

基于证据支持度的信念逻辑研究

侯丽平

郭美云 

摘要: 一个智能主体对某一信息的相信及相信程度分别与证据和证据支持度密切相关。本文试图通过模态逻辑方法, 从语义及公理化角度探究证据支持度和信念强度之间的联系。在文中, 分别用 $KD45$ 和 KD 正规模态表达强信念算子和带程度的信念算子, 用带程度的模态算子表达含程度的证据, 通过在模型上加约束条件的方式将证据关系和信念关系联系起来, 表达出了证据支持度和信念强度之间的联系, 并建立了一个可靠且完全的公理系统。这实现了证据支持度和信念强度联系的形式化研究, 为处理不确定信息提供了定性和定量相结合的分析方法。

关键词: 证据支持度; 信念强度; 不确定性信息; 模态逻辑

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 引言

信念是人类认识自我和世界的重要因素。证据是人类是否相信某一观点或信息的重要依据。对于理性主体而言, 要相信某一信息, 往往需要有充足的证据支持。例如, 在法庭诉讼过程中, 法官要相信某嫌疑犯有罪并判其有罪, 一定得有证据的支持, 否则无法判罪。也就是说, 信念与证据之间有着密切的联系。对于信念、证据和二者间联系的研究备受关注, 是哲学和逻辑学的热门课题。

在哲学方面, 不仅有单独研究信念和证据的(主要研究其内涵和特点等), 还有研究二者之间联系的。关于二者联系的研究, 早在古希腊就有所涉及。柏拉图提出了关于知识的定义——知识是被确证的真信念(justified true belief, [13])。在这一定义中, 间接揭示出了信念和证据之间的联系。而后, 齐硕姆(R. Chisholm)、苏珊·哈克(Susan Haack)、费尔德曼(R. Feldman)、柯尼(E. Conee)和诺齐克(R. Nozick)等学者陆续提出了证据主义(evidentialism)理论。([9, 12, 15, 16])。该理论主要探讨了证据、信念和确证问题, 其中也涉及到了信念与证据之

收稿日期: 2023-04-09

作者信息: 侯丽平 贵州民族大学民族文化与认知科学学院
331572186@qq.com

郭美云  西南大学逻辑与智能研究中心
guomy007@swu.edu.cn

基金项目: 国家社科基金青年项目“基于社会网络的动态信念修正研究”(22CZX023); 国家社科基金重点项目“概率更新的动态认知逻辑研究”(21AZX013)。

间的联系。例如,柯尼和费尔德曼在文章《证据主义》中指出,只有当主体拥有关于信念的充分证据时,才是合理的([9]);克利福德(W. Clifford)在《信念伦理学》中指出“人类的理智义务之一就是在充分的证据基础上接受信念。”([4],第339–363页)蒯因在《信念之网》中也探讨了信念与证据之间的联系。他认为理性主体的信念离不开证据的支持。他还探讨了信念强度和证据支持度之间的联系。他指出:“只要我们理智地对待我们的信念,信念的强度往往与支持它的证据的支持度一致”。([14],第345页)奥迪(R. Audi)对信念和证据之间是如何联系的进行了探讨。他认为理由(证据)和出自于理由的信念之间是一种推出关系,这种推出可以是结构上的,即简略的推导,也可以是过程上的,即从前提到结论一步一步详细地推导。他进而把这种推出关系理解为解释性的,并在广义上,将其看成因果性的。([1],第238–239页)

在哲学分析的基础之上,学者们对信念和证据进行了形式化研究,将其表示为模态算子,由模态逻辑的可能世界语义表达其意义。([2, 3, 7])。在文[10]和[8]中还研究了信念的强度并将其用模态算子 B_a^σ 表示。范本特姆(J. van Benthem)在文[3]和[2]中研究了证据,他将证据表示为 $\Box\varphi$ (表示主体有证据支持 φ) 并给出了证据的邻域模型(neighbourhood model)。基于此模型可定义出证据的语义,进而给出信念的语义。虽然范本特姆同时探讨了信念和证据,但没有真正从技术上将信念和证据联系起来,用以表达证据对主体信念形成的影响。另外,范本特姆还通过在证据的邻域结构中添加新的对应于认知或信念的可及关系,以及添加约束条件(constraint condition)的方式来丰富证据的邻域模型。即,在一般的证据模型 $M = (W, E, B, \leq, V)$ 中,对新的关系 B 和 $\leq$ 分别加上约束条件,从而将一般模型扩张为预期模型(intended model) $M = (W, E, B_E, \leq_E, V)$ 。([2]) 尽管这类探讨在给出的模型中含有信念关系与证据关系,但没有将二者联系起来,无法表达出证据对主体信念形成的影响。

在文[11]中,刘奋荣和洛里尼(E. Lorini)结合信念逻辑和证据逻辑的方法探讨了信念和证据之间的联系。他们从语法上通过证据定义出了主体有理由相信 φ ($R_i\varphi$),再通过有理由相信将信念和证据间接地联系了起来。信念与证据之间的联系不仅仅停留于简单的关联性上,还有着更深层的联系,如信念的强度与证据的支持度之间存在联系。通常,证据对某一信息的支持程度越强,人们越相信该信息。反之,证据对某一信息的支持程度越弱,人们越不相信该信息。但是,他们没有探讨信念强度和证据支持度之间的联系。

信念强度和证据支持度之间的联系在认知不确定性信息、获得知识和真理等过程中扮演着非常重要的角色。研究二者之间的联系,有助于深入认识人类处理信息的方式和认知规律,为认知科学、人工智能、博弈论、信息安全、不确定性推理和信念修正等领域的研究提供新思路 and 理论,促进其学科发展。目前,关于二者联系的研究,主要停留在概念层面,很少从形式化层面进行探讨。

