 $5 \times (2^{m-4})$ 个轨道，这些轨道中的任意序列后 $m-4$ 位真值情况完全一致，并且在固定后 $m-4$ 位的情况下，包含前 4 位真值 1 出现 i 次的所有情况（$i = 0, 1, 2, 3, 4$）。
稳定化子的子群关系状况：首先是 A_4，

$A_4\left((1111X)\right) = A_4\left((0000X)\right) = A_4$

$A_4\left((1110X)\right) = A_4\left((0001X)\right) = \{e, (123), (132)\}$

$A_4\left((1101X)\right) = A_4\left((0010X)\right) = \{e, (124), (142)\}$

$A_4\left((1011X)\right) = A_4\left((0100X)\right) = \{e, (134), (143)\}$

$A_4\left((1100X)\right) = A_4\left((0011X)\right) = \{e, (12)(34)\}$

$A_4\left((1010X)\right) = A_4\left((0101X)\right) = \{e, (13)(24)\}$

$A_4\left((0110X)\right) = A_4\left((1001X)\right) = \{e, (14)(23)\}$

S_4 的情况则是：

$S_4\left((1111X)\right) = S_4\left((0000X)\right) = S_4$

$S_4\left((1110X)\right) = S_4\left((0001X)\right) = S_3$

$S_4\left((1101X)\right) = S_4\left((0010X)\right) = \{e, (124), (142), (12), (14), (24)\}$

$S_4\left((1011X)\right) = S_4\left((0100X)\right) = \{e, (134), (143), (13), (14), (34)\}$

$S_4\left((0111X)\right) = S_4\left((1000X)\right) = \{e, (234), (243), (23), (24), (34)\}$

$S_4\left((1100X)\right) = S_4\left((0011X)\right) = \{e, (12)(34), (12), (34)\}$

$S_4\left((1010X)\right) = S_4\left((0101X)\right) = \{e, (13)(24), (13), (24)\}$

$S_4\left((0110X)\right) = S_4\left((1001X)\right) = \{e, (14)(23), (14), (23)\}$

X 表示后 $m-4$ 位任意的真值情况（共 2^{m-4} 种）。我们已列出所有 $\boldsymbol{B}^m$ 序列的稳定化子，得到以下事实：$x_1, x_2 \in \boldsymbol{B}^m$，若 $A_4(x_1) \leqslant A_4(x_2)$ 则 $S_4(x_1) \leqslant S_4(x_2)$。 □

进一步我们猜测在 $n \geq 4$ 的情况下，S_n 是交错群（对称群中所有偶置换的群）A_n 的 B-扩张。限于篇幅，本文只利用命题 4.2 提供引论中提到的猜想的一个反例，作为本节的主要结果。

定理 4.3. *不存在布尔系统使其对称群恰好是* A_4。

证明. m 元布尔系统的对称群一定是 S_m 的一个子群，而 A_4 不是 S_3 的子群。因此，只需考虑 $m \geq 4$ 的情况。

根据引理 4.2，S_4 是 A_4 的 B-扩张，再根据定理 4.1，若 $m \geq 4$，那么任意实现 A_4 对称性的 $\boldsymbol{B}^m$ 上的转移函数 f（A_4-映射）都实现了 S_4 的对称性（S_4-映射）。所以任何 $m(m \geq 4)$ 元布尔系统，其对称群不可能是 A_4。综上所述，任意布尔系统的对称群都不可能是 A_4。 □

回顾第3节的定理 3.3 以及最后的对称布尔系统的构造进程，构造的目标是一个排除了 G 截线置换对称性的 G-映射。对于 A_4 而言，需要排除的截线置换是仅仅是一个对换 (12)，因为 $S_4 = A_4 \uplus (12)A_4$。而以上论证实际上告诉我们，因为交错群 A_4 具有非平庸的 B-扩张 S_4，任何的 A_4-映射都不可能排除对换 (12)。

更一般地，考虑 G 是 S_n 的子群，并且 $S_n = G \uplus h_1 G \uplus \cdots \uplus h_{m-1}G$，在 G-映射的条件下，G 的截线中存在一部分 $h_i, h_{i+1}, \ldots, h_{i+k}$ 不可排除的，那么，考虑 H 由 G 和 $h_i, h_{i+1}, \ldots, h_{i+k}$ 生成的群，所有 G-映射都是 H-映射。反过来，如果所有 G-映射都是 H-映射，也可以推论某些 G 的截线中的置换是不可能排除的。

