

证明论语义及其意义颗粒度

党学哲

摘要: 证明论语义是通过“证明”来解释表达式意义的逻辑语义学, 与传统模型论语义在哲学和技术方法上存在诸多不同。它作为一种推理主义意义理论, 又与布兰顿等的推理主义存在显著区别。证明论语义以典范证明而非“真”为中心建立有效性等语义概念, 从而获得比模型论语义更为细密的意义颗粒度。本文通过阐释证明论语义的哲学背景和意義解释机制, 指出其具有过于局限的“字符串式”的意义颗粒度, 并证明对其放松会导致它迅速倒向模型论语义的颗粒度, 从而说明证明论语义在意义颗粒度方面相对于模型论语义的优势是有限的。

关键词: 证明论语义; 典范推演; 意义颗粒度; 推理主义

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 绪论

证明论语义¹ (proof-theoretic semantics, 简称 PTS) 是以证明 (或推演) 而非“真”来解释语言表达式意义的形式语义学, 与当前标准的逻辑语义学——模型论语义 (model-theoretic semantics, 简称 MTS) 或真值条件语义学 (truth-conditional semantics) 在哲学思想和技术方法上存在诸多区别。在根岑 (G. Gentzen) 对自然演绎系统 (natural deduction system, 简称 ND) 影响深远的评论 ([13]) 之后, 普拉维茨 (D. Prawitz, [22–24]) 和达米特 (M. Dummett, [6]) 将根岑的思想精确化, 定义了 PTS 有效性, 建立起第一个系统的 PTS 理论, 其后施罗德–海斯特 (P. Schroeder-Heister, [29])、弗朗西斯 (N. Francez, [12]) 等学者进一步反思、发展和完善 PTS。虽然目前 PTS 理论构建远不及 MTS, 但它已经具备相对完善的哲学论证以及一定的逻辑技术结果作为支撑, 并且从意义理论的角度已经显示出 MTS 所不具备的特点, 其中意义颗粒度便是重要代表。

意义颗粒度是一个语义学的重要属性。意义颗粒度问题又被称为超内涵 (hyperintensionality) 问题, 是语言哲学和逻辑哲学关注的重要内容, 常出现在涉及“知道”“相信”等心智状态以及句子的意义等语境中, 这些语境都需要对句子的

收稿日期: 2023-06-30

作者信息: 党学哲 同济大学人文学院哲学系
xuezhe_dang@tongji.edu.cn

¹该术语由施罗德–海斯特于 [27] 提出。

意义进行某种程度的区分,因此,意义颗粒度直观上指意义理论对句子意义的区分程度。刻画“知道”“相信”等命题态度的语境应该是超内涵的,例如“ $1+1=2$ ”和“费马大定理”都为真,从主体知道前者并不能得到他知道后者。可能世界语义无法区分逻辑等值命题,因而不是超内涵的,这反映出 MTS 粗糙的意义颗粒度。PTS 依赖于特定的证明结构——典范证明 (canonical proof) 解释句子意义,而不依赖于非构造的“真”或“可证性”等概念,这使得 PTS 具有极其细腻的意义颗粒度,我们称之为“字符串式”的颗粒度。雅各 (M. Jago, [14], 第 66–67 页) 曾断言² PTS 和可能世界语义相同,都不具有超内涵性,我们将对此进行讨论。传统上认为 PTS 的意义解释是隐式的,弗朗西斯提出了具体化的 PTS 意义,并且鉴于过强的意义颗粒度,他通过定义特定等价关系放松颗粒度。我们一方面证明他所放松的意义仍具有比 MTS 强的颗粒度,另一方面指出放松的 PTS 颗粒度与典范推演的定义密切相关,通过弱化典范推演的定义能够得到与 MTS 相同的意义颗粒度。

PTS 存在诸多版本,其中影响最为深远的是普拉维茨–达米特的 PTS,本文以此为例³,阐述 PTS 的哲学思想和意义阐述机制,并对其意义颗粒度问题进行探讨。本文第 2 部分讨论 PTS 的哲学背景;第 3 部分论述 PTS 的意义阐述机制;第 4 部分探讨 PTS 的意义颗粒度的局限性;第 5 部分进行总结。

2 证明论语义作为一种推理主义

PTS 建立在良好的哲学论证和逻辑技术结果基础上。了解 PTS 背后的哲学思想是理解其意义阐述机制的前提。

PTS 直接起源于根岑对 ND 的引入和消去规则之间关系的哲学评论:

引入规则表示了连接词的意义,而消去规则不是其他,仅是这些定义的后果。 ([13], 第 80 页)

PTS 项目的主要任务是从技术和哲学两个角度对上述评论进行精确刻画和语义学建构。普拉维茨有关 ND 的工作,尤其归约 (reduction) 和正规化 (normalization)⁴ 等概念为精确化根岑的思想奠定了逻辑基础,而达米特对普拉维茨的技术结果进行了细致的哲学阐释 ([6]), 奠定了 PTS 的哲学基础。普拉维茨–达米特语义是 PTS 发展史上里程碑式的结果,也是对逻辑技术结果进行哲学阐释的典范。

PTS 的哲学价值在于它提供了一种新的意义视角。它将证明置于意义解释的中心位置,是一种用法–意义理论 (use-theory of meaning), 延续了后期维特根斯

²佩兹拉尔 (I. Pezlar) 在 [18] 指出了雅各的错误。

³ 当未明确指出时, PTS 代指普拉维茨–达米特 PTS。

⁴ 这些技术结果见于 [21], 其中 ND 的正规化定理类似于矢列演算系统 (sequent calculus) 中的切割消去定理。

坦“意义即用法”(meaning-as-use)的语义学范式。更具体地讲,它归属于推理主义⁵(inferentialism)意义进路,主张语言表达式的意义由推理和推理规则建立。然而推理主义内部的观点也存在诸多分歧,PTS具有推理主义的一般特征,但又与布兰顿(R. B. Brandom)等的推理主义有所不同。普拉维茨-达米特PTS作为推理主义具有以下三个主要特点。

首先,它是一种温和的推理主义,主张将推理对意义解释的介入限定在一定范围,例如PTS仅专注于逻辑常项,通过特定的赋意证明系统(meaning-conferring proof-system)中的推演规则隐式地解释它们的意义,因此也被称作逻辑推理主义。布兰顿的强推理主义则强调推理是语义解释的全部,寻求利用推理解释包括个体指称和谓词在内的所有表达式的意义。

其次,PTS主张一种分子式的推理主义(molecularist inferentialism),即确定意义的推理模式应该以连接词为单位进行说明,因此每个逻辑连接词的意义仅由它的推理规则单独进行说明。布兰顿则主张一种整体式的推理主义(holistic inferentialism),即意义解释需要依赖更加宽泛的甚至包含复杂前提和复杂结论的推理模式。

