逻辑学研究 2019 年第 4 期，1–16
文章编号：1674-3202(2019)-04-0001-16

非精确谓词逻辑推理

潘文全

摘　要：非精确概率逻辑是经典命题逻辑的扩张，因为它的元性质都是由命题逻辑的元性质推广而来的。自然扩张推广了命题逻辑的演绎过程；融贯性推广了命题逻辑的演绎封闭且一致。但是如何把谓词逻辑同非精确概率结合起来，以形成非精确谓词逻辑？为了让 IP 概率逻辑能够表达谓词，必须另辟蹊径。通过在状态描述上引入非精确概率，然后把非精确概率扩展到 *QFSL*，进而通过 IP 推理的自然扩张扩展到 *SL* 上。这样就实现了非精确概率同谓词逻辑的结合，得出了非精确概率谓词逻辑推理。换言之，通过把主观主义嫁接在卡尔纳普的逻辑主义之上，可以实现这一步。

关键词：赌局；非精确概率；自然扩张；谓词逻辑

中图分类号：B81　　　　**文献标识码：**A

1　导言

非精确概率逻辑是经典命题逻辑的扩张，是一种非经典归纳逻辑。国外对它的研究比较充分。但没有引起国内学界的充分关注，研究也比较薄弱。本文试图通过刻画其元性质分析其逻辑机制，初步探讨其哲学基础，展示其特异性和理论优势。

假设 $\mathcal{X}$ 是一个可能空间，在 $\mathcal{X}$ 上可以定义一个有界实值泛函 f，即赌局，$\mathcal{X}$ 上的所有赌局构成赌局集 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$。主体对 f 的下界预期 $\underline{P}(f)$ 被定义为它对 f 的上确界可接受购买价格：$\underline{P}(f)$ 是最大价格 s，满足对于任意 $t<s$，在观察到赌局 f 的结果之前主体接受支付 t 购买 f（当观察到赌局 f 的结果是 x 之后，主体确保能得到 $f(x)$ 的收益）。所以主体只需要考虑是否接受形如 $f-\mu$ 的有界赌局，主体确定了赌局 f 的下界预期 $\underline{P}(f)$，等价于它接受所有有界赌局 $f-\underline{P}(f)+\varepsilon, \varepsilon>0$。同样的，主体对 f 的上界预期 $\overline{P}(f)$ 直接被定义为它对 f 的下确界可接受出售价格：$\overline{P}(f)$ 是最小价格 s，满足对于任意 $t>s$，主体在观察到赌局 f 的结果之前

收稿日期：2019-06-09
作者信息：潘文全　　岭南师范学院马克思主义学院
p297001881@outlook.com
基金项目：国家社科基金重大项目“现代归纳逻辑的新发展、理论前沿与应用研究”（15ZDB018），国家社科青年项目“集合论及其在弗雷格算术中的应用研究”（16CZX050），岭南师范学院校级项目“非精确概率逻辑研究”（ZW1909）。

接受以 t 卖出 f（当观察到赌局 f 的结果是 x 之后，主体保证失去 $f(x)$ 的收益）。当 $\mathrm{dom}\underline{P}=\mathrm{dom}\overline{P}=-\mathrm{dom}\underline{P}$，且 $(\forall f\in\mathrm{dom}\underline{P})\left(\underline{P}(f)=\overline{P}(f)\right)$，$\underline{P}$ 就是自我共轭的，此时就用 P 代替 $\underline{P}$ 和 $\overline{P}$，P 被简称为一个预期。P 表达就是主体对有界赌局 f 的公平价格：它接受以任何价格 $s<P(f)$ 购买 f，且接受以任何价格 $s>P(f)$ 出售 f。

如果把一个事件看成是 $\mathcal{X}$ 的某个子集 A，事件的指标赌局

$$I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

就是一个有界赌局，所以把指标赌局等同于对应的事件。特别的，把 I_A 的下界预期 $\underline{P}(I_A)$ 表示为 $\underline{P}(A)$，它被叫作事件 A 的下界概率，如果 $\underline{P}$ 的定义域只包含指标赌局，它就被叫作下界概率。类似的，把 I_A 的上界预期 $\overline{P}(I_A)$ 表示为 $\overline{P}(A)$，它被叫作事件 A 的上界概率，如果 $\overline{P}$ 的定义域只包含指标赌局，$\overline{P}$ 就被叫作上界概率。如果 P 是一个自我共轭的预期，那么 $P(A)$ 被叫作 A 的概率，如果 P 的定义域只包含指标赌局 I_A 和它的否定 $-I_A$，它就被叫作一个概率。