对二者之间的联系进行形式化研究, 不仅有助于丰富信念逻辑和证据逻辑理论, 而且有助于人工智能更好地模拟人类处理不确定性信息的方式。如前所述的关于信念和证据关系的形式化研究方法难以刻画出信念强度和证据支持度之间的联系。德莫隆布 (R. Demolombe) 在文 [6] 中探讨了主体交流过程中信息获取和信任程度对信念的影响。受该文的启示, 我们将表示出信念强度和证据支持程度的等级, 通过在等级上加偏序 ([5, 6]), 并在模型上加入约束条件的方式, 将信念和证据关系联系起来, 探讨信念强度和证据支持度之间的联系的形式化问题。

在本文的第二部分, 我们将探讨语言和语义。第三和第四部分分别探讨可靠性和完全性问题。第五部分进行总结与展望。

2 语言、语义

定义 2.1 (语言). 给定一个可数原子命题集 P , 一个有穷主体集 A , 主体 $a \in A$, 一个正有理数集 $\mathbb{Q}^+$, 程度 $\sigma \in \mathbb{Q}^+$, 基于证据支持度的信念逻辑语言 ($\mathcal{L}_{BE}$) 定义如下:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid B_a\varphi \mid B_a^\sigma\varphi \mid E_a^\sigma\varphi (p \in P)$$

其中, $B_a\varphi$ 表示 a 强相信 φ ; $B_a^\sigma\varphi$ 表示 a 在 σ 程度上相信 φ ; $E_a^\sigma\varphi$ 表示 a 有证据在 σ 程度上支持 φ 。

定义 2.2 (模型). 给定一个可数原子命题集 P , 一个有穷主体集 A , 主体 $a \in A$, 一个正有理数集 $\mathbb{Q}^+$, 程度 $\sigma \in \mathbb{Q}^+$, 基于证据支持度的信念逻辑模型是一个多元组 $M = (W, R, R^\sigma, Z^\sigma, V)$, 其中:

- W 是一个可能世界非空集合;
- $R: A \rightarrow \wp(W \times W)$, $R(a) \subseteq W \times W$, 将其中的 $R(a)$ 写成 R_a 。 R_a 表示 a 的可及关系, 具有持续性、传递性和欧性;
- $R^\sigma: A \rightarrow \wp(W \times W)$, $R^\sigma(a) \subseteq W \times W$, 将其中的 $R^\sigma(a)$ 写成 R_a^σ 。 R^σ 表示 a 的带程度的可及关系, 具有持续性;
- $Z^\sigma: A \rightarrow \wp(W \times 2^W)$, $Z^\sigma(a) \subseteq W \times 2^W$, 将其中的 $Z^\sigma(a)$ 写成 Z_a^σ 。 Z_a^σ 表示带程度的证据关系;
- $V: P \rightarrow \wp(W)$ 表示给每个原子命题指定可能世界集的赋值函数, 也就是在这些可能世界上原子命题为真。
- R_a 的后继集 $R_a^\sigma(w)$ 定义为 $\{v \in W \mid wR_a^\sigma v\}$, Z_a^σ 的后继集 $Z_a^\sigma(w)$ 定义为 $\{X \mid wZ_a^\sigma X\}$ 。对 $w \in W$, 称 (M, w) 为基于证据支持度的信念逻辑的点模型。

另外, 对带程度的证据关系的解释, 需要加入一些约束条件。其约束条件是对任意 $a \in A$, 任意 $w \in W$, 任意 $\sigma \in \mathbb{Q}^+$:

- (1) $\emptyset \notin Z_a^\sigma(w)$;
- (2) $W \in Z_a^\sigma(w)$;
- (3) 对所有 $X, Y \subseteq W$, 若 $X \in Z_a^\sigma(w)$, 且 $Y \in Z_a^\sigma(w)$, 则 $X \cap Y \in Z_a^\sigma(w)$;
- (4) 对所有 $X, Y \subseteq W$, 若 $X \in Z_a^\sigma(w)$, 且 $X \subseteq Y$, 则 $Y \in Z_a^\sigma(w)$ 。

其中, (1) 表示任意带程度的证据集不可能为空集, 即没有证据在任何程度上支持矛盾; (2) 表示全集 W 是一个带程度的证据集, 即有证据在任何程度上支持重言式; (3) 表示 $Z_a^\sigma(w)$ 对交封闭, 即若分别有证据在任何程度上支持 φ 和 ψ , 则有证据在任何程度上支持 $\varphi \wedge \psi$; (4) 表示 $Z_a^\sigma(w)$ 具有单调性。

定义 2.3 (语义). 给定一个基于证据支持度的信念逻辑模型 $M = (W, R, R^\sigma, Z^\sigma, V)$, $w \in W$, 我们将一个公式 φ 在模型 M 中的 w 点上为真 (记为 $M, w \models \varphi$) 递归定义如下:

$$\begin{aligned}
 M, w \models p & \quad \text{当且仅当} \quad w \in V(P); \\
 M, w \models \neg \varphi & \quad \text{当且仅当} \quad M, w \not\models \varphi; \\
 M, w \models \varphi \wedge \psi & \quad \text{当且仅当} \quad M, w \models \varphi \text{ 且 } M, w \models \psi; \\
 M, w \models B_a \varphi & \quad \text{当且仅当} \quad \text{对所有 } v \in W, \text{ 若 } (w, v) \in R_a, \text{ 则 } M, v \models \varphi; \\
 M, w \models B_a^\sigma \varphi & \quad \text{当且仅当} \quad \text{对所有 } v \in W, \text{ 若 } (w, v) \in R_a^\sigma, \text{ 则 } M, v \models \varphi; \\
 M, w \models E_a^\sigma \varphi & \quad \text{当且仅当} \quad \text{存在一个可能世界集 } X, \text{ 使 } w Z_a^\sigma X, \\
 & \quad \text{且对所有 } v \in X, M, v \models \varphi.
 \end{aligned}$$