最后,几乎所有的PTS都倾向于直觉主义。直觉主义具有数学构造主义的特点,直觉主义的“真”指存在特定的构造性证明,例如要证明存在性陈述为真,我们须要构造出一个例示,因此不具构造特点的古典逻辑排中律和反证法等都被排除在外。ND通常被作为PTS的赋意系统,其要求每个连接词的引入和消去规则都必须满足特定的平衡性,达米特称之为协调性(harmony),而满足这样特性的ND通常是直觉主义的。这有三个后果,一,逻辑改良主义,即认为直觉主义逻辑是正确的逻辑,而非布兰顿所坚持的古典逻辑;二,形而上学的反实在论立场,拒绝古典排中律,拒绝世界的二价性,即否认存在独立于人的认识的实在。具体到语义学便是拒绝对句子预设独立于人的认知的二值性假定。三,证实主义的认识论立场。PTS意义进路下认识论优先于本体论,意义解释依赖于主体如何知道或者获得它而非依赖于独立于主体的真值。知道一个事实就是知道证实它的条件。这里真值条件被替换为证实条件,证明不仅仅是语形推导,而是证实命题的认识论工具。

与推理主义相对的是指称主义(denotationism),其代表是MTS,主张通过“语言-世界”指称关系来解释语言表达式的意义。指称关系将表达式映射到相应类型的语义值,例如专名被映射为世界中的对象,谓词对应于性质(对象的集合),句子对应于世界中的事实(真值)等。指称主义与推理主义(MTS与PTS)的一大区别是意义解释顺序不同。指称主义“从下至上”解释指称、真、满足和有效等语义概念,在确定专名和谓词等基础表达式的指称意义后,复杂表达式的

⁵也被称为推理角色语义(inferential role semantics)或概念角色语义(conceptual role semantics)等。

语义值根据特定组合规则由它们的组成部分确定。推理主义意义解释的范例并非专名和谓词等与经验密切联系的词汇，而是“并且”“或者”“如果……那么……”等逻辑表达式，它们的意义由表征它们用法的推演规则进行说明。由于推演关系主要是命题之间的关系，因此表达命题的句子成为首要的语义单元，子句表达式意义由它们对（包含它们的）复合句的意义所做的贡献决定，所以推理主义的意义解释顺序是“自上而下”的。可见，推理主义观点下，语言实践对意义解释具有优先性，并且较大程度上塑造了意义理论。另外值得注意的是，语言的用法意义和指称意义的分野是普遍存在的，例如程序语言也存在操作语义（operational semantics）和指称语义（denotational semantics）之分，其中前者也采用证明规则的形式，后者则为语言表达式指派抽象的代数结构。

3 证明论语义的意义解释机制

虽然文献中对推理主义的哲学讨论已经较为丰富，但 PTS 可能是其仅有的实践。普拉维茨－达米特的语义是发展最早且影响深远的 PTS，我们以此为例探讨 PTS 阐述意义的一般机制。PTS 的意义解释策略是：一，选择合适推演系统作为意义阐释系统；二，定义合适的有效性概念。意义解释依赖于满足特定性质的 ND 系统，在此基础上推演规则通过一类特殊推演——典范推演，赋予句子意义。由于 PTS “自上而下”的意义解释顺序，定义合适的有效性概念成为建立证明论语义的主要方式。

3.1 赋意系统与协调性

推理主义将表达式意义等同于其用法，逻辑语言的用法由推演系统的规则表达，而推演系统形式是多样的，那么何种推演系统能作为赋意系统？斯坦伯格（F. Steinberger）提出符合性原则（principle of answerability）：“只有那些能适当地反映我们日常演绎推理实践的演绎系统才能被认为是赋予意义的”。（[30]，第 335 页）逻辑推理主义认为 ND 系统满足符合性原则，一方面因为相较于公理系统和矢列式系统，ND 形式化了数学证明，能够分析数学证明的结构，例如推演可从假设开始，并且可通过特定规则得到不依赖于该假设的结论；另一方面 ND 的引入和消去规则反映了日常语言实践中句子用法的两个方面（[5]，第 396 页），断言的条件和断言的后果。

然而并非任意 ND 系统都可以作为赋意系统。普莱尔（A. N. Prior）提出了具有破坏性的 *tonk* 连接词（[16]），其引入（ $\frac{\varphi}{\varphi \text{ tonk } \psi}$ ）和消去规则（ $\frac{\varphi \text{ tonk } \psi}{\psi}$ ）能导致逻辑平凡化，这迫使人们对 ND 施加更多限制以排除类似于 *tonk* 的规则。对 *tonk* 的回应主要有贝尔纳普（N. Belnap）的保守扩张（[2]）以及达米特的协调性

(harmony, [6], 第 215 页)。达米特的协调性意思是直观的, 它指建立陈述的条件和该陈述所能推出的后果之间的一种平衡。他借用普拉维茨的归约概念精确地刻画了逻辑引入和消去规则之间的协调性, 这种协调性被称作内在协调性⁶ (intrinsic harmony)。归约是普拉维茨用于精确化根岑评论的技术方法。根岑的评论被普拉维茨总结为如下倒置原则 (inversion principle):

令 α 是以 ψ 为结论的消去规则, 那么通过引入规则得到 α 主前提的推演结合推得 α 次要前提的推演 (如果有的话), 已经“包含”了推得 ψ 的推演; 因此, ψ 的推演可以直接从上述推演得到, 而不需使用 α 规则。
([21], 第 33 页)

达米特也有相似论述。([5], 第 247–249 页) 以 “ $\rightarrow$ ” 消去规则为例, 上述原则实际上描述了如下推演之间的转换, 这种转换被称为归约。⁷ 其中 $\mathcal{D}$ 表示推演, 当 $\mathcal{D}$ 中的前提或 (与) 结论需要指明时, 用 $\frac{\varphi}{\mathcal{D}}$, $\frac{\mathcal{D}}{\psi}$, $\frac{\varphi}{\mathcal{D}}$ 表示。

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{\frac{\varphi}{\mathcal{D}} \quad \psi}{\varphi \rightarrow \psi} & \frac{\mathcal{D}' \quad \varphi}{\psi} \alpha & \rightsquigarrow \frac{\frac{\varphi}{\mathcal{D}} \quad \psi}{\psi}
 \end{array}$$

上例中 $\varphi \rightarrow \psi$ 那样既是引入规则的结论同时也是消去规则的主前提的公式被称为极大公式, 达米特称之为局部峰值 (local peak)。出现极大公式反映出推演包含不必要的“弯路”, 上例中本来由推演 $\mathcal{D}$ 可以直接得到 ψ , 但却引入极大公式 $\varphi \rightarrow \psi$ 再对其进行消去操作。达米特将一个逻辑连接词的引入和消去规则之间的协调性定义为对“弯路”的“推平”, 即对极大公式或局部峰值的移除。