非精确概率推理（简写为 IP 推理）如何进行呢？推理都是从前提开始的，假设存在一个主体接受的前提集 Γ，首先需要把这些前提转换为下界预期 $\underline{P}$，它就是 IP 推理的前提。在经典逻辑中，推理之前需要判断前提是否具有一致性，对应的 IP 推理也需要首先判定 $\underline{P}$ 是否避免确定损失（它推广了一致性）。如果对于任意 $n\in\mathbb{N}$，$\mathrm{dom}\underline{P}$ 中的任意赌局 $f_1,\ldots,f_n$，$\underline{P}$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}\underline{P}(f_i)\le\sup(\sum_{i=1}^{n}f_i)$，则 $\underline{P}$ 避免确定损失（一致的）。如果 $\underline{P}$ 是一致的，那么就能进行推理了，经典逻辑通过反复使用 MP 规则来进行推理，而 IP 推理则是通过自然扩张来实现的。假设 $\underline{P}$ 是一致的且 , $f\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$，下界预期 $\underline{E}_{\underline{P}}(f)=$

$$\sup\left\{\alpha\in\mathbb{R}:f-\alpha\ge\sum_{k=1}^{n}\lambda_k[f_k-\underline{P}(f_k),n\in\mathbb{N},f_k\in\mathrm{dom}\underline{P},\lambda_k\in\mathbb{R}_{\ge0}]\right\}$$

被叫作 $\underline{P}$ 的自然扩张，通过自然扩张就能得出所有赌局的上界预期和下界预期。很明显，如果 $\underline{P}$ 是下界概率，通过 $\underline{E}_{\underline{P}}$ 就能推出所有事件的下界概率，如果 $\underline{P}$ 是概率，通过 $\underline{E}_{\underline{P}}$ 就能推出所有事件的概率。在通过自然扩张进行推理之后，如果 $(\exists f\in\mathrm{dom}\underline{P})\left(\underline{E}_{\underline{P}}(f)\neq\underline{P}(f)\right)$，这就意味着主体在确定前提 $\underline{P}(f)$ 时，没有充分考虑到其它前提的行为后果，所以自然扩张修正了前提。如果前提 $\underline{P}$ 没有这种缺陷，它就是融贯的（coherence），即 $\underline{P}$ 避免确定损失且它是 $\underline{E}_{\underline{P}}$ 的限制，很明显 $\underline{E}_{\underline{P}}$ 是融贯的。

一个下界预期是自我共轭且融贯的，它就被定义为一个线性预期，$\mathcal{X}$ 上的所有线性预期构成集合 $\mathbb{P}$。特别的，线性预期 $\underline{P}$ 的自然扩张 $\underline{E}_{\underline{P}}$ 被叫作线性扩张，它

是一个定义在 $\mathbb{P}$ 上的线性预期。假设存在两个下界预期 $\underline{P}$ 和 $\underline{Q}$，如果 $(\mathrm{dom}\underline{P} \subseteq \mathrm{dom}\underline{Q}) \wedge \big((\forall f \in \mathrm{dom}\underline{P})\left(\underline{P}(f) \leq \underline{Q}(f)\right)\big)$，那么 $\underline{Q}$ 控制（dominate）$\underline{P}$。

很多时候，下界预期没有预期方便处理，所以在下界预期和预期之间构建一个过渡桥梁将是有益的。

定义 1. 对于任意下界预期 $\underline{P}$，它等价于所有控制 $\underline{P}$ 的线性预期的集合

$$\mathcal{M}(\underline{P}) := \left\{Q \in \mathbb{P} : (\forall f \in \mathrm{dom}\underline{P})\left(\underline{P}(f) \leq \underline{Q}(f)\right)\right\}$$

相反的，对于任意的线性预期集 $\mathcal{M}$，它等价于一个下界预期

$$\mathrm{lpr}(\mathcal{M})(f) := \inf\{Q(f) : Q \in \mathcal{M}\}, f \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$$

这个桥梁相当重要，以至于可以采用经典概率的理论来处理非精确概率，同时也可以用经典概率来表达非精确概率推理。

命题 1. 令 $\underline{P}$ 是任意下界预期，那么

(1) $\underline{P}$ 避免确定损失当且仅当 $\mathcal{M}(\underline{P}) \neq \emptyset$。

(2) $\underline{P}$ 是融贯的当且仅当 $\mathcal{M}(\underline{P}) \neq \emptyset$ 且 $\underline{P}(f) = \min\{Q(f) : Q \in \mathcal{M}(\underline{P})\}, f \in \mathrm{dom}\underline{P}$。

(3) 如果 $\underline{P}$ 避免确定损失,那么它的自然扩张 $\underline{E}_{\underline{P}} = \min\{Q(f) : Q \in \mathcal{M}(\underline{P})\}, f \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$。（[9]，第 1–76 页）

2　非精确命题逻辑推理

假设 $\mathcal{X}$ 是一个可能空间，$\wp(\mathcal{X})$ 是 $\mathcal{X}$ 的幂集。某个 $\mathcal{F} \subseteq \wp(\mathcal{X})$ 被叫作一个滤，如果

1. $\mathcal{F}$ 是递增的：如 $(A \in \mathcal{F}) \wedge (A \subseteq B)$，那么 $B \in \mathcal{F}$；
2. $\mathcal{F}$ 在有穷交下是封闭的：如果 $(A \in \mathcal{F}) \wedge (B \in \mathcal{F})$，那么 $A \cap B \in \mathcal{F}$。