但是应当注意到，G 截线置换 $h_1, h_2, \ldots, h_{m-1}$ 的排除是逐步进行的，当某个真值序列被赋予特定转移函数值以排除特定置换的对称性，那么后续其他置换的排除就必需考虑已经固定的转移函数配置。这就让我们不得不考虑另一种 G 不可表示的可能状况：在 G-映射条件下，G 截线置换 h_i, h_j 各自可以通过特定的转移函数配置得到排除，但二者却不能同时排除。这种可能状况也可以理解为，任意的 G-映射或者是 H-映射，或者是 K-映射，而 G 同时是 H 和 K 的真子群，此时仍然没有对称性恰好是 G 的 G-映射。

5　布尔系统与置换群的直和

利用已有的 A_4 的不可表示性，我们可以给出其他的布尔系统上不可表示的群。本节讨论一类特殊结构的置换群：$G \leq S_n, H \leq S_m$ 是两个置换群，它们的直和（direct sum）$G \oplus H$ [9] 指一个 $\{1, 2, \ldots, n+m\}$ 上的置换群，$G \oplus H$ 中的任意置换 π 由 S_n 中的某个置换 σ 与 S_m 中的某个置换 τ 定义得到[10]：

$$\pi(i) = \begin{cases} \sigma(i), & i \leq n \\ n + \tau(i), & n < i \leq m \end{cases}$$

这样的 π 亦被记作 $\pi = (\sigma, \tau)$。

$G \oplus H$ 中的每个元素 π 表达了两个不相交的置换——一个是集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上的置换，另一个则是 $\{n+1, \ldots, n+m\}$ 上置换。$G \oplus H$ 中置换 π 对 $n+m$ 元真值序列作用的结果可以被视为两个相互独立的部分：前 n 为序列的作用结果由 σ 完全决定，后 m 位的作用结果则由 τ 完全决定。

---

[9] 群 G 的 H 的笛卡尔积 $G \times H$ 构成一个群，称为 G 和 H 的外直和（external direct sum），而当 $G \cap H = \{e\}$ 时，乘积 $GH = \{gh \mid g \in G, h \in H\}$ 是一个与外直和同构的群，称为 G 和 H 的内直和（internal direct sum，一般被记作 $G \oplus H$）。由于我们期望置换群的直和仍是置换群（而非置换二元组构成的群），所以这里的直和概念接近于内直和。

[10] 此处直接采用了文献 [6] 中的定义。

为更好地说明 $G\oplus H$ 中的置换对真值序列的作用结果，我们引入以下真值序列的“合并”操作。$a^n=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 是一个 n 元真值序列，$b^m=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$ 是一个 m 元真值序列，对这两个序列的复合得到一个 $n+m$ 元序列，定义为 $a^n*b^m:=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m)$。若 $G\leqslant S_n, H\leqslant S_m$，$\pi=(\sigma,\tau)$ 是 $G\oplus H$ 中的置换 ($\sigma\in S_n,\tau\in S_m$)，易见 π 对 a^n*b^m 的作用结果 $\pi\cdot(a^n*b^m)=\sigma\cdot a^n*\tau\cdot b^m$。

在以下意义上，置换群的直和保持了可表示性。

定理 5.1. 如果置换群 $G\in S_n$，$H\in S_m$ 分别被 n 元布尔系统与 m 元布尔系统所表示的，那么它们的直和 $G\oplus H$ 是可被一个 $n+m$ 元布尔系统所表示。

证明. G 被一个 n 元布尔系统所表示，其转移函数为 $f^n:\boldsymbol{B}^n\to\boldsymbol{B}^n$; H 被一个 m 元布尔系统所表示，其转移函数为 $f^m:\boldsymbol{B}^m\to\boldsymbol{B}^m$。利用 f^n 和 f^m 定义一个 $\boldsymbol{B}^{n+m}$ 上的转移函数 $f^{n\oplus m}$，作为表示 $G\oplus H$ 的布尔系统的转移函数。

$$f^{n\oplus m}(x):=\begin{cases}1^n*f^m(y) & \text{若}x=1^n*y,y\text{ 是 }m\text{ 元序列，且 }y\neq 1^m\\ f^n(y)*1^m & \text{若}x=y*1^m,y\text{ 是 }n\text{ 元序列，且 }x\neq 1^m\\ 1^n*0^m & \text{若}x=1^{n+m}\\ 0^{n+m} & \text{否则}\end{cases}$$