根岑、普拉维茨和达米特的论述意在说明消去规则相对于引入规则不能过强 (相对于同一连接词), 即消去规则推得的结果 (consequences) 不能多于从被引入公式的依据 (grounds) 推出的结果。如果 CON 表示推得的结果, G 表示公式的依据, 那么上述协调性可以表述为:

$$CON[\varphi, \Gamma] \subseteq CON[G[\varphi], \Gamma]$$

容易验证 *tonk* 规则下的极大公式无法被移除, 说明 *tonk* 消去规则过强, 因而该规则不是协调的。协调性被主流 PTS 学者认可为 ND 系统成为赋意系统的必要条件。

⁶其他对协调性的刻画有对称协调性 ([31]) 以及形式协调性, 后者指一般化的消去规则 (general elimination rules, 参看 [26][17])。这三种协调性的名字见于文献 [12] 第 81 页。

⁷与 ND 系统正规化定理的归约具有全局性不同, 此归约仅是局部的。

与协调性相反, 稳定性⁸ (stability, [6], 第 280–300 页) 表示引入规则相对于消去规则不能过强, 即从被引入的公式的依据推出的结果不能多于从消去规则推得的结果, 可以表述为:

$$\text{CON}[\![G[\varphi], \Gamma]\!] \subseteq \text{CON}[\![\varphi, \Gamma]\!]$$

如果协调性和稳定性都满足, 则 $\text{CON}[\![\varphi, \Gamma]\!] = \text{CON}[\![G[\varphi], \Gamma]\!]$ 。

3.2 有效性

如前所述, MTS 自下而上定义“真”、后承、有效性等概念, 其中定义“真”是语义解释的核心, 公式 φ (公式集 Γ) 的意义被定义为它为真的模型的集合 (简称“真集”) $\llbracket \varphi \rrbracket := \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \varphi\}$ ($\llbracket \Gamma \rrbracket := \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \Gamma\}$)。 φ 是 Γ 的 MTS 后承当且仅当对任意 $\mathcal{M}$, 如果 $\mathcal{M} \models \Gamma$, 那么 $\mathcal{M} \models \varphi$ 。从 Γ 到 φ 的推演是有效的, 当且仅当 φ 是 Γ 的 MTS 后承。PTS 自上而下进行意义解释, 因而有效性是首要概念。普拉维茨给出的有效性的定义⁹ ([23, 24]) 是 PTS 理论的重要结果。

典范证明是定义 PTS 有效性的核心概念。从传递的观点看, MTS 有效性传递的是“真”, 而 PTS 有效性被定义为对典范证明的传递。典范证明是最后一步使用引入规则的证明。为什么需要引入典范证明? 因为典范证明是根据意义得到的证明, 具有直接性。达米特认为:

引入规则是直接或典范地建立句子为‘真’的方法, 或许我们经常以非直接的方式建立句子的“真”, 但我们称特定方式是典范的, 就是说, 每当我们对句子的断言被证明是正当的 (justified), 我们本可以直接的方式建立该断言。
([6], 第 252 页)

换言之, 凡是我们可以建立的断言 (无论直接或间接), 都可以以直接或典范的方式建立, 这被达米特称为基本假设 (fundamental assumption), 对应于普拉维茨有关直觉主义 ND 的正规化定理的推论: 如果一个命题存在证明, 则它存在以引入规则结尾的证明。([22], 第 250 页) MTS 将句子意义等同于其真值条件, 因此“真”处于中心地位, 而 PTS 将句子意义等同于可断言条件, 因此将反映句子意义的典范推演用于定义有效性和后承等语义概念, 反映了 PTS 证实主义的意义立场。

典范证明是最后一步使用引入规则的无前提推演, 弗朗西斯将典范性推广到任意推演 ([11]), 并且保留了典范性的核心思想——获得断言的直接性。

⁸达米特在直观描述时, 协调性包含上述内在协调性和稳定性两个方面 ([6], 第 215、287 页), 但在形式化描述时, 协调性仅指通过归约定义的内在协调性 ([6], 第 247–250 页)。协调性和稳定性分别属于证实主义 (verificationism) 和实用主义 (pragmatism) 的意义进路, 前者将引入规则作为连接词的定义并以此论证消去规则的合理性, 后者则相反。

⁹较详细的关于 PTS 有效性的综述见于文献 [28]。

定义 3.1 (典范推演¹⁰). 推演 $\Gamma \vdash \psi$ 是典范的当且仅当它满足以下条件之一:

- (1) 该推演最后一步使用引入规则。
- (2) 该推演最后一步使用消除假设的消去规则, 其主前提是 Γ 中的某些 φ , 并且它包含的 (除以主前提为结论外的) 子推演都是结论为 ψ 的典范推演。
- (3) 该推演最后一步使用对原子公式的同一性公理。

当 Γ 为空时, 典范推演对应于典范证明。条件 (2) 是为析取设置的, 因为只有析取消去规则是消除假设的。(2) 型典范推演中, 结论 ψ (在子推演中) 也由引入规则得到, 再经过消去规则传递至结论, 因此该定义保持了推演的直接性, 也反映了 Γ 是断言 ψ 的依据。注意在 PTS 中原子公式的意义通常由原子系统 (atomic system) 直接给定, 因此对于原子公式 p , 规定由同一性公理得到的推演 $\Gamma, p \vdash p$ 也是典范推演 ([12], 第 45 页), 但对于复合公式 φ , 由同一性公理得到的推演 $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ 则不是典范的。

PTS 有效性的定义中存在两个重要变量, 原子系统和证成 (justification)。原子系统是一个关于原子命题的推演规则的集合, 给定原子公式的可推演性, 普拉维茨将其描述为产生式规则 (production rules)。当一个规则的前提为空时, 它表示公理。原子公式的有效性通常被定义为它们在原子系统中的可推演性。一个归约步骤将一个推演转换为另一个推演。一个归约步骤 (reduction procedure) 的集合被称为一个证成, 记作 $\mathcal{J}$ 。为方便表述, 以下定义中“有效的”均指“相对于 $\mathcal{J}$ 是 S -有效的”。

定义 3.2 (PTS 有效性¹¹). 对任意原子系统 S 和任意证成 $\mathcal{J}$:

- (1) 一个原子命题 p 的闭推演是有效的当且仅当 $p \in S$ 。
- (2) 一个典范闭推演是有效的当且仅当它的子推演是有效的。
- (3) 一个闭的典范推演是有效的, 如果它可以由 $\mathcal{J}$ 被归约为一个有效的典范推演
- (4) 一个开推演是有效的, 如果用闭的有效推演替换它的每个开假设得到的每个闭推演都相对于任意 $S' \geq S$ 和 $\mathcal{J}' \geq \mathcal{J}$, 是 S' -有效的。

PTS 后承与 PTS 有效性相同: φ 是 Γ 的 PTS 后承, 记作 $\Gamma \vdash^P \varphi$, 当且仅当推演 $\Gamma \vdash \varphi$ 是 PTS 有效的。ND 规则也是一种推演, 因此规则 $\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\varphi}$ 的有效性等同于推演 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ 的有效性, 等同于 φ 是 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 的逻辑后承, 即 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash^P \varphi$ 。