当 $\mathcal{F} \subset \wp(\mathcal{X})$ 时，$\mathcal{F}$ 被叫作真滤，所有的真滤构成集合 $\mathbb{F}$。如果某个真滤 $\mathcal{U}$ 不是任何其它真滤的子集，那么它就是超滤，所有的超滤构成集合 $\mathbb{U}$。

对于某个集合 $\mathfrak{A}$，如果 $\mathfrak{A}$ 的元素之间满足下述二元关系 $\preceq$：

1. $\preceq$ 是自返的：$(\forall \alpha \in \mathfrak{A})(\alpha \preceq \alpha)$；
2. $\preceq$ 是传递的：$(\forall \alpha \in \mathfrak{A})(\forall \beta \in \mathfrak{A})(\forall \gamma \in \mathfrak{A})(\alpha \preceq \beta \wedge \beta \preceq \gamma \to \alpha \preceq \gamma)$；
3. $\preceq$ 满足组合性质：$(\forall \alpha \in \mathfrak{A})(\forall \beta \in \mathfrak{A})(\exists \gamma \in \mathfrak{A})(\alpha \preceq \gamma \wedge \beta \preceq \gamma)$；

则 $\mathfrak{A}$ 就是一个有向集（Directed Set）。有向集 $\mathfrak{A}$ 到集合 $\mathfrak{Y}$ 的一个映射 $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{Y}$ 被叫作网（Net）。如果 $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}$，$f$ 被叫作实网。假设 $\mathfrak{Y}$ 带有一个拓扑空间 $\mathfrak{T}$，对于 $y \in \mathfrak{Y}$ 的任意开集 O，如果总是存在某个 $\alpha_O \in \mathfrak{A}$ 满足 $(\forall \alpha \succeq \alpha_O)(f(\alpha) \in O)$，

那么网 f 收敛到元素 y。为了方便叙述用 f_α 代替 $f(\alpha)$。真滤 $\mathcal{F}$ 就是一个有向集，在 $\mathcal{F}$ 上可以定义网。

运用滤和超滤可以把经典命题逻辑和 $\{0,1\}$-值下界概率联系起来，即把命题逻辑嵌入到融贯下界预期理论中。

为了描述的方便，假设关于“变量 f 取值”的命题都位于 $\mathcal{X}$ 中，那么这些命题与 $\mathcal{X}$ 的子集就具有了一一对应的关系：一个关于“f 取值”的命题就是一个下述形式的陈述“对于 $\mathcal{X}$ 的某个子集 A 而言，$f \in A$”。对于任意命题系统 L，通过 L 的 Lindenbaum 代数上的 Stone 表示定理可以把 L 嵌入到下界预期理论中（[2]）。此外一组信念就是一个被主体认为是真的命题集，也是主体认为将会发生的事件集，在这里就是 $\mathcal{X}$ 的子集 $\mathcal{C}$。那么 $\mathcal{C}$ 与命题集具有下述四种对应关系：

1. 一个命题集是**演绎封闭**的（如果它在有穷合取和 MP 下是封闭的），即对应的事件集 $\mathcal{C}$ 是滤（在有穷交和递增下封闭）；
2. 给定一个命题集，它的**演绎闭包**是包含它的最小演绎闭集，如果用事件集来表示的话，就是包含 $\mathcal{C}$ 的最小事件滤，即
$$Cl_{\mathbb{F}}(\mathcal{C}) := \bigcap\{\mathcal{F} \in \mathbb{F} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}\};$$
3. 一个命题集是**一致的**（如果它的演绎闭包是所有命题构成的集合的严格子集），等价地，一个事件集 $\mathcal{C}$ 是一致的当且仅当它的演绎闭包是真滤：$Cl_{\mathbb{F}}(\mathcal{C}) \in \mathbb{F}$，即 $Cl_{\mathbb{F}}(\mathcal{C}) \neq \wp(\mathcal{X})$。因此所有真滤构成的集合 $\mathbb{F}$ 对应于所有演绎封闭且一致的事件集所构成的集合。
4. 一个命题集是**演绎完全的**（如果往此集合中再加入任何其它命题就会导致不一致），这就意味着事件集是演绎封闭且完全的当且仅当它是超滤。

所以使用滤可以表达命题逻辑。但是滤如何同下界预期联系起来呢？

首先需要考虑的是下界预期能否表达命题逻辑的语言。如果 p 是关于随机变量 f 取值的某个命题，那么 p 就对应于 $\mathcal{X}$ 的子集 A_p，这样就在命题和 $\mathcal{X}$ 的子集之间就建立了一一对应的关系，即主体接受命题 p 当且仅当它接受有界赌局 $I_{A_p} - 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0$，

$$I_{A_p} - 1 + \varepsilon = \begin{cases} \varepsilon, & \text{如果 } x \in A_p \\ \varepsilon - 1, & \text{如果 } x \notin A_p \end{cases}$$

如果主体愿意接受以任意严格小于 1 的赔率在事件“A_p 即将发生”上下注，这就说明主体确定 A_p 即将发生，即确定 f 的取值属于 A_p。在融贯的条件下就可以表达出命题逻辑的五种真值运算。