命题 2.1. 关于 $E_a^\sigma \varphi$ 的语义定义, 以下 (1) 和 (2) 是等价的:

- (1) 存在一个可能世界集 X , 使 $w Z_a^\sigma X$, 且对所有 $v \in X$, $M, v \models \varphi$ 。
- (2) $\llbracket \varphi \rrbracket^M \in Z_a^\sigma(w)$, 其中 $\llbracket \varphi \rrbracket^M = \{v \in W \mid M, v \models \varphi\}$ 。
(后文在不会引起混淆时, 将省略其上标 M 。)

容易证明 (1) 和 (2) 等价的。对于易证的命题和引理, 本文将统一略去其证明, 以下不再赘述。

当一个公式 φ 在一个基于证据支持度的信念逻辑模型 M 中的所有 $w \in W$ 点上都真, 我们称 φ 在 M 中为真, 记为 $\models_M \varphi$; 当一个公式 φ 在一个基于证据支持度的信念逻辑模型类 $\mathbb{C}$ 中的所有模型 M 中都真, 即 φ 在一个基于证据支持度的信念逻辑模型类 $\mathbb{C}$ 中的所有模型 M 中的所有 $w \in W$ 点上都真, 我们称 φ 在 $\mathbb{C}$ 中是有效的, 记为 $\models_{\mathbb{C}} \varphi$ 。

在以上定义的模型中, 对所有 $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}^+$, 关系 Z_a^σ 和 R_a^σ 、 R_a^ρ 和 R_a^σ 和 R_a 、 Z_a^σ 和 Z_a^ρ 是相互独立的, 因此, 信念强度和证据支持度、不同强度的信念和不同强度的证据支持也是相互独立的。但从理论上讲, 信念强度与证据支持度、不同强度的信念之间和不同强度的证据支持之间有着密切的联系。我们要从逻辑技

术上探讨其联系, 需要通过约束条件分别将如上关系联系在一起。约束条件对于任意 $a \in A$, 任意 $w \in W$, $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}^+$, $X \subseteq W$:

- (i) 对任意 $X \in Z_a^\sigma(w)$, 有 $R_a^\sigma(w) \subseteq X$;
- (ii) 若 $\rho \leq \sigma$, 则 $R_a^\rho \subseteq R_a^\sigma$;
- (iii) $R_a^\sigma \subseteq R_a$;
- (iv) 若 $\rho \leq \sigma$, 则 $Z_a^\sigma(w) \subseteq Z_a^\rho(w)$ 。

其中, (i) 表示 w 对于 R_a^σ 的所有后继都在 w 对于 Z_a^σ 的任意后继 X 中, 这可以将带程度的信念关系和带程度的证据关系联系在一起。该约束条件对应着“一个信息得到证据多大程度的支持, 常常会得到多大程度的相信”这一预设。此约束条件与德莫隆布提出的约束条件 (m1.1) 类似 ([6]), 但二者有所区别。前者探讨的是证据支持程度对信念的影响, 后者探讨的是信息获取和信任程度对信念的影响。另外, 前一约束条件比后一约束条件更宽泛; (ii) 和 (iii) 表示信念度的强弱和信念关系的大小呈正相关关系。该约束条件对应着高强度的信念蕴涵低强度的信念, 符合认知的直观。这将不同强度的信念联系在一起; (iv) 表示证据支持度的强弱与证据的后继集范围的大小呈负相关关系。它对应着证据的强支持度蕴涵弱支持度, 符合认知的直观, 并将不同强度的证据支持度联系在一起。这是本文特有的约束条件, 德莫隆布在文 [6] 中没有探讨这一问题。

我们将满足以上约束条件的模型称为基于证据支持度的理性信念的基本逻辑模型, 对应的模型类称为基于证据支持度的理性信念的基本逻辑模型类, 用 **BE** 表示。

3 公理系统

定义 3.1 (**BE** 公理系统).

- 基于证据支持度的信念逻辑的公理

P: 所有命题重言式的例示;

$$\text{Ax}_1: (B_a\varphi \wedge B_a(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow B_a\psi;$$

$$\text{Ax}_2: \neg B_a\perp;$$

$$\text{Ax}_3: B_a\varphi \rightarrow B_a B_a\varphi;$$

$$\text{Ax}_4: \neg B_a\varphi \rightarrow B_a\neg B_a\varphi;$$

$$\text{Ax}_5: (B_a^\sigma\varphi \wedge B_a^\sigma(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow B_a^\sigma\psi;$$

$$\text{Ax}_6: \neg B_a^\sigma\perp;$$

$$\text{Ax}_7: \neg E_a^\sigma\perp;$$

$$\text{Ax}_8: E_a^\sigma\top;$$

$$\text{Ax}_9: E_a^\sigma\varphi \wedge E_a^\sigma\psi \rightarrow E_a^\sigma(\varphi \wedge \psi);$$

- $AX_{10}: E_a^\sigma \varphi \rightarrow B_a^\sigma \varphi;$
 $AX_{11}: B_a^\sigma \varphi \rightarrow B_a^\rho \varphi (\rho \leq \sigma);$
 $AX_{12}: B_a \varphi \rightarrow B_a^\sigma \varphi;$
 $AX_{13}: E_a^\sigma \varphi \rightarrow E_a^\rho \varphi (\rho \leq \sigma).$