其中 1^n、0^n 分别表示所有位置上的真值均为 1、0 的 n 元序列。

我们要证明，任意 $x\in\boldsymbol{B}^{n+m}$，$\pi\in G\oplus H$ 当且仅当 $\pi\cdot f^{n\oplus m}(x)=f^{n\oplus m}(\pi\cdot x)$。

考虑 $G\oplus H$ 中的 $\pi=(\sigma,\tau)$（其对于序列 x 的作用结果 $\pi\cdot x=\sigma\cdot a^n*\tau\cdot b^m$），通过对以上 $f^{n\oplus m}$ 的四种取值情况讨论，可以证明 $f^{n\oplus m}(\pi\cdot x)=\pi\cdot f^{n\oplus m}(x)$。例如，当 $x=y*1^m$ 时，$f^{n\oplus m}(x)=f^n(y)*1^m$，并且 $\pi\cdot x=\sigma\cdot y*1^m$，$f^{n\oplus m}(\pi\cdot x)=f^n(\sigma\cdot y)*1^m$。由于转移函数为 f^n 满足 $\sigma\cdot f^n(y)=f^n(\sigma\cdot y)$，所以 $\pi\cdot f^{n\oplus m}(x)=\sigma\cdot f^n(y)*1^m=f^n(\sigma\cdot y)*1^m=f^{n\oplus m}(\pi\cdot x)$。其他的情况不再一一说明。

以上证明了 $f^{n\oplus m}$ 是一个 $G\oplus H$-映射，还需证明 $f^{n\oplus m}$ 排除了所有 $G\oplus H$ 之外置换的对称性。首先，对序列 $x=1^{n+m}$ 的函数配置排除了所有 $S_n\oplus S_m$ 之外置换的对称性，因为这些置换的作用保持 1^{n+m} 不变，但能改变了它的函数取值，即 1^n*0^m。遵循先前的记法，$S_n\oplus S_m$ 中的任意置换 π 被写作 (σ,τ)，其中 $\sigma\in S_n,\tau\in S_m$。如果 $\sigma\notin G$，f^n 在某个 n 元序列 u^n 上提供了不对称配置：$\sigma\cdot f(u)\neq f(\sigma\cdot u)$，这样的 σ 所定义的直和上的置换 $\pi=(\sigma,\tau)$，将使得 $\pi\cdot f^{n\oplus m}(u*1^m)=\sigma\cdot f^n(u)*1^m\neq f^n(\sigma\cdot u)*1^m=f^{n\oplus m}(\pi\cdot(u*1^m))$。对于 $\tau\notin H$ 的 S_m 置换 τ，论证相似。因此，只要 $\sigma\notin G$ 或者 $\tau\notin H$，总是存在 $\boldsymbol{B}^{n+m}$ 上的序列 x，使得对 $\pi=(\sigma,\tau)$ 有 $\pi\cdot f(x)\neq f(\pi\cdot x)$。换言之，$f^{n\oplus m}$ 所刻画的对称性不会超过 $G\oplus H$ □

直和构造将保持置换群的 B-扩张关系：

定理 5.2. *S_n 的子群 G_2 是 G_1 的 B-扩张，S_m 的子群 H_2 是 H_1 的 B-扩张，则 $G_2 \oplus H_2$ 是 $G_1 \oplus H_1$ 的 B-扩张。*

证明. 任意的 $x \in \boldsymbol{B}^{n+m}$ 被表示为两个区段的合并 $x = a^n * b^m$，任意直和 $G \oplus H$ 上的置换 π 表示为 (σ, τ)，而 π 作用至 x 的结果为 $\pi \cdot (a^n * b^m) = (\sigma \cdot a^n * \tau \cdot b^n)$。因此以 x 为代表元的 $G \oplus H$ 轨道 $[a^n * b^m]^{G \oplus H} = \{x^n * y^m | x^n \in [a^n]^G, y^m \in [b^m]^H\}$。而 $G \oplus H$ 作用下 $a^n * b^m$ 的稳定化子 $G \oplus H(a^n * b^m) = G(a^n) \oplus H(b^m)$。

$$
\begin{aligned}
{}^{G_1 \oplus H_1} &= \{\pi \cdot (a^n * b^m) \mid \pi \in G_1 \oplus H_1\} \\
&= \{\sigma \cdot a^n * \tau \cdot b^m \mid \sigma \in G_1, \tau \in H_1\} \\
&= \{x^n * y^m \mid x^n \in [a^n]^{G_1}, y^m \in [b^m]^{H_1}\} \\
&= \{x^n * y^m \mid x^n \in [a^n]^{G_2}, y^m \in [b^m]^{H_2}\} \\
&= \{\pi \cdot (a^n * b^m) \mid \pi \in G_2 \oplus H_2\} \\
&= [a^n * b^m]^{G_2 \oplus H_2}
\end{aligned}
$$