主体接受了命题 p 当且仅当它接受有界赌局 $I_{A_p} - 1 + \varepsilon$（$\varepsilon > 0$）。如果主体是融贯的，它就不会接受有界赌局 $-I_{A_p} + 1 - \varepsilon$（$\varepsilon > 0$），即不会接受命题 $\neg p$。这就表达出了逻辑否定。

主体同时接受了 p 和 q，即同时接受 $I_{A_p}-1+\varepsilon$ 和 $I_{A_q}-1+\varepsilon$（$\varepsilon>0$)，由融贯性得出它也会接受这两个赌局的和，即接受 $I_{A_p}+I_{A_q}-2+2\varepsilon$（$\varepsilon>0$)。因为 $I_{A_p}+I_{A_q}-2\leq I_{A_p}+I_{A_q}-1\leq I_{A_p\cap A_q}$，由融贯性得出主体接受 $I_{A_p\cap A_q}$，即接受 $p\wedge q$（从 $p\wedge q$ 得出 $A_{p\wedge q}=A_p\cap A_q$）。这就表达出了经典命题逻辑的合取规则。

主体接受了 p 和 $p\to q$。由于 $p\to q$ 对应于 $A_p\subseteq A_q$，那么 $I_{A_p}-1+\varepsilon\leq I_{A_q}-1+\varepsilon$，由融贯性得出主体接受 $I_{A_q}-1+\varepsilon$（$\varepsilon>0$)，即主体接受 q。这就表达出了经典命题逻辑的 MP 规则。

逻辑推理要避免矛盾，如果主体同时接受 $p,\neg p$，就意味着同时接受 $I_{A_p}-1+\varepsilon$ 和 $I_{A_{\neg p}}-1+\varepsilon$($\varepsilon>0$),那么它也会接受这两个赌局的和,即 $I_{A_p}-1+\varepsilon+I_{A_{\neg p}}-1+\varepsilon=-1+2\varepsilon$（$\varepsilon>0$)，这就违背了避免确定损失，从这里也可以看出经典逻辑的一致性对应于避免确定损失。所以这就表达出了逻辑矛盾。

这样就能表达出命题逻辑的所有合式公式。那么如何用 IP 推理来表达命题逻辑的推理呢？

考虑任意非空事件 $A\subseteq\mathcal{X}$，假设主体只知道 A 一定会发生，即 $f\in A$。这时如何刻画主体的信念？因为主体确定 A 一定会发生，所以它就愿意以任何赔率对此事件下注，即它将接受有界赌局 $I_A-1+\varepsilon$（$\varepsilon>0$)。这就得到了定义域为 $\{I_A\}$ 的下界概率 $\underline{Q}_A(I_A)$：

$$\underline{Q}_A(I_A)=1$$

显然此下界概率是融贯的，它的自然扩张被表示为 $\underline{P}_A$：

$$\underline{P}_A(f)=\inf_{x\in A}f(x),f\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$$

$\underline{P}_A$ 被叫作关于 A 的空下界预期，它是主体只知道“A 将会发生”的推理模型。

进一步推广上述思想。考虑事件集 $\mathcal{C}\subseteq\wp(\mathcal{X})$，假设主体确定 $\mathcal{C}$ 中的任意事件都会发生——它愿意以任意赔率对这些事件下注，但是它对于其它事件一无所知——它只愿意以 0 赔率对这些事件下注。这就得到了定义在 $\{I_A:A\subseteq\mathcal{X}\}$ 上的下界概率 $\underline{Q}_{\mathcal{C}}$：

$$\underline{Q}_{\mathcal{C}}(I_A):=\begin{cases}1, & \text{如果 } A\in\mathcal{C}\\ 0, & \text{如果 } A\notin\mathcal{C}\end{cases}$$

同样地，如果用 $\mathcal{C}\subseteq\wp(\mathcal{X})$ 来定义概率而不是下界概率时，就得到了一个自我共轭的评估，这使得在负不变的定义域 $\mathcal{C}=\bigcup_{A\subseteq\mathcal{X}}\{I_A,-I_A\}$ 上定义概率 $Q_{\mathcal{C}}$ 成为可能：

$$Q_{\mathcal{C}}(I_A):=\begin{cases}-Q_{\mathcal{C}}(-I_A)=1, & \text{如果 } A\in\mathcal{C}\\ Q_{\mathcal{C}}(-I_A)=0, & \text{如果 } A\notin\mathcal{C}\end{cases}$$

此时主体不仅愿意以任意赔率对 $\mathcal{C}$ 中的事件下注，而且不愿意以任意赔率对 $\mathcal{C}$ 外的事件下注。

如果想要对应的（下界）概率避免确定损失和融贯性，必须满足什么条件呢？对于任意有界赌局 $f \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$，考虑定义在 $\mathcal{F}$ 上的实网 $\underline{P}_A(f)$，这里 $\underline{P}_A$ 是关于 A 的空下界预期。因为 $\underline{P}_A(f)$ 有上界 $\sup f$，而且是非递降的——如果 $A \supseteq B$ 则 $\underline{P}_A(f) \leq \underline{P}_B(f)$，所以它收敛到某个实数：

$$\underline{P}_{\mathcal{F}}(f) = \lim_{A \in \mathcal{F}} \underline{P}_A(f) = \sup_{A \in \mathcal{F}} \inf_{x \in A} f(x)$$