• 推理规则

Ru_1 (Modus ponens/MP 规则): 若 $\vdash \varphi$, 且 $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, 则 $\vdash \psi$ 。

Ru_2 (Generalization/概括规则): 若 $\vdash \varphi$, 则 $\vdash B_a \varphi$;

若 $\vdash \varphi$, 则 $\vdash B_a^\sigma \varphi$ 。

Ru_3 : 若 $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, 则 $\vdash E_a^\sigma \varphi \rightarrow E_a^\sigma \psi$ 。

AX_1 – AX_4 对应着 KD45 系统。 AX_5 和 AX_6 对应着 KD 系统。 AX_7 表示 a 没有证据在任何程度上支持矛盾, 对应约束条件 (1); AX_8 表示 a 有证据在任何程度上支持重言式, 对应约束条件 (2); AX_9 表示若 a 分别有证据在 σ 程度上支持 φ 和 ψ , 则有证据在 σ 程度上支持 $\varphi \wedge \psi$, 对应约束条件 (3); AX_{10} 表示若 a 有证据在 σ 程度上支持 φ , 则在 σ 程度上相信 φ , 对应约束条件 (i); AX_{11} 表示若 a 在大于或等于 ρ 程度上相信 φ , 则在 ρ 程度上相信 φ , 对应约束条件 (ii); 而 AX_{12} 表示若 a 强相信 φ , 则在任意 σ 程度上相信 φ , 与约束条件 (iii) 对应; AX_{13} 表示若 a 有证据在大于或等于 ρ 程度上支持 φ , 则有证据在 ρ 程度上支持 φ , 与约束条件 (iv) 对应; Ru_3 则与约束条件 (4) 对应。

命题 3.1 (导出规则). 若 $\vdash \varphi$, 则 $\vdash E_a^\sigma \varphi$ 。

命题 3.2. $E_a^\sigma \varphi \rightarrow B_a^\rho \varphi (\rho \leq \sigma)$ 是 **BE** 的内定理。

命题 3.3. 如下一些公式是有效式:

- (a) $\neg(E_a^\sigma \varphi \wedge E_a^\sigma \neg \varphi)$ 在 **BE** 中是有效的;
 (b) $E_a^\sigma (\varphi \wedge \psi) \rightarrow E_a^\sigma \varphi \wedge E_a^\sigma \psi$ 在 **BE** 中是有效的;
 (c) $E_a^\sigma \varphi \rightarrow E_a^\sigma (\varphi \vee \psi)$ 在 **BE** 中是有效的;
 (d) $(E_a^\sigma \varphi \wedge E_a^\sigma (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow E_a^\sigma \psi$ 在 **BE** 中是有效的。

证明. (a)–(c) 都比较容易证明, 在此只证明 (d)。

要证明其有效性, 即要证明:

$$\text{对 } \mathbf{BE} \text{ 模型类中任意模型 } M, \text{ 任意 } w \in W, \text{ 使} \\ M, w \models (E_a^\sigma \varphi \wedge E_a^\sigma (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow E_a^\sigma \psi. \quad (1)$$

要证明 (1), 即要证明:

$$\text{若 } M, w \models E_a^\sigma \varphi \wedge E_a^\sigma (\varphi \rightarrow \psi), \text{ 则 } M, w \models E_a^\sigma \psi. \quad (2)$$

$$\text{假设 } M, w \models E_a^\sigma \varphi \wedge E_a^\sigma (\varphi \rightarrow \psi) \text{ 成立。} \quad (3)$$

现证明: $M, w \models E_a^\sigma \psi$ 。

由 (3), 根据语义可得:

$$M, w \models E_a^\sigma \varphi; \text{ 且} \quad (4)$$

$$M, w \models E_a^\sigma (\varphi \rightarrow \psi)。 \quad (5)$$

由 (4) 和 (5), 根据语义可得:

$$\text{存在 } X \text{ 使 } wZ_a^\sigma X, \text{ 且对所有 } v \in X, M, v \models \varphi; \quad (6)$$

$$\text{存在 } Y \text{ 使 } wZ_a^\sigma Y, \text{ 且对所有 } u \in Y, M, u \models \varphi \rightarrow \psi。 \quad (7)$$

$$\text{由 (6) 和 (7) 可知: } X \in Z_a^\sigma(w) \text{ 且 } Y \in Z_a^\sigma(w)。 \quad (8)$$

$$\text{由 (8) 和约束条件 (3) 可得: } X \cap Y \in Z_a^\sigma(w)。 \quad (9)$$

$$\text{由约束条件 (1) 可知: } \emptyset \notin Z_a^\sigma(w)。 \quad (10)$$

$$\text{由 (9) 和 (10) 可得: } X \cap Y \neq \emptyset。 \quad (11)$$

$$\text{令 } X \cap Y = X' \neq \emptyset。 \quad (12)$$

由 (6)(7)(9) 以及 (12) 可得:

$$X' \text{ 使 } wZ_a^\sigma X', \text{ 且对所有 } v' \in X', M, v' \models \varphi; \quad (13)$$

$$X' \text{ 使 } wZ_a^\sigma X', \text{ 且对所有 } v' \in X', M, v' \models \varphi \rightarrow \psi。 \quad (14)$$

由 (13) 和 (14) 可得:

$$X' \text{ 使 } wZ_a^\sigma X', \text{ 且对所有 } v' \in X', M, v' \models \psi。 \quad (15)$$

由 (15), 根据语义可得: $M, w \models E_a^\sigma \psi$ 。 □

定理 3.1 (可靠性定理). **BE** 是可靠的, 即对任意 $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{BE}}$, 若 $\vdash_{\mathbf{BE}} \varphi$, 则 $\models_{\mathbf{BE}} \varphi$ 。