¹⁰ 普拉维茨和达米特定义的典范推演仅考虑最后一步使用引入规则的证明 (无假设推演), 这种定义被认为过于局限。([15]) 弗朗西斯 ([12], 第 36 页) 将典范性推广到开假设推演。本定义中如果 Γ 为空, 则对应于普拉维茨和达米特的典范证明。

¹¹ 该版本定义在文献 [29] 第 34 页给出。

定义 3.2 (1) 是整个递归定义的起点。一个原子系统 $\mathcal{S}$ 和一个证成 $\mathcal{J}$ 类似于 MTS 中的一个模型，它解释了原子公式的意义（有效性）。为什么要引入对 $\mathcal{S}$ 的任意扩张 $\mathcal{S}'$ ，以及对 $\mathcal{J}$ 的任意扩张 $\mathcal{J}'$ ？一方面，有的开推演的开假设可能不存在闭的有效推演，如此 (4) 中提及的替换并未进行，该推演就空洞地有效。诉诸 $\mathcal{S}$ 的扩展，闭的有效推演可能出现，替换就可能进行，从而真正地验证开推演从前提到结论对典范推演的保持性。另一方面，扩张是为了保证有效性相对于原子系统和证成是单调的，否则，可能存在公式相较于 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{J}$ 是有效，但相较于它们的扩张是无效的。这种单调性要求与将原子系统解释为知识库（knowledge base）是相关的。对于知识库来说，已经有效的知识在知识库扩充和归约步骤扩展后仍是有效的。¹² 直觉主义逻辑的关系语义（或构造性语义）要求命题变元的真值随着关系 R 的传递具持续性，这与诉诸对 $\mathcal{S}$ 的任意扩张具有相似性，也反映 PTS 具有构造性的特点。

通过观察上述定义可见，各种推演的有效性都被归为典范闭推演的有效性，后者被归为原子命题的有效性，而原子命题的有效性由原子系统和证成直接给定。由于原子公式不含主连接词，因而它们的意义不能由引入规则确定，所以传统上将原子系统中原子公式的推演视为对其意义的解释，因此将这些推演归为典范推演。([12], 第 45 页) 如此，有效推演实质是从前提到结论对典范可推演性的传递。

虽然直觉主义逻辑相对于标准归约 $\mathcal{J}$ ([29], 第 86–89 页) 具有语义正确性（semantical correctness），即所有直觉主义逻辑的推演都相对于 $\mathcal{J}$ 是有效的，但包括上述定义在内的多种 PTS 有效性定义都面临不完全性的结果。（参看 [20]）

4 意义颗粒度

意义颗粒度（granularity of meaning）可以非形式地表述为根据意义对句子的区分程度。MTS 受到最多的一个批评是意义颗粒度过于粗糙。由于句子的意义等于它的真值条件，因此逻辑等值命题具有相同意义，作为特例，所有逻辑有效式意义相同，例如在古典命题逻辑中 $p \rightarrow p$ 和 $\neg q \vee q$ 意义相同。

MTS 的意义颗粒度问题也经常被称作超内涵性问题。超内涵概念（如心智状态、意义等）指那些能够区分逻辑等值命题的概念，最常用来说明超内涵性的是包含“知道”“相信”等命题态度的内涵语境。在经典的可能世界解释框架下，命题的意义被定义为其为真的可能世界集，因此逻辑等值命题具有相同的“真集”，命题态度无法区分它们，所以这些命题态度不是超内涵的，这导致了著名的逻辑全知问题（logical omniscience, [8], 第 333–373 页），例如在知识逻辑中，如果

¹² 施罗德-海斯特等把原子系统当做一种定义，则不需要假设单调性，因为如果定义得到扩充，那么有效的命题可能就不再有效。关于原子系统的讨论可参看 [19]。

$\varphi \rightarrow \psi$ 且主体知道 φ ，那么他知道 ψ ；主体知道所有有效式等。

4.1 PTS 意义颗粒度

根据逻辑推理主义和证实主义的观点，PTS 的意义由规则（证实条件）定义，这种定义不是具体的或者显性的，意义并非对应于特定的语义值，而是一种隐性定义。

在 MTS 中开推演的有效性通常被定义为对命题特质“真”的传递，句子 φ 的意义是其“真集”， $\llbracket \varphi \rrbracket := \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \varphi\}$ ，而 PTS 传递的是典范可推演性，基于此弗朗西斯（[10]；[12, 第 181 页]）给出具体的意义。如果 $\llbracket \varphi \rrbracket_{\Gamma}^{I^c}$ 表示从公式集 Γ 到 φ 的典范推演的集合，那么 φ 的 PTS 意义，记作 $\llbracket \varphi \rrbracket^p$ ，定义如下

$$\llbracket \varphi \rrbracket^p := \lambda \Gamma. \llbracket \varphi \rrbracket_{\Gamma}^{I^c}$$

φ 的意义是一个情景化的函数，该函数为每个 Γ 指定一个从 Γ 到 φ 的典范推演的集合。这里 φ 获得了指称意义，但不指称外在于语言的世界，而指称典范推演这一证明论对象。这种意义颗粒度是非常细密的，例如如下逻辑等值式在 MTS 下意义相同，而在具体化的意义下不同，

$$\llbracket \varphi \wedge \varphi \rrbracket^p \neq \llbracket \varphi \rrbracket^p, \quad \llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket^p \neq \llbracket \psi \wedge \varphi \rrbracket^p$$

原因在于对于任意 Γ ，任何一个从 Γ 到 $\varphi \wedge \varphi$ 的典范推演与从 Γ 到 φ 的典范推演都是不同的，因为两个推演的结论不相同。因此具体化的意义能够区分逻辑等值式，作为特殊情况，它同样能区分逻辑有效式，所以从上述具体化意义的角度，PTS 具有更细密的意义颗粒度，是超内涵的。

4.2 放松 PTS 的意义颗粒度

PTS 语义颗粒度显得过于局限。两个公式从语形上看是不同的，那么在给定前提下它们就不可能具有相同的典范推演集合，因而不可能具有相同的意义，因此 PTS 语义对公式意义的区分是“字符串式”的。弗朗西斯通过定义与典范推演相关的等价关系来放松意义颗粒度。（[9]）他的想法是，如果两个断言具有相同依据，那么它们具有相同意义。定义

$$GA[\varphi] := \{\Gamma \mid \Gamma \vdash^{I^c} \varphi\}$$

即令 $GA[\varphi]$ 为所有能够典范地推得 φ 的前提 Γ 的集合。两个句子 φ 和 ψ 具有相同意义，记作 $\varphi \equiv_G \psi$ ，当且仅当 $GA[\varphi] = GA[\psi]$ 。根据 GA 以及典范推演的定义，如下等式成立：

$$GA[\varphi \wedge \psi] = GA[\psi \wedge \varphi] = GA[\varphi] \cap GA[\psi], \quad GA[\varphi] = GA[\varphi \wedge \varphi]$$