这就得到了定义在 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 上的下界预期 $\underline{P}_{\mathcal{F}}$。因为它是融贯下界预期 $\underline{P}_A$ 的逐点极限，所以也是融贯的。

如何解释融贯下界预期 $\underline{P}_{\mathcal{F}}$？它刻画了什么信念？对于 $\forall A \in \mathcal{F}$，都可以得到关于 A 的空下界预期 $\underline{P}_A$，它表示主体相信 $f \in A$。当 A 在有向集 $\mathcal{F}$ 中“变小”时，$\underline{P}_A$ 就变得更加精确，如果取极限，就得到了融贯下界预期 $\underline{P}_{\mathcal{F}}$，它表示主体相信 $(\forall A \in \mathcal{F})(f \in A)$。

命题 2. 令 $\mathcal{F}$ 是一个真滤，那么

(1) $\underline{P}_{\mathcal{F}}$ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 上的融贯下界预期；
(2) $\underline{P}_{\mathcal{F}}$ 是线性预期当且仅当 $\mathcal{F}$ 是超滤。（[9]）

命题 (2-1) 把融贯性同真滤联系起来了，命题 (2-2) 把线性预期同超滤联系起来了。进一步推广命题 2 就可以得到下述命题。

命题 3. 令 $\mathcal{C} \subseteq \wp(\mathcal{X})$ 且 $\mathcal{C} \neq \emptyset$，考虑下界概率 $\underline{Q}_{\mathcal{C}}$ 和概率 $Q_{\mathcal{C}}$：

(1) $\underline{Q}_{\mathcal{C}}$ 避免确定损失当且仅当 $\mathcal{C}$ 满足有穷交：
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C})(\textstyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset);$$
(2) $\underline{Q}_{\mathcal{C}}$ 是融贯下界概率当且仅当 $\mathcal{C}$ 是真滤；
(3) $Q_{\mathcal{C}}$ 是融贯概率当且仅当 $\mathcal{C}$ 是超滤。（[9]）

在命题逻辑的推理中，首先要做的是判定前提是否具有一致性，当把命题转换成非精确概率的语言后，首先要判断的是前提是否避免确定损失（即一致性）。命题 (3-1) 把避免确定损失同集合的有穷交联系起来了，相当于给出了判定避免确定损失的另一种办法。命题 (3-2) 和 (3-3) 分别是命题 2 两个小命题的推广。当前提一致了，如何推理呢？

命题 4. 令 $\mathcal{F}$ 是一个真滤，那么对于 $\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ 而言（[9]），

$$\begin{aligned}\underline{P}_{\mathcal{F}}(f) &= \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \{f \geq \alpha\} \in \mathcal{F}\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \{f \geq \alpha\} \notin \mathcal{F}\} \\ &= \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \{f > \alpha\} \in \mathcal{F}\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \{f > \alpha\} \notin \mathcal{F}\} \\ \underline{P}_{\mathcal{F}}(f) &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \{f \leq \alpha\} \in \mathcal{F}\} = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \{f \leq \alpha\} \notin \mathcal{F}\} \\ &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \{f < \alpha\} \in \mathcal{F}\} = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \{f < \alpha\} \notin \mathcal{F}\}\end{aligned}$$

这里使用真滤给出了 $\underline{P}_{\mathcal{F}}$ 和 $\overline{P}_{\mathcal{F}}$ 的另一种计算方法。这种方法不同于自然扩张，在 $\mathcal{F}$ 或者 $\wp(\mathcal{X})/\mathcal{F}$ 的基数很小的情况下，可以大大简化计算量。它同自然扩张有什么关系？

命题 5. *如果 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{X}$ 上的真滤，$\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{X}$ 上的超滤，那么*

(1) $\underline{P}_{\mathcal{F}}$ *是把融贯下界概率 $\underline{Q}_{\mathcal{F}}$ 扩张到所有有界赌局上的唯一融贯下界预期，即 $\underline{P}_{\mathcal{F}}$ 就是 $\underline{Q}_{\mathcal{F}}$ 的自然扩张；*

(2) $P_{\mathcal{U}}$ *是把融贯概率 $Q_{\mathcal{U}}$ 扩张到所有有界赌局上的唯一线性预期，即 $P_{\mathcal{U}}$ 就是 $Q_{\mathcal{U}}$ 的自然扩张。*([9])

有了这个定理以后，就能轻松地进行推理了，即把推理中的前提转换成 $\underline{Q}_{\mathcal{F}}$，通过自然扩张 $\underline{P}_{\mathcal{F}}$ 轻易地计算出结论的真假值。