证明. 其他证明比较简单, 我们只证明 $\mathbf{Ax}_{10}$ 和 $\mathbf{Ax}_{13}$ 的有效性。

(I) 证明 $\mathbf{Ax}_{10}$ 有效。

要证明 $\mathbf{Ax}_{10}$ 的有效性, 即要证明:

对 **BE** 模型类中任意模型 M , 任意 $w \in W$, 有:

$$M, w \models E_a^\sigma \varphi \rightarrow B_a^\sigma \varphi \text{ 成立。} \quad (1)$$

$$\text{要证明 (1), 即要证明: 若 } M, w \models E_a^\sigma \varphi, \text{ 则 } M, w \models B_a^\sigma \varphi。 \quad (2)$$

$$\text{假设 } M, w \models E_a^\sigma \varphi \text{ 成立。} \quad (3)$$

$$\text{现证明: } M, w \models B_a^\sigma \varphi。 \quad (4)$$

$$\text{假设任意 } u \in W, \text{ 使 } u \in R_a^\sigma(w)。 \quad (5)$$

要证明 (4), 即要证明: $M, u \models \varphi$ 。

由 (3), 根据语义可得:

$$\text{存在 } X \text{ 使 } wZ_a^\sigma X, \text{ 且对所有 } v \in X, M, v \models \varphi。 \quad (6)$$

$$\text{由 (5)、(6) 和约束条件 (i) 可得: } u \in X。 \quad (7)$$

由 (6) 和 (7) 可得: $M, u \models \varphi$ 。

(II) 证明 $\mathbf{Ax}_{13}$ 有效。

要证明 Ax_{13} 的有效性, 即要证明:

对 **BE** 模型类中任意模型 M , 任意 $w \in W$, 有:

$$M, w \models E_a^\sigma \varphi \rightarrow E_a^\rho \varphi (\rho \leq \sigma). \quad (1)$$

要证明 (1), 即要证明:

$$\text{对 } \rho \leq \sigma, \text{ 若 } M, w \models E_a^\sigma \varphi, \text{ 则 } M, w \models E_a^\rho \varphi. \quad (2)$$

$$\text{假设对于 } \rho \leq \sigma, M, w \models E_a^\sigma \varphi \text{ 成立.} \quad (3)$$

现证明: $M, w \models E_a^\rho \varphi$.

由 (3), 根据语义可得:

$$\text{存在 } X \text{ 使 } wZ_a^\sigma X, \text{ 且对所有 } v \in X, M, v \models \varphi. \quad (4)$$

$$\text{由于 } \rho \leq \sigma, \text{ 由约束条件 (iv) 可得: } Z_a^\sigma(w) \subseteq Z_a^\rho(w). \quad (5)$$

由 (4) 和 (5) 可得:

$$\text{存在 } X \text{ 使 } wZ_a^\rho X, \text{ 且对所有 } v \in X, M, v \models \varphi. \quad (6)$$

由 (6), 根据语义可得: $M, w \models E_a^\rho \varphi$. □

4 完全性证明

定义 4.1 (极大一致). 令 $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\text{BE}}$. Γ 是 **BE**-极大一致的当且仅当

- (1) Γ 是 **BE**-一致的, 即 $\Gamma \not\vdash_{\text{BE}} \perp$;
- (2) Γ 是极大的, 即不存在 $\Gamma' \subseteq \mathcal{L}_{\text{BE}}$ 使 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma' \not\vdash_{\text{BE}} \perp$.

定义 4.2 (典范模型). 一个 **BE**-典范模型 $M^c = (W^c, R^c, R^{\sigma c}, Z^{\sigma c}, V^c)$ 定义如下:

- W^c 是由任意 **BE**-极大一致集 Γ 构成的集合;
- $R^c: A \rightarrow \wp(W^c \times W^c)$, 将 $R^c(a)$ 写为 R_a^c . 对任意 $\Gamma, \Gamma' \in W^c$:
 $R_a^c(\Gamma, \Gamma')$ 当且仅当对任意 $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{BE}}$, 若 $B_a \varphi \in \Gamma$, 则 $\varphi \in \Gamma'$;
- $R^{\sigma c}: A \rightarrow \wp(W^c \times W^c)$, 将 $R^{\sigma c}(a)$ 写为 $R_a^{\sigma c}$. 对任意 $\Gamma, \Gamma' \in W^c$:
 $R_a^{\sigma c}(\Gamma, \Gamma')$ 当且仅当对任意 $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{BE}}$, 若 $B_a^\sigma \varphi \in \Gamma$, 则 $\varphi \in \Gamma'$;
- $Z^{\sigma c}: A \rightarrow \wp(W^c \times 2^{W^c})$, 将 $Z^{\sigma c}(a)$ 写为 $Z_a^{\sigma c}$. 对任意 $\Gamma, \Gamma' \in W^c$, 任意 $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{BE}}$, 有 $Z_a^{\sigma c}(\Gamma) = \{\|\varphi\| \mid E_a^\sigma \varphi \in \Gamma\}$, 其中 $\|\varphi\| = \{\Gamma' \mid \varphi \in \Gamma'\}$;
- V^c 定义为 $V^c(p) = \{\Gamma \in W^c \mid p \in \Gamma\}$.

引理 4.1 (Lindenbaum 引理). 若 Γ 是一个公式的 **BE**-一致集, 则存在一个公式的 **BE**-极大一致集 Γ^+ 使 $\Gamma \subseteq \Gamma^+$.