等式中第四个等号是因为：G_2, H_2 是分别 G_1, H_1 的 B-扩张，G_1 与 G_2 有相同轨道划分，所以 $[a^n]^{G_1} = [a^n]^{G_2}$，同理 $[b^m]^{H_1} = [b^m]^{H_2}$。

因此我们确认了两个直和置换群在轨道划分上一致。

考虑任意 $\boldsymbol{B}^{n+m}$ 中的序列 $a^n * b^m$ 与 $c^n * d^m$。假设在 $G_1 \oplus H_1$ 作用下前者的稳定化子是后者稳定化子的子群，$G_1 \oplus H_1(a^n * b^m) \leqslant G_1 \oplus H_1(c^n * d^m)$，即 $G_1(a^n) \oplus H_1(b^m) \leqslant G_1(c^n) \oplus H_1(d^m)$。等价地，$G_1(a^n) \leqslant G_1(c^n)$，$H_1(b^m) \leqslant H_1(d^m)$。B-扩张条件让这两个稳定化子子群结果相对于 G_2、H_2 成立——$G_2(a^n) \leqslant G_2(c^n)$，$H_2(b^m) \leqslant H_2(d^m)$。所以最终得到 $G_2 \oplus H_2(a^n * b^m) \leqslant G_2 \oplus H_2(c^n * d^m)$。也就是说，$G_2 \oplus H_2$ 保持了 $G_1 \oplus H_1$ 稳定化子子群关系上的一致。 □

根据该定理我们获得了引论中猜想的另一个反例：

定理 5.3. *不存在布尔系统使其对称群恰好是 $A_4 \oplus C_3$。*

证明. A_4 有非平庸的 B-扩张 S_4（引理4.2），C_3 则是其自身的 B-扩张，依据定理 5.2，$A_4 \oplus C_3$ 有非平庸的 B-扩张 $S_4 \oplus C_3$。与定理4.3的证明相似，任何 $A_4 \oplus C_3$-映射都是 $S_4 \oplus C_3$-映射，因此任意布尔系统的对称群都不可能是 $A_4 \oplus C_3$。 □

6 结论

本文主要研究具有对称性的语义悖论。根据文 [9]，每个布尔系统都对应一个置换群，使得当一个置换作用到该布尔系统上时，此群中的置换刚好是就是保持布尔系统不变的那些置换。在这个意义上，可以认为此置换群刻画了该布尔系统，

或者说，后者表示了前者。本文的主要目的是验证文 [9] 提出的如下猜想是否成立：每个置换群都可为某个布尔悖论表示。

我们主要使用 G-映射作为分析布尔系统对称性的基本工具。布尔系统的转移函数是一个 G-映射，对于 G 被该布尔系统所表示是必要的。基于对群作用到布尔真值集上的的轨道和稳定化子概念的分析，我们引入 B-扩张概念，并证明了如果 H 是 G 的一个 B-扩张，那么 G-映射也必然是 H-映射。通过具体的轨道和稳定化子方面的代数计算，S_4 被证明是 A_4 的一个（非平庸的）B-扩张。最终，我们证明了交错群 A_4 不能被任何布尔系统所表示。这给出了上述猜想的一个反例，由此还获得了基于 A_4 的一个直和构造的不可表示性。

在技术层面，本文实际上探讨了群相对于布尔系统的转移函数（$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$）的可表示性，与之密切相关的是置换群在布尔函数上的可表示性。与定义 2.2 平行，规定一个（n 元的）布尔函数 $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 的对称群 $G(f)$ 为

$$G(f) := \{\sigma \in S_n | f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\}$$

如果一个置换群是某个布尔函数的对称群，则称之为（布尔函数）可表示。[11] 置换群的布尔函数可表示问题研究是一个比较活跃的领域，可参见文献 [2, 6, 10]。作为与本文主要结果的一个比较，这里仅指出此研究领域的一个结果如下：置换群 $G \subseteq S_n$ 可（被布尔函数）表示，当且仅当，它是作用在 $\boldsymbol{B}^n$ 的具有相同轨道数的最大 S_n 子群。（[10]，第 384 页）