命题集（事件集）和下界预期之间具有什么样的形式联系呢？如果主体相信一个命题是真的，即它相信对应的事件将会发生，那么它将愿意以任何赔率在此事件下注，所以它确定此事件的下界概率是 1。也就是说，在主体认为事件都会发生的评估 $\mathcal{C}$ 中和下界概率 $\underline{Q}_{\mathcal{C}}$ 之间存在一一对应：

命题（事件）集命题（事件）集	$\{0,1\}$-值下界概率值下界概率
一致的	避免确定损失
演绎封闭且一致的	融贯性
演绎闭包	自然扩张
完全的	线性的

在这种特殊的意义上，经典命题逻辑的推理等同于使用$\{0,1\}$-值下界概率的推理。因为后者是下界预期的一种特殊推理，所以经典命题逻辑可以被嵌入到融贯下界预期理论中，即融贯下界预期理论是经典命题逻辑的推广。

为了能够处理信念，有的研究者认为经典逻辑的唯一合理扩张是概率测度（[5]，第 3–25 页；[6, 7]），依据上面的结论，可以得出这个论断是不正确的。所以精确概率理论的力量不足以完成推广经典命题逻辑的任务，但是融贯下界预期理论可以。

3　非精确概率谓词逻辑推理

在上一部分，把命题逻辑嵌入到非精确概率逻辑中起到关键作用的是 Lindenbaum 代数上的 Stone 表示定理，它把命题转换成子集，用集论运算来刻画命题演算，但是集论运算不能表达谓词，因此同样的思想不能把谓词逻辑和 IP 连接起来。但是把卡尔纳普的逻辑主义同主观主义相结合可以实现这一步。

首先定义一个一阶语言 L，它具有变量 $x_1, x_2, \ldots$，关系符号 $R_1, \ldots, R_q$（分别具有有穷多个变元 $r_1, \ldots, r_q$），常量 a_n，$n \in \mathbb{N}^+$，没有函数符号和等号。令 *SL* 表示 L 的一阶语句集，*QFSL* 表示 L 的无量词语句集。令 $\mathcal{T}L$ 表示 L 的带有全集 $\{a_1, a_2, \ldots\}$ 的模型集，很明显 a_i 被解释为 a_i 本身。如果 $\Gamma \subseteq SL$ 是一致的，并且在 Γ 中的任意语句都没有涉及无穷多个常量 a_i 时，那么存在 $M \in \mathcal{T}L$ 满足 $M \vDash \Gamma$。

3.1 从状态描述到 *SL* 的 IP 推理

为了在 L 上讨论 IP，首先需要在 *SL* 上定义 IP。

定义 2. 函数 $w_i : SL \to [0,1]$（$i \in \mathbb{N}^+$）是 *SL* 上的概率函数，如果对于任意 $\theta, \phi, \exists x\psi(x) \in SL$，$w_i, i \in \mathbb{N}^+$ 满足

P1. $\vdash \theta \Rightarrow w_i(\theta) = 1$

P2. $\theta \vdash \neg\phi \Rightarrow w_i(\theta \vee \phi) = w_i(\theta) + w_i(\phi)$

P3. $w_i(\exists x\psi(x)) = \lim\limits_{n\to\infty} w_i(\psi(a_1) \vee \psi(a_2) \vee \cdots \vee \psi(a_n))$

这个定义是很直观的，虽然概率函数有无穷多个，但是 w_i 定义在 *SL* 上，它必须满足三条直观的限制：一、如果某个语句是定理，那么它的概率必须为 1（即 P1）；二、如果两个语句互斥，那么这两个语句析取的概率等于这两个语句的概率和（即 P2）；三、语句的概率等于满足此语句的个体的概率和（即 P3）。

命题 6. 假设主体的信念被表达为 $w_i : QFSL \to [0,1], i \in \mathbb{N}^+$，那么它不能被荷兰赌。（[8]，第 30 页）

命题 7. $w_i : QFSL \to [0,1], i \in \mathbb{N}^+$ 是 *QFSL* 上的概率函数，当且仅当 $\underline{P} = \inf_{i\in\mathbb{N}} w_i$ 避免确定损失。

证明. ($\Rightarrow$) 假设 w_i 是 *QFSL* 上的概率函数，那么 w_i 不能被荷兰赌，即 w_i 避免确定损失，那么 $\underline{P}$ 避免确定损失。

($\Leftarrow$) 如果 $\underline{P}$ 避免确定损失，那么 w_i 避免确定损失，即 w_i 不能被荷兰赌（[10]），所以 w_i 满足 P1、P2、P3（[8]，第 27 页）。所以 w_i 是 *QFSL* 上的概率函数。 □

命题 8. 假设一簇概率函数 $w_i^- : QFSL \to [0,1], i \in \mathbb{N}^+$，对于任意 $\theta, \phi \in QFSL$，w_i^- 都满足 P1、P2。那么 w_i^- 就具有唯一扩张到 *SL* 上的概率函数 w_i，并且对于任意 $\theta, \phi, \exists x\psi(x) \in SL$，$w_i$ 满足 P1、P2、P3。