引理 4.2. 若 Γ 和 Γ' 是 **BE**-极大一致集, 则

- (1) Γ 是演绎封闭的 (即对任意 φ , 若 $\Gamma \vdash_{\text{BE}} \varphi$, 则 $\varphi \in \Gamma$);
- (2) $\varphi \in \Gamma$ 当且仅当 $\neg \varphi \notin \Gamma$;
- (3) $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ 当且仅当 $\varphi \in \Gamma$ 且 $\psi \in \Gamma$;

- (4) $R_a^c(\Gamma, \Gamma')$ 当且仅当 $\Gamma/B_a \subseteq \Gamma'$, 其中 $\Gamma/B_a = \{\varphi \mid B_a\varphi \in \Gamma\}$;
 (5) $R_a^{\sigma c}(\Gamma, \Gamma')$ 当且仅当 $\Gamma/B_a^\sigma \subseteq \Gamma'$, 其中 $\Gamma/B_a^\sigma = \{\varphi \mid B_a^\sigma\varphi \in \Gamma\}$ 。

引理 4.3. 若 Γ 和 Γ' 是 **BE**-极大一致集, 则

- (1) 若 $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, 且 $\varphi \in \Gamma$, 则 $\psi \in \Gamma$;
 (2) 若 $\vdash_{\mathbf{BE}} \varphi$, 则 $\varphi \in \Gamma$;
 (3) 若 $\varphi \in \Gamma$, 且 $\vdash_{\mathbf{BE}} \varphi \rightarrow \psi$, 则 $\psi \in \Gamma$ 。

引理 4.4 (真值引理). 对任意 $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{BE}}$ 以及 **BE**-极大一致集 Γ :

$$M^c, \Gamma \models \varphi \text{ 当且仅当 } \varphi \in \Gamma.$$

证明. 假设任意 $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{BE}}$ 及 **BE**-极大一致集 Γ . $p, \neg\varphi, \varphi \wedge \psi, B_a\varphi, B_a^p\varphi$ 的证明都是常规证明, 接下来只证明 $E_a^\sigma\varphi$.

$$\text{假设 } M^c, \Gamma \models E_a^\sigma\varphi. \quad (1)$$

由 (1), 根据语义定义可得:

$$M^c, \Gamma \models E_a^\sigma\varphi \text{ 当且仅当 } \llbracket \varphi \rrbracket \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma). \quad (2)$$

由 (2), 通过归纳假设可得:

$$\llbracket \varphi \rrbracket \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma) \text{ 当且仅当 } \|\varphi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma). \quad (3)$$

由 (3), 根据 $Z_a^{\sigma c}$ 的定义可得:

$$\|\varphi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma) \text{ 当且仅当 } E_a^\sigma\varphi \in \Gamma. \text{ 由此得证.} \quad \square$$

引理 4.5. 对任意 **BE**-极大一致集 Γ , $\emptyset \notin Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$ 。

引理 4.6. 对任意 **BE**-极大一致集 Γ , $W^c \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$ 。

引理 4.7. 对任意 **BE**-极大一致集 Γ , **BE**-极大一致集的集合 $X^c, X^{c'} \subseteq W^c$, 若 $X^c \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$ 且 $X^{c'} \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$, 则 $X^c \cap X^{c'} \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$ 。

证明. 假设 Γ 是 **BE**-极大一致集. 令 X^c 为 $\|\varphi\|$, $X^{c'}$ 为 $\|\psi\|$ 。

$$\text{假设 } \|\varphi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma), \text{ 且 } \|\psi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma). \quad (1)$$

现证明: $\|\varphi\| \cap \|\psi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$ 。

由 (1), 根据 $Z_a^{\sigma c}$ 的定义可得:

$$E_a^\sigma\varphi \in \Gamma, \text{ 且 } E_a^\sigma\psi \in \Gamma. \quad (2)$$

由 (2), 根据引理 4.2 (3) 可得:

$$E_a^\sigma\varphi \wedge E_a^\sigma\psi \in \Gamma. \quad (3)$$

由 (3) 和 **Ax₉**, 根据引理 4.3 (3) 可得:

$$E_a^\sigma(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma. \quad (4)$$

由 (4), 根据 $Z_a^{\sigma c}$ 的定义可得:

$$\|\varphi \wedge \psi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma); \quad (5)$$

$$\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \cap \|\psi\|. \quad (6)$$

由 (5) 和 (6) 可得: $\|\varphi\| \cap \|\psi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$ 。 $\square$

引理 4.8. 对任意 **BE**-极大一致集 Γ , **BE**-极大一致集的集合 $X^c, X^{c'} \subseteq W^c$, 若 $X^c \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$ 且 $X^c \subseteq X^{c'}$, 则 $X^{c'} \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$ 。

证明. 假设 Γ 是 **BE**-极大一致集。令 X^c 为 $\|\varphi\|$, $X^{c'}$ 为 $\|\psi\|$ 。

$$\text{假设: } \|\varphi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma); \text{ 且} \quad (1)$$

$$\|\varphi\| \subseteq \|\psi\|. \quad (2)$$

现证明: $\|\psi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$ 。

$$\text{由 (2) 可得: } \varphi \text{ 和 } \neg\psi \text{ 是不一致的。} \quad (3)$$

因为若假设它们是一致的, 则根据引理 4.1 可得:

存在一个极大一致集包含 φ 和 $\neg\psi$, 这和 $\|\varphi\| \subseteq \|\psi\|$ 是矛盾的。

$$\text{由 (3) 可得: } \vdash \varphi \rightarrow \psi. \quad (4)$$

$$\text{由 (4) 和规则 Ru}_3 \text{ 可得: } \vdash E_a\varphi \rightarrow E_a\psi. \quad (5)$$

$$\text{由 (1), 根据 } Z_a^{\sigma c} \text{ 的定义可得: } E_a\varphi \in \Gamma. \quad (6)$$

$$\text{由 (5) 和 (6), 根据引理 4.3 (3) 可得: } E_a\psi \in \Gamma. \quad (7)$$

$$\text{由 (7), 根据 } Z_a^{\sigma c} \text{ 的定义可得: } \|\psi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma). \quad \square$$