因而 $\varphi \wedge \psi \equiv_G \psi \wedge \varphi$, $\varphi \equiv_G \varphi \wedge \varphi$ 。

一个自然的问题是放松后的意义 GA 是否具有和 MTS 相同的颗粒度? 答案是不相同。我们证明前者仍强于后者。根据定义 3.1 (3), 对任何原子公式 p , $p \vdash^{Ic} p$ 。我们先证明对复合公式 φ , 如果它的主连接词是 $*$, 那么对 φ 先进行 $*$ 消去, 再使用 $*$ 引入得到 φ , 所得推演便是典范推演。

引理 4.1. 对任意直觉主义命题逻辑公式 φ , 存在典范推演 $\varphi \vdash^{Ic} \varphi$ 。

证明. 对 φ 进行归纳。

- 当 $\varphi = p$, 根据定义 3.1 (3), $p \vdash^{Ic} p$ 。
- 当 $\varphi = \psi \wedge \chi$, 存在如下典范推演

$$\frac{\frac{\psi \wedge \chi}{\psi} E\wedge_1 \quad \frac{\psi \wedge \chi}{\chi} E\wedge_2}{\psi \wedge \chi} I\wedge$$

- 当 $\varphi = \psi \vee \chi$, 存在如下典范推演

$$\frac{\psi \vee \chi \quad \frac{[\psi]_1}{\psi \vee \chi} IV_1 \quad \frac{[\chi]_2}{\psi \vee \chi} IV_2}{\psi \vee \chi} EV^{1,2}$$

- 当 $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, 存在如下典范推演

$$\frac{\psi \rightarrow \chi \quad [\psi]_1}{\chi} E\rightarrow \quad \frac{}{\psi \rightarrow \chi} I\rightarrow^1$$

- 当 $\varphi = \neg\psi$, 存在如下典范推演

$$\frac{\neg\psi \quad [\psi]_1}{\perp} E\neg \quad \frac{}{\neg\psi} I\neg^1$$

根据定义 3.1, 上述推演都是典范的。 □

定理 4.2. 对任意直觉主义命题逻辑公式 φ 和 ψ , 以下命题成立:

- (1) $\varphi \equiv \psi \not\Rightarrow \varphi \equiv_G \psi$.
- (2) $\varphi \equiv_G \psi \Rightarrow \varphi \equiv \psi$.

证明. 对于 (1), 考虑如下例子。显然 $(p \vee q) \wedge (r \rightarrow r) \equiv q \vee p$, 但 $(p \vee q) \wedge (r \rightarrow r) \not\equiv_G q \vee p$, 因为 $(p \vee q) \wedge (r \rightarrow r) \not\vdash^{Ic} q \vee p$ 。首先, 显然不存在以析取引入规则得到 $q \vee p$ 的情况, 因为从前提无法得到 p 或 q 。其次, 可能存在如下以析取消去规则得到 $q \vee p$ 的情况, 但根据定义 3.1, 析取消去的主前提必须是 $(p \vee q) \wedge (r \rightarrow r)$ 而非 $p \vee q$, 所以这种情况也不可能。

$$\frac{\frac{(p \vee q) \wedge (r \rightarrow r)}{\boxed{p \vee q}} E\wedge_1 \quad \frac{[p]_2}{q \vee p} I\vee_2 \quad \frac{[q]_1}{q \vee p} I\vee_1}{q \vee p} E\vee^{2,1} \quad (\dagger)$$

对于 (2), 假设 $\varphi \equiv_G \psi$, 根据引理 4.1, $\varphi \vdash^{Ic} \varphi$, 因此 $\{\varphi\} \in GA[\varphi] = GA[\psi]$, 所以 $\{\varphi\} \vdash^{Ic} \psi$, 即 $\varphi \vdash^{Ic} \psi$ 。类似地, 可得 $\psi \vdash^{Ic} \varphi$, 因此 $\varphi^{Ic} \dashv\vdash^{Ic} \psi$, 从而 $\varphi \dashv\vdash \psi$, 根据可靠性有 $\varphi \equiv \psi$ 。□

因此, GA 的意义颗粒度仍强于 MTS 的颗粒度。但不难发现, 逻辑有效式仍具有相同的 GA 意义, 因为“如果 φ 存在证明, 则它存在典范证明”¹³ 成立。对于任何有效式 φ , 显然 $\emptyset \in GA[\varphi]$, 根据典范推演单调性, 对任意公式集 Γ , 都有 $\Gamma \in GA[\varphi]$ 。综上, GA 的意义颗粒度已然接近 MTS 的颗粒度。在下一节我们指出对放松效果起到关键作用的是典范推演的定义。

4.3 进一步放松 PTS 的意义颗粒度

定理 4.2 证明里的 (†) 根据定义 3.1 条件 (2) 不是典范推演, 但结论 $q \vee p$ 同样由引入规则 (根据意义) 得到, 并被析取消去规则保持下来, 只是结论 $q \vee p$ 依赖的主前提是比前提 $(p \vee q) \wedge (r \rightarrow r)$ 更弱的 $p \vee q$, 但结论仍然间接地依赖于前提 $(p \vee q) \wedge (r \rightarrow r)$ 。鉴于此, 我们定义如下更弱版本的典范推演。

定义 4.1 (w -典范推演). w -典范推演的定义由定义 3.1 中 (2) 替换为如下 (2)' 得到。

(2)' 该推演最后一步使用消除假设的消去规则, 并且它包含的 (除以主前提为结论外的) 子推演都是结论为 ψ 的典范推演。

从 Γ 到 φ 的 w -典范推演记为 $\Gamma \vdash^{Iwc} \varphi$ 。定义 $GA'[\varphi] := \{\Gamma \mid \Gamma \vdash^{Iwc} \varphi\}$, 我们证明 GA' 具有和 MTS 相同的意义颗粒度。首先证明比引理 4.1 更强的结果。

引理 4.3. 对任意直觉主义命题逻辑公式 φ 和 ψ , $\varphi \dashv\vdash \psi$ 当且仅当 $\varphi^{Iwc} \dashv\vdash^{Iwc} \psi$ 。

证明. ($\Leftarrow$) 显然。

($\Rightarrow$) 假设 $\varphi \vdash \psi$, 施归纳于 ψ , 证明 $\varphi \vdash^{Iwc} \psi$ 。

- 当 $\psi = p$, 则 $\varphi = p$, 根据定义 4.1 (3), $p \vdash^{Iwc} p$ 。
- 当 $\psi = \chi \wedge \xi$, 存在如下 φ 到 ψ 典范推演

$$\frac{\frac{\frac{\varphi}{\mathcal{D}} \quad \chi \wedge \xi}{\chi} E\wedge_1 \quad \frac{\frac{\varphi}{\mathcal{D}} \quad \chi \wedge \xi}{\xi} E\wedge_2}{\chi \wedge \xi} I\wedge$$