证明. 假设 w_i^- 是定义在 *QFSL* 上的任意概率函数，对于任意 $\theta \in QFSL$ 而言，所有的 $\mathcal{T}L$ 子集

$$[\theta] = \{M \in \mathcal{T}L \mid M \vDash \theta\}$$
可以生成一个集合代数 $\mathcal{A}$。且把 $u_{w_i^-}$ 定义为
$$u_{w_i^-}([\theta]) := w_i^-(\theta), \theta \in QFSL$$
很明显，它是 $\mathcal{A}$ 上的有穷可加测度。

此外 $u_{w_i^-}$ 是一个前测度。假设 $\theta, \phi_i \in QFSL, i \in \mathbb{N}$，$[\phi_i]$ 不相交，且

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [\phi_i] = [\theta] \tag{1}$$

那么一定存在某个有穷的 n 满足

$$\bigcup_{i \leq n} [\phi_i] = [\theta] \tag{2}$$

否则的话，$(\forall n \in \mathbb{N})(\cup_{i \leq n}[\phi_i] \neq [\theta])$，即存在某个模型要么只能满足 θ，要么只能满足 $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$，那么

$$\{\neg\phi_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\theta\} \tag{3}$$

是有穷可满足的，通过谓词逻辑的紧致性定理，(3) 在 L 的某个模型上将是可满足的，尽管这个模型不一定在 $\mathcal{T}L$ 中，但是它的一个特殊子模型——集合为 $\{a_1, a_2, \ldots\}$ 的子模型——一定在 $\mathcal{T}L$ 中，那么此子模型将满足 (3) 的所有公式，当然也满足 θ，由 (1) 得出也将满足 $\{\phi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$，矛盾。

由于 $[\phi_i]$ 不相交和 (2)，那么 $[\phi_i] = \emptyset, i > n$，所以 $u_{w_i^-}([\phi_i]) = 0$，因此

$$u_{w_i^-}([\theta]) = \sum_{i \leq n} u_{w_i^-}([\phi_i]) = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_{w_i^-}([\phi_i])$$

所以 $u_{w_i^-}$ 是一个前测度。

由 $\mathcal{A}$ 可以产生 σ-代数 $\mathcal{B}$，通过 Caratheodory 扩张定理（[1]），$u_{w_i^-}$ 存在唯一的定义在 $\mathcal{B}$ 上的扩张 u_{w_i}。注意对于 $\exists x\psi(x) \in SL$

$$\begin{aligned}[\exists x\psi(x)] &= \{M \in \mathcal{T}L \mid M \vDash \exists x\psi(x)\} \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} [\psi(a_i)]\end{aligned} \tag{4}$$

因为 $\mathcal{B}$ 在补运算和可数并下封闭，所以它包含了所有集合 $[\theta], \theta \in SL$。

现在可以在 SL 上定义一个函数 w_i
$$w_i(\theta) = u_{w_i}([\theta])$$
注意因为 u_{w_i} 扩张了 $u_{w_i^-}$，所以 w_i 也扩张了 w_i^-。因为 u_{w_i} 满足 P1 和 P2，所以 w_i 也满足。由于 u_{w_i} 是可数可加的，且 (4)，得出 w_i 满足 P3。

w_i 一定是满足 P1、P2 和 P3 的唯一扩张，如果还存在其它的扩张函数 ξ_i，很显然 $w_i(\theta)=\xi_i(\theta),\theta\in SL$。假设 $w_i(\exists x\psi(x))\neq\xi_i(\exists x\psi(x)),\exists x\psi(x)\in SL$，且只有个体 a_1 满足 ψ，则 $w_i(\psi(a_1))\neq\xi_i(\psi(a_1))$，

$$\begin{aligned}w_i(\psi(a_1))&=u_{w_i}([\psi(a_1)])\\&=u_{w_i^-}([\psi(a_1)])\\&\neq\xi_i(\psi(a_1))\\&=u_{\xi_i}([\psi(a_1)])\\&=u_{w_i^-}([\psi(a_1)])\end{aligned}$$

矛盾。 □

命题 9. *假设存在一簇概率函数* $w_i^-:QFSL\to[0,1],i\in\mathbb{N}^+$，*令* $\underline{P}=\inf_{i\in\mathbb{N}^+}w_i^-$，*那么自然扩张* $\underline{E_P}=\inf_{i\in\mathbb{N}^+}w_i$。

证明. 假设存在一簇概率函数 w_i^-，由命题 8 得出 w_i^- 具有唯一扩张到定义在 SL 上的概率函数 w_i。因为 w_i 是 w_i^- 的 Caratheodory 扩张，所以 $(\forall i\in\mathbb{N}^+)(\forall\theta\in\mathrm{dom}\underline{P})(\underline{P}(\theta)\leq w_i)$，得出 $\mathcal{M}(\underline{P})=\{w_i\mid i\in\mathbb{N}^+\}$。由命题 7 得出 $\underline{P}$ 避免确定损失，由命题 1 得出 $\underline{E_P}=\min\{w_i\mid w_i\in\mathcal{M}(\underline{P})\}=\min\{w_i\mid i\in\mathbb{N}^+\}=\inf_{i\in\mathbb{N}^+}w_i$。 □