引理 4.9. 对任意的 **BE**-极大一致集 Γ , **BE**-极大一致集的集合 $X^c \subseteq W^c$ 且 $X^c \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$, 有 $R_a^{\sigma c}(\Gamma) \subseteq X^c$ 。

证明. 令 X^c 为 $\|\varphi\|$ 。

$$\text{对 } \|\varphi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma), \quad (1)$$

$$\text{假设任意 } \Gamma' \in R_a^{\sigma c}(\Gamma). \quad (2)$$

$$\text{现证明: } \Gamma' \in \|\varphi\|. \quad (3)$$

$$\text{由 (1), 根据 } Z_a^{\sigma c} \text{ 的定义可得: } E_a^\sigma\varphi \in \Gamma. \quad (4)$$

$$\text{由 (4) 和 Ax}_{10}, \text{ 根据引理 4.3 中 (3) 可得: } B_a^\sigma\varphi \in \Gamma. \quad (5)$$

$$\text{由 (2) 和 (5), 根据 } R_a^{\sigma c} \text{ 的定义可得: } \varphi \in \Gamma'. \quad (6)$$

$$\text{由 (6), 根据 } \|\varphi\| \text{ 的定义可得: } \Gamma' \in \|\varphi\|. \quad \square$$

引理 4.10. 对任意 $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}^+$, 任意 $a \in A$, 若 $\rho \leq \sigma$, 则 $R_a^{\rho c} \subseteq R_a^{\sigma c}$ 。

证明. 对任意的 **BE**-极大一致集 Γ 和 Γ' , 假设 $\rho \leq \sigma$ 。

$$\text{假设 } (\Gamma, \Gamma') \notin R_a^{\sigma c}. \quad (1)$$

现证明: $(\Gamma, \Gamma') \notin R_a^{\rho c}$ 。

$$\text{由 (1) 和 } R_a^{\sigma c} \text{ 的定义可得: } B_a^\sigma\varphi \in \Gamma, \text{ 且} \quad (2)$$

$$\varphi \notin \Gamma'. \quad (3)$$

由 (2) 和 Ax_{11} , 根据引理 4.3 中 (3) 可得: $B_a^\rho \varphi \in \Gamma$. (4)

由 (3) 和 (4) 可得: $(\Gamma, \Gamma') \notin R_a^{\rho c}$. $\square$

引理 4.11. 对任意 $\sigma \in \mathbb{Q}^+$, 任意 $a \in A$, 有 $R_a^{\sigma c} \subseteq R_a^c$.

证明. 对任意的 **BE**-极大一致集 Γ 和 Γ' ,

假设 $(\Gamma, \Gamma') \notin R_a^c$. (1)

现证明: $(\Gamma, \Gamma') \notin R_a^{\sigma c}$.

由 (1) 和 R_a^c 的定义可得: $B_a \varphi \in \Gamma$, 且 (2)

$\varphi \notin \Gamma'$. (3)

由 (2) 和 Ax_{12} , 根据引理 4.3 中 (3) 可得: $B_a^\sigma \varphi \in \Gamma$. (4)

由 (3) 和 (4) 可得: $(\Gamma, \Gamma') \notin R_a^{\sigma c}$. $\square$

引理 4.12. 对任意 $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}^+$, 任意 $a \in A$, **BE**-极大一致集 Γ , 若 $\rho \leq \sigma$, 则 $Z_a^{\sigma c}(\Gamma) \subseteq Z_a^{\rho c}(\Gamma)$.

证明. 对任意的 **BE**-极大一致集 Γ , 假设 $\rho \leq \sigma$.

假设 $\|\varphi\| \in Z_a^{\sigma c}(\Gamma)$. (1)

现证明: $\|\varphi\| \in Z_a^{\rho c}(\Gamma)$.

由 (1), 根据 $Z_a^{\sigma c}$ 的定义, 可得: $E_a^\sigma \varphi \in \Gamma$. (2)

由 (2) 和 Ax_{13} , 根据引理 4.3 中 (3) 可得: $E_a^\rho \varphi \in \Gamma$. (3)

由 (3), 根据 $Z_a^{\rho c}$ 的定义可得: $\|\varphi\| \in Z_a^{\rho c}(\Gamma)$. $\square$

引理 4.13.

- (1) 每个 R^c 在一个 **BE**-典范模型中具有持续性、传递性和欧性;
- (2) 每个 $R^{\sigma c}$ 在一个 **BE**-典范模型中具有持续性。

定理 4.1 (完全性定理). 对任意 $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{BE}}$, 若 $\models_{\text{BE}} \varphi$, 则 $\vdash_{\text{BE}} \varphi$.

证明. 假设 $\not\vdash_{\text{BE}} \varphi$. (1)

现证明: $\not\models_{\text{BE}} \varphi$.