¹³ 参看 [22], 第 250 页。注意区分典范证明和典范推演的区别, 通常“如果 $\Gamma \vdash \varphi$, 那么 $\Gamma \vdash^{Ic} \varphi$ ”是不成立的。

- 当 $\psi = \chi \vee \xi$, 存在如下 φ 到 ψ 典范推演 (注意, w -典范推演的 (2)' 保证了结论 $\chi \vee \xi$ 间接地依赖于前提 φ)

$$\frac{\frac{\varphi}{\boxed{\chi \vee \xi}} \mathcal{D} \quad \frac{[\chi]_1}{\chi \vee \xi} \text{IV}_1 \quad \frac{[\xi]_2}{\chi \vee \xi} \text{IV}_2}{\chi \vee \xi} \text{EV}^{1,2}$$

- 当 $\psi = \chi \rightarrow \xi$, 存在如下 φ 到 ψ 典范推演

$$\frac{\frac{\varphi}{\chi \rightarrow \xi} \mathcal{D} \quad \frac{[\chi]_1}{\xi} \text{E} \rightarrow}{\frac{\xi}{\chi \rightarrow \xi} \text{I} \rightarrow^1}$$

- 当 $\psi = \neg \chi$, 存在如下 φ 到 ψ 典范推演

$$\frac{\frac{\varphi}{\neg \chi} \mathcal{D} \quad \frac{[\chi]_1}{\perp} \text{E} \neg}{\frac{\perp}{\neg \chi} \text{I} \neg^1}$$

根据定义 4.1, 上述推演均为 w -典范推演。假设 $\psi \vdash \varphi$, 经过相似论证可得 $\psi \vdash^{Iwc} \varphi$, 因此 $\varphi^{Iwc} \dashv\vdash^{Iwc} \psi$ 。□

定理 4.4. 直觉主义命题逻辑 w -典范推演具有以下性质

- (1) 自返性。对任意 φ , 存在 $\varphi \vdash^{Iwc} \varphi$ 。
- (2) 单调性。如果存在 $\Gamma \vdash^{Iwc} \varphi$ 且 $\Gamma \subseteq \Sigma$, 那么存在 $\Sigma \vdash^{Iwc} \varphi$ 。
- (3) 传递性。如果存在 $\Gamma \vdash^{Iwc} \varphi$ 且 $\varphi \vdash^{Iwc} \psi$, 那么存在 $\Gamma \vdash^{Iwc} \psi$ 。

证明. (1) 是引理 4.3 的一个特例。对于 (2), 显然 Γ 到 φ 的 w -典范推演也是 Σ 到 φ 的 w -典范推演。对于 (3), 记推演 $\Gamma \vdash^{Iwc} \varphi$ 为 $\mathcal{D}$, 推演 $\varphi \vdash^{Iwc} \psi$ 为 $\mathcal{D}'$, 根据定义 4.1 推演 $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}'}$ 为从 Γ 到 ψ 的 w -典范推演。□

相同的论证可以得到典范推演也具有上述性质 (2) 和 (3), (1) 就是引理 4.1。

定理 4.5. 任意直觉主义命题逻辑公式 φ 和 ψ , $\varphi \equiv \psi$ 当且仅当 $\varphi \equiv_{G'} \psi$ 。

证明. ($\implies$) 假设 $\varphi \equiv \psi$, 根据完全性有 $\varphi \dashv\vdash \psi$, 根据引理 4.3, $\varphi^{Iwc} \dashv\vdash^{Iwc} \psi$ 。任取 $\Gamma \in GA'[\![\varphi]\!]$, 则有 $\Gamma \vdash^{Iwc} \varphi$, 根据定理 4.4 (3) 得 $\Gamma \vdash^{Iwc} \psi$, 所以 $\Gamma \in GA'[\![\psi]\!]$, 因此 $GA'[\![\varphi]\!] \subseteq GA'[\![\psi]\!]$ 。类似可得 $GA'[\![\psi]\!] \subseteq GA'[\![\varphi]\!]$, 因此 $GA'[\![\varphi]\!] = GA'[\![\psi]\!]$, 即 $\varphi \equiv_{G'} \psi$ 。

($\impliedby$) 假设 $\varphi \equiv_{G'} \psi$ 。根据定理 4.4 (1), $\varphi \vdash^{Iwc} \varphi$, 因此 $\{\varphi\} \in GA'[\![\varphi]\!] = GA'[\![\psi]\!]$, 所以 $\{\varphi\} \vdash^{Iwc} \psi$, 即 $\varphi \vdash^{Iwc} \psi$ 。类似地, 可得 $\psi \vdash^{Iwc} \varphi$, 因此 $\varphi \dashv\vdash \psi$, 根据可靠性有 $\varphi \equiv \psi$ 。□

4.4 一些评论

PTS 具有细密得多的意义颗粒度。MTS 的语义值是真值条件，PTS 的语义值是得到“真”的特定方式（典范证明），在这个意义上，前者是“外延的”，后者是“内涵的”。如果一个命题存在典范证明，那么当然蕴含它为真且它是可证的，这便是 PTS 意义颗粒度比 MTS 细密的原因。然而 PTS 意义颗粒显得过于细密。根据定义，公式 φ 的意义是一个情景化的函数。如果 φ 和 ψ 的意义相同，即 $\llbracket \varphi \rrbracket^p = \llbracket \psi \rrbracket^p$ ，那么 $\lambda \Gamma. \llbracket \varphi \rrbracket_{\Gamma}^{fc} = \lambda \Gamma. \llbracket \psi \rrbracket_{\Gamma}^{fc}$ ，即这两个函数相等，因此势必要求对任意 Γ ， $\llbracket \varphi \rrbracket_{\Gamma}^{fc} = \llbracket \psi \rrbracket_{\Gamma}^{fc}$ ，即一个推演如果是从 Γ 到 φ 的典范推演当且仅当它是从 Γ 到 ψ 的典范推演。因为结论不相同的两个推演显然不是相同推演¹⁴，所以 $\llbracket \varphi \rrbracket_{\Gamma}^{fc} = \llbracket \psi \rrbracket_{\Gamma}^{fc}$ 实际上要求 $\varphi = \psi$ ，即 φ 和 ψ 是相同公式，因此 PTS 语义对公式意义的区分是“字符串式”的，两个公式从语形上看是不同的，那么意义就不同。这意味着语言中每句话的意义都不同，而无论自然语言还是人工语言中都存在大量的同义现象，具有如此之强意义区分度的语义的应用价值是局限的。