换言之，置换群 G 不可被布尔函数表示，当且仅当，存在置换群 H 使得 $H > G$ 且 H 与 G 在 $\boldsymbol{B}^n$ 有相同的轨道结果。对照定义 4.1，右侧条件中 H 和 G 的关系就是略去稳定化子条件的 B-扩张关系。在 $n \geq 3$ 的条件下，交错群 A_n 与 S_n 作用至 $\boldsymbol{B}^n$ 产生相同的轨道划分，因此 A_n 不能通过布尔函数表示。

置换群的布尔函数可表示性与布尔系统可表示性的联系值得进一步深究的问题。一个非常直接的结果是，若置换群在定理 4.1 意义上不可表示，即它有非平凡的 B-扩张，那么据前文所述（[10]，第 384 页）它不可被布尔函数表示。但是反向的命题并不成立：3 元交错群 A_3 不可被布尔函数表示，但是 A_3 没有除自身之外的 B-扩张：尽管它与 S_3 作用至 $\boldsymbol{B}^3$ 有相同的轨道划分结果，二者在稳定化子子群关系上不一致。A_3 在本文甚至已被明确是可通过布尔系统表示的，因为 $C_3 = A_3$。

参考文献

[1] B. Armour-Garb and J. A. Woodbridge, 2006, “Dialetheism, semantic pathology, and the open pair”, *Australasian Journal of Philosophy*, **84(3):** 395–416.

[11] 此概念还可推广到 k 值，但与本文的对称群概念相对，我们只考虑二值情况。k 值情况的规定参见文 [6] 第 2 页和文 [10] 第 380 页。

[2] P. Colte and E. Kranakis, 1991, "Boolean functions, invariance groups, and parallel complexity", *SIAM Journal on Computing*, **20(3):** 553–590.

[3] R. T. Cook, 2011, "The no-no paradox is a paradox", *Australasian Journal of Philosophy*, **89(3):** 467–482.

[4] J. D. Dixon and B. Mortimer, 1996, *Graduate Texts in Mathematics, **Vol. 163**: Permutation Groups*, Springer Science & Business Media.

[5] L. Goldstein, 1992, "'this statement is not true' is not true", *Analysis*, **52(1):** 1–5.

[6] M. Grech and A. Kisielewicz, 2014, "Symmetry groups of Boolean functions", *European Journal of Combinatorics*, **40:** 1–10.

[7] H. G. Herzberger, 1982, "Notes on naive semantics", *Journal of Philosophical Logic*, **11(1):** 61–102.

[8] M. Hsiung, 2017, "Boolean paradoxes and revision periods", *Studia Logica*, **105(5):** 881–914.

[9] M. Hsiung, 2022, "In what sense is the no-no paradox a paradox?", *Philosophical Studies*, **179(6):** 1915–1937.

[10] A. Kisielewicz, 1998, "Symmetry groups of Boolean functions and constructions of permutation groups", *Journal of Algebra*, **199(2):** 379–403.

[11] J. J. Rotman, 2012, *Graduate Texts in Mathematics, **Vol. 148**: An Introduction to the Theory of Groups*, Springer Science & Business Media.

[12] R. A. Sorensen, 2001, *Vagueness and Contradiction*, New York: Oxford University Press.

[13] A. Visser, 2004, "Semantics and the liar paradox", in D. M. Gabbay and F. Guenthner(eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, **Vol. 11**, pp. 149–240, Dordrecht: Springer Netherlands.

[14] Q. Zeng and M. Hsiung, 2023, "The elimination of direct self-reference", *Studia Logica*, **111(6):** 1037–1055.

（责任编辑：执子）

Nonrepresentability of the Alternating Group A_4 on Boolean Systems

Hangjie Cao Ming Xiong

Abstract

The no-no paradox is a typical type of symmetrical semantic paradox with its symmetry, which can be characterized by permutation groups. When a permutation group characterizes the symmetry of a paradox, we call that the group is represented by this paradox. Hisung(2022) proposed the conjecture that any permutation group can be represented by a no-no type of paradox. In this paper, by using concepts such as group map, we analyze the orbits and stabilizers of group actions on the set of truth value sequences, and prove that the alternating group A_4 cannot be represented by any Boolean system. This indicates that if no-no type paradoxes are restricted within the scope of Boolean paradoxes, not every permutation group can be represented by a no-no type of paradox. This paper also provides examples of permutation groups that cannot be represented by Boolean systems through the construction of direct sum of permutation groups. Our research shows that permutation groups that cannot be represented by Boolean systems are not isolated, but have a certain basis for its existence.

Hangjie Cao South China Normal University, School of Philosophy and Social Development
caohangjie@163.com

Ming Xiong South China Normal University, School of Philosophy and Social Development
mingshone@163.com