由 (1) 可得: $\{\neg\varphi\}$ 是 **BE**-一致集. (2)

由 (2), 根据引理 4.1 可得:

$\{\neg\varphi\}$ 可扩张为一个 **BE**-极大一致集 Γ . (3)

由 (3) 可得: $\neg\varphi \in \Gamma$. (4)

由 (4), 根据真值引理可得: $M^c, \Gamma \models_{\text{BE}} \neg\varphi$. (5)

由 (5), 根据语义可得: $M^c, \Gamma \not\models_{\text{BE}} \varphi$. 所以, $\not\models_{\text{BE}} \varphi$. $\square$

在上文中, 我们证明了基于证据支持度的信念逻辑系统是可靠且完全的。这

一逻辑能够较好地刻画信念强度和证据支持度之间的联系。

5 小结

本文通过在模型上加入约束条件 (i) 的方式, 实现了对信念强度和证据支持度之间联系的逻辑刻画; 通过加入约束条件 (ii) 和 (iii), 实现了较强信念和较弱信念联系的逻辑刻画; 通过加入约束条件 (iv), 实现了证据的不同支持度联系描述。另外, 我们构建了 **BE** 系统, 证明了该系统是可靠且完全的。这一逻辑实现了对信念强度和证据支持度联系、信念强弱联系、证据支持度强弱联系的系统性刻画。不同于 **D-S** 证据理论对不精确推理的研究, **D-S** 证据理论主要是从定量的角度入手, 本文主要从定性和定量相结合的角度对不确定信息的相信及相信程度进行探讨, 从而使智能主体有效筛选有用信息。这一构思理念可以为知识、真理和证据主义研究提供思路和方法, 为人工智能和数据库研究提供理论基础。

信念强度与证据支持度之间的联系不仅存在静态的, 也存在动态的。理论上讲, 信念的强度常常会随着证据支持度的变化而变化。本文主要探讨了信念强度和证据支持度之间的静态联系, 而没有探讨它们之间的动态联系。二者的动态联系是普遍存在的现象, 也是人类的认知规律, 对其进行形式化研究具有重要的意义, 这不仅可以发展逻辑理论, 还可以为博弈论和人工智能等领域的研究提供方法和理论, 有待学者深入研究。要通过逻辑技术从动态视角探讨二者的联系, 需要将证据支持度的增强或减弱作为动态算子, 将其扩张为一个动态逻辑, 从而表达二者之间的动态联系。将证据 (将事实依据表示成公式的形式) 的变化 (增加或减少) 作为动态算子, 表达出证据的变化对信息的支持程度的变化, 应该是刻画证据的动态变化对信念影响的一种可行路径。

参考文献

- [1] R. Audi, 1993, *The Structure of Justification*, New York: Cambridge University Press.
- [2] J. van Benthem, D. Fernández-Duque and E. Pacuit, 2014, "Evidence and plausibility in neighborhood structures", *Annals of Pure & Applied Logic*, **165(1)**: 106–133.
- [3] J. van Benthem and E. Pacuit, 2011, "Dynamic logics of evidence-based beliefs", *Studia Logica*, **99**: 61–92.
- [4] W. K. Clifford, 1886, *Lectures and Essays*, London: Macmillan and Company.
- [5] R. Demolombe, 2001, "To trust information sources: A proposal for a modal logic framework", in C. Castelfranchi and Y. H. Tan (eds.), *Trust and Deception in Virtual Societies*, pp. 111–124, Dordrecht: Springer.
- [6] R. Demolombe and C. J. Liau, 2001, "A logic of graded trust and belief fusion", pp. 13–25.

- [7] H. V. Ditmarsch, W. der Hoek and B. Kooi, 2007, *Dynamic Epistemic Logic*, Berlin: Springer.
- [8] L. Eriksson and A. Hájek, 2007, “What are degrees of belief?”, *Studia Logica*, **86**: 183–213.
- [9] R. Feldman and E. Conee, 1985, “Evidentialism”, *Philosophical Studies*, **48(1)**: 15–34.
- [10] F. Huber, 2009, “Belief and degrees of belief”, in F. Huber and C. Schmidt-Petri (eds.), *Degrees of belief*, pp. 1–33, Dordrecht: Springer.
- [11] F. Liu and E. Lorini, 2017, “Reasoning about belief evidence and trust in a multi-agent setting”, *International Conference on Principles & Practice of Multi-Agent Systems*, pp. 71–89, Cham: Springer.
- [12] R. Nozick, 1985, *Philosophical Explanation*, Cambridge: Harvard University Press.
- [13] 柏拉图 (著), 詹文杰 (译注), 泰阿泰德, 北京: 商务印书馆, 2015 年。
- [14] 蒯因 (著), 涂纪亮、陈波 (主编), 蒯因著作集·第 5 卷, 北京: 中国人民大学出版社, 2007 年。
- [15] 齐硕姆 (著), 邹惟远、邹晓蕾 (译), 知识论, 北京: 生活·读书·新知三联书店出版社, 1988 年。
- [16] 苏珊·哈克 (著), 陈波、张力锋、刘叶涛 (译), 证据与探究, 北京: 中国人民大学出版社, 2004 年。

(责任编辑: 袁之)

On the Logic of Belief

Based on the Degree of Evidence Support

Liping Hou Meiyun Guo[✉]

Abstract

The belief and degree of belief of an intelligent agent for some information are closely related to evidence and the degree of evidence support. This paper aims to explore the connections between the degree of evidence support and belief strength from semantic and axiomatic perspectives by modal logic. Specifically, KD45 and KD normal modalities are used respectively to express the strong belief operator and the belief operator with degree. The modal operator with degree is utilized to express the evidence with degree. By introducing constraints to the belief logic model based on the degree of evidence support, we establish the connections between the relation of evidence and the relation of belief, thereby the connections between the degree of evidence support and the belief strength are expressed. Additionally, a sound and complete axiomatic system is established. These measures help to formalize the connections between the degree of evidence support and the belief strength, and thus a method integrating qualitative analysis with quantitative analysis for dealing with uncertain information is provided.

Liping Hou

College of National Culture and Cognitive Science, Guizhou Minzu University
331572186@qq.com

Meiyun Guo[✉]

Institute for Logic and Intelligence, Southwest University
guomy007@swu.edu.cn