雅各认为 PTS 不具有超内涵性。（[14]，第 66–67 页）他将 φ 的具体意义 $\llbracket \varphi \rrbracket$ 理解为能够推得 φ 的公式集的集合 $G[\varphi]$ 和能从 φ 推得的公式的集合 $CON[\varphi]$ 的并， $G[\varphi] \cup CON[\varphi]$ 。对逻辑等值的 φ 和 ψ ，根据完全性有 $\varphi \dashv\vdash \psi$ 。那么对任意公式集 Γ ，显然 $\Gamma \vdash \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \vdash \psi$ ；并且对任意公式 χ ， $\varphi \vdash \chi$ 当且仅当 $\psi \vdash \chi$ 。因此 φ 和 ψ 的意义相同。另外，类似于定理 4.2 (2) 和定理 4.5 ($\Leftarrow$) 的证明，可从 $\llbracket \varphi \rrbracket = \llbracket \psi \rrbracket$ 得到 $\varphi \equiv \psi$ ，因此雅各的意义颗粒度也与 MTS 的相同。然而我们在节 4.1 已经指出，由于 PTS 下句子的意义是得到它的典范推演的集合，而并非它的依据和后果的公式集（或公式）的集合，PTS 是超内涵的，雅各的断言是错误的。

雅各虽然对 PTS 意义颗粒度理解有偏差，但他的主要观点“PTS 不容易实现超内涵内容”（[14]，第 68 页）是有意义的。实现超内涵的代价是采用了比“真”“可证性”等强得多的典范推演概念，其结果是“字符串式”的意义颗粒度，而颗粒度的放松 GA 和 GA' 则很快倒向 MTS。 GA 虽强于 MTS 颗粒度，但逻辑有效式具有相同的意义（节 4.2）。 GA' 更是与 MTS 的颗粒度相同。它们快速倒向 MTS 的原因是我们考虑了典范推演的依据，而不再考虑典范推演本身，使得 PTS 的意义更具“外延性”。对于雅各的理解，根据完全性，逻辑等值实质上是互可推演性，而推演传递性保证逻辑等值命题分享相同的依据和后果。类似地，对于 GA' ，我们在定义 w -典范推演的基础上，建立了逻辑等值与互 w -典范可推演性之间的等

¹⁴推演或证明的同一性是证明论研究的重要而困难的问题，至今仍未有相对统一的意见，例如普拉维茨曾提出在自然演绎系统中通过“正规化”定义证明的同一性，即两个证明存在相同的正规形式则它们是相同证明。（参看 [22] 和 [4]）要求两个相同证明具有相同的结论公式似乎是必要且合理的条件，普拉维茨的定义虽诉诸于归约，但也做此要求。

价关系,而基于典范推演定义的 GA 则不能建立上述等价关系,因而意义颗粒度不同于 MTS 。

对 PTS 意义颗粒度的放松从本质上看是一种对结构(典范证明)的消除或弱化。典范推演表达了一种特定的推演结构,该结构导致了对公式意义的“字符串”式的区分。实际上,仅仅诉诸推演已经能达成这种区分效果,因为推演的结论不同就已经保证推演是不同的。弗朗西斯将公式的意义从它的所有典范推演的集合变为它的所有典范推演的依据的集合,“忘掉”部分结构(推演的结论),从而放松意义颗粒度。

MTS 领域诸多试图消解逻辑全知的方案则从反方向,为真值条件加入特定的语形结构来收紧意义颗粒度,具有代表性的是费金(R. Fagin)等的“觉识”逻辑(the logic of awareness, [7])和不可能世界模型([3])。以“觉识”逻辑为例,它要求主体相信 φ 必须以“觉识”到 φ 为前提,每个世界 w 上,觉识函数为主体指定一个公式集 $\mathcal{A}(w)$ 表示主体在 w 上觉识到的句子的集合。主体觉识 φ , 当且仅当 $\varphi \in \mathcal{A}(w)$ 。可根据需要为 $\mathcal{A}$ 加入特定条件,例如不允许由主体觉识到 $\varphi \wedge \psi$ (即 $\varphi \wedge \psi \in \mathcal{A}(w)$) 得到他觉识 φ (即 $\varphi \in \mathcal{A}(w)$)。 w 上主体相信 φ 被定义为: (a) w 的任意后继世界上 φ 为真; (b) 且主体觉识 φ 。其中 (a) 是通常不具有超内涵性的“相信”,而基于“觉识”的“相信”是超内涵的。核证逻辑(justification logic)与此类似,只是“觉识”概念被替换为证据概念。(参看 [1]) 以上对比说明了 PTS 和 MTS 的语义颗粒度分处两个极端,而真正具有良好应用价值的是两者的某种折中,从这方面讲, MTS 对意义颗粒度的控制似乎更具有灵活性。

5 总结

PTS 是从哲学思想到技术方法都异于传统 MTS 的一种意义理论。 PTS 源自根岑对 ND 影响深远的评论,作为意义理论则归属于当代语言哲学推理主义思潮,是对推理主义少有的实践,然而相对于布兰顿等的观点,它是一种温和的、分子式的、逻辑改良主义的、具有反实在论和证实主义立场的推理主义。 PTS 的赋意机制建立在满足特定性质的自然演绎系统之上,其中协调性反映了引入和消去规则之间的某种平衡,被认为是最重要的性质。有效性是 PTS 的核心概念,它建立在典范推演的基础上。一个推演的有效性被定义为从前提到结论对典范可推演性的传递。精细的意义颗粒度是 PTS 的重要特点,我们指出 PTS 具有过于细密的“字符串式”的意义颗粒度,证明弗朗西斯的放松的颗粒度仍比 MTS 精细,并且进一步放松颗粒度与 MTS 相同。基于这些结果我们指出 PTS 超内涵性的代价是巨大的,而放松的颗粒度则很快倒向 MTS 。在评论中我们还指出对 PTS 意义颗粒度的放松本质上是一种对结构的消除或简化,而对 MTS 意义颗粒进行收紧则是

加入特定的语形结构,后者对意义颗粒度的控制更具有灵活性,因此 PTS 在意义颗粒度上相对于 MTS 的优势是有限的。

PTS 拥护者认为 PTS 是比 MTS 更为充分的意义理论。除了已讨论的意义颗粒度问题,MTS 还被批评存在解释力问题。通常认为 MTS 建立了语言和世界的联系,例如个体项对应于世界中的对象,句子的真值对应于世界中的事实。奎因(W. V. Quine)批评这种实在论的意义理论为“博物馆神话”,“语言表达式就像博物馆中展品的标签,展品则是意义。切换语言实际上仅是变换标签。”([25],第 27 页)实际上没有理论可以直接联系起语言与世界,它们至多建立逻辑语言与特定元语言的联系,并假定对元语言的理解。MTS 语义解释的元语言是集合论语言和自然语言,它们用于描述模型以及基于模型的真值条件,合取连接词“ $\wedge$ ”的解释是元语言(自然语言)中的“并且”,并且该解释假定了对“并且”的理解,从“ $\wedge$ ”到“并且”仅是“标签”的转换,并没有解释意义本身,因此从这个角度看,MTS 的解释力是不足的。PTS 作为一种推理主义的意义理论,通过推演(即逻辑语言的用法)来解释表达式的意义。推演是通常所谓的语形成分,并非外在于语言,从而避免了上述解释力问题。

PTS 避免“博物馆神话”的代价是语义缺乏经验主义色彩。威廉姆森(T. Williamson)批评道:“由于推理关系没有固定真值和指称,因此意义没有与独立于语言的世界建立紧密联系。”([32],第 23 页)此外,PTS 面临着许多自身理论建构的问题,如原子系统的解释问题,向其他逻辑的扩充问题,诸多不完全性结果以及逻辑常项以外的表达式的解释问题等。我们认为 PTS 与 MTS 不是非此即彼,互相竞争的关系,而是可以进行互相吸收借鉴,融合发展的关系。在 MTS “语言-世界”解释体系内如何融入 PTS 的意义解释方法,例如解释如何获得 MTS 的语义值,是值得进一步研究的问题。

参考文献

- [1] S. Artemov and M. Fitting, 2019, *Justification Logic: Reasoning with Reasons*, New York: Cambridge University Press.
- [2] N. Belnap, 1962, “Tonk, plonk and plink”, *Analysis*, **22(6)**: 30–35.
- [3] F. Berto and M. Jago, 2019, *Impossible Worlds*, Oxford: Oxford University Press.
- [4] K. Došen, 2003, “Identity of proofs based on normalization and generality”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, **5579**: 477–503.
- [5] M. Dummett, 1973, *Frege: Philosophy of Language*, London: Duckworth.
- [6] M. Dummett, 1991, *The Logical Basis of Metaphysics*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

- [7] R. Fagin and J. Y. Halpern, 1988, “Belief, awareness, and limited reasoning”, *Artificial intelligence*, **34(1)**: 39–76.
- [8] R. Fagin, J. Y. Halpern, Y. Moses and M. Y. Vardi, 1995, *Reasoning about Knowledge*, Cambridge, Mass: MIT Press.
- [9] N. Francez, 2014, “The granularity of meaning in proof-theoretic semantics”, in N. Asher and S. Soloviev (eds.), *Logical Aspects of Computational Linguistics*, pp. 96–106, Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.
- [10] N. Francez, 2014, “Views of proof-theoretic semantics: Reified proof-theoretic meanings”, *Journal of Logic and Computation*, **26(2)**: 479–494.
- [11] N. Francez, 2015, “On the notion of canonical derivations from open assumptions and its role in proof-theoretic semantics”, *The Review of Symbolic Logic*, **8(2)**: 296–305.
- [12] N. Francez, 2015, *Proof-Theoretic Semantics*, London: College Publications.
- [13] G. Gentzen, 1969, “Investigations into logical deduction”, in M. E. Szabo (ed.), *The collected papers of Gerhard Gentzen*, pp. 68–132, North-Holland Amsterdam, English translation of the 1935 paper in German.
- [14] M. Jago, 2014, *The Impossible: An Essay on Hyperintensionality*, New York: Oxford University Press.
- [15] N. Kürbis, 2012, “How fundamental is the fundamental assumption?”, *Teorema*, **31(2)**: 5–19.
- [16] A. N. Prior, 1960, “The runabout inference-ticket”, *Analysis*, **21**: 38–39.
- [17] S. Negri, J. von Plato and A. Ranta, 2008, *Structural Proof Theory*, New York: Cambridge University Press.
- [18] I. Pezlar, 2018, “Proof-theoretic semantics and hyperintensionality”, *Logique Et Analyse*, **61**: 151–161.
- [19] T. Piecha and P. Schroeder-Heister, 2016, “Atomic systems in proof-theoretic semantics: Two approaches”, in J. Redmond, O. Pombo Martins and Á. Nepomuceno Fernández (eds.), *Epistemology, Knowledge and the Impact of Interaction, Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, Vol. 38, pp. 47–62, Cham: Springer International Publishing.
- [20] T. Piecha and P. Schroeder-Heister, 2019, “Incompleteness of intuitionistic propositional logic with respect to proof-theoretic semantics”, *Studia Logica*, **107(1)**: 233–246.
- [21] D. Prawitz, 1965, *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Soft cover edition by Dover, 2006., Stockholm: Almqvist and Wicksell.
- [22] D. Prawitz, 1971, “Ideas and results in proof theory”, in J. E. Fenstad (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, pp. 235–307, Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- [23] D. Prawitz, 1973, “Towards a foundation of a general proof theory”, in P. Suppes, L. Henkin, A. Joja and G. C. Moisil (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV*, pp. 225–250, Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- [24] D. Prawitz, 1974, “On the idea of a general proof theory”, *Synthese*, **27**: 63–77.

- [25] W. V. Quine, 1969, *Ontological Relativity and Other Essays*, New York: Columbia University Press.
- [26] P. Schroeder-Heister, 1984, “A natural extension of natural deduction”, *Journal of symbolic logic*, **49**: 1284–1300.
- [27] P. Schroeder-Heister, 1991, “Uniform proof-theoretic semantics for logical constants (abstract)”, *Journal of Symbolic Logic*, **56**: 1142.
- [28] P. Schroeder-Heister, 2006, “Validity concepts in proof-theoretic semantics”, *Synthese*, **148**: 525–571.
- [29] P. Schroeder-Heister, 2022, “Proof-Theoretic Semantics”, in E. N. Zalta and U. Nodelman (eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Metaphysics Research Lab, Stanford University, <https://plato.stanford.edu/archives/win2022/entries/proof-theoretic-semantics>.
- [30] F. Steinberger, 2011, “Why conclusions should remain single”, *Journal of Philosophical Logic*, **40**: 333–355.
- [31] N. Tennant, 2020, “Inferentialism, logicism, harmony, and a counterpoint”, in A. Miller (ed.), *Logic, Language, and Mathematics: Themes from the Philosophy of Crispin Wright*, pp. 223–248, New York: Oxford University Press.
- [32] W. Timothy, 2010, “Review of Robert Brandom, *Reason in Philosophy: Animating Ideas*”, *Times Literary Supplement*, **9(4)**: 22–23.

（责任编辑：执子）

Proof-Theoretic Semantics and Its Granularity of Meaning

Xuezhe Dang

Abstract

Proof-Theoretic semantics is a logical semantics that explains the meaning of expressions through *proofs*, and it differs from traditional model-theoretic semantics in both philosophical and technical aspects. As a form of inferentialist theory of meaning, it also exhibits significant differences from inferentialism advocated by Brandom. Proof-Theoretic semantics establishes the concept of validity and other semantic notions primarily through canonical proofs rather than *truth*, thus achieving a more fine-grained granularity of meaning. We elucidates the philosophical background and mechanisms of meaning interpretation, highlighting its overly restricted “string-like” granularity of meaning. It is demonstrated that certain relaxing based on amending the definition of caninocical deduction quickly leads to a shift towards the granularity of model-theoretic semantics, thereby indicating the limited advantage over model-theoretic semantics in terms of granularity of meaning.