命题 9 表明了 Caratheodory 扩张和自然扩张的关系，即 Caratheodory 扩张是自然扩张过程中最关键的一步。假设存在一个前提集 $A\subseteq QFSL$，它被表示为 $\underline{P}$，通过定义 1 把它转换为精确概率函数 $w_i^-,i\in\mathbb{N}^+$ 的集合，然后对每个精确概率函数进行 Caratheodory 扩张，最后再通过定义 1 把 Caratheodory 扩张后的精确概率函数转换成下界预期，即 $\underline{E_P}$，所以自然扩张包含了 Caratheodory 扩张。

定义 3. 假设存在一个概率函数 $V_M:SL\to\{0,1\}$，

$$V_M=\begin{cases}1, & \text{如果}M\vDash\theta\\0, & \text{如果}M\nvDash\theta\end{cases}$$

这里 $M\in\mathcal{T}L$。

此定义的直观意思是对于 $\mathcal{T}L$ 中的某个模型 M 而言，如果模型 M 满足 θ，那么 $V_M(\theta)$ 取值为 1，即 θ 在 M 中为真。如果 M 不满足 θ，那么 $V_M(\theta)$ 取值为 0，即 θ 在 M 中为假，所以 $V_M(\theta)$ 是一个二值的概率函数。

对于任意 $\theta\in SL$ 而言，$[\theta]=\{M\in\mathcal{T}L\mid M\vDash\theta\}$，令 $\mathcal{B}$ 是由所有 $[\theta]$ 生成的 σ-代数，u 是 $\mathcal{B}$ 上的可数可加概率，那么

$$w = \int_{\mathcal{T}L} V_M \mathrm{d}u(M)$$

在 *SL* 上定义了一个概率函数。

命题 10. 假设 $w_i, i \in \mathbb{N}^+$ 是 SL 上的一簇概率函数，那么在集合代数 $\mathcal{B}$ 上存在一簇可数可加测度 $u_{w_i}, i \in \mathbb{N}^+$ 满足

$$w_i(\theta) = \int_{\mathcal{T}L} V_M(\theta) \mathrm{d}u_{w_i}(M)$$

证明. 如果令 $u_i^- = w_i \restriction QFSL, i \in \mathbb{N}^+$ ，那么从命题 8 得出存在一个 $\mathcal{B}$ 上可数可加测度 μ_{u_i} 满足对于任意 $\theta \in SL$

$$u_i(\theta) = \mu_{u_i}([\theta]) = \int_{\mathcal{T}L} V_M(\theta) \mathrm{d}u_{w_i}(M)$$

通过唯一性得出 u_i 必须等于 w_i ，那么就得到 $\mu_{w_i} = \mu_{u_i}$，则

$$w_i = \int_{\mathcal{T}L} V_M \mathrm{d}u_{w_i}(M) \qquad \square$$

命题 10 的直接结论就是“主体对语句 θ 的非精确赋值问题”等价于“主体对 $\mathcal{T}L$ 的 Borel 子集 A 的非精确赋值问题，即如何挑选 $\mu_{w_i}(A)$”。但是主体如何挑选的问题又是一个统计问题，而不是一个逻辑问题，所以这就不是这里所关心的问题了。

综上，为了确定 *SL* 上的非精确概率函数，只需要确定这些函数在无量词语句上的赋值就够了。简单地说，令 L 是默认的语言，它带有常量 $a_1, a_2, \ldots$，还带有参数数量分别为 $r_1, \ldots, r_q$ 的关系符号 $R_1, \ldots, R_q$。对于来源于 $a_1, a_2, \ldots$ 的不同常量 $b_1, \ldots, b_m$ 而言，一个关于 $b_1, \ldots, b_m$ 的状态描述就是下述形式的 L 语句

$$\bigwedge_{i=1}^{q} \bigwedge_{c_1, \ldots, c_{r_i}} \pm R_i\left(c_1, \ldots, c_{r_i}\right)$$

这里任意 $c_{r_i} \in \{b_1, \ldots, b_m\}$，因此 $c_1, \ldots, c_{r_i}$ 可能重复。$\pm R_i$ 要么表示 R_i 要么表示 $\neg R_i$。大写字母 $\Theta, \Phi, \Psi, \ldots$ 被用来表示状态描述。

一个关于 $b_1, \ldots, b_m$ 的状态描述表明：对于关系符号 R_i 和来源于 $b_1, \ldots, b_m$ 的任意常量而言，那些 $R_i(c_1, \ldots, c_{r_i})$ 成立，那些不成立。此外任意两个关于 $(b_1, \ldots, b_m)$ 的状态描述都是互斥的，因为它们的合取是不一致的。

例 1. 为了表达世界杯比赛，令 L 有二元关系符号 W(赢球)、L(输球)、D(平局)，两个常元 a_1, a_2（代表两个球队），那么 $W(a_1, a_2) \wedge \neg L(a_1, a_2) \wedge \neg D(a_1, a_2)$ 就是一个关于 a_1, a_2 的状态描述，通过它就能得出 $\neg W(a_1, a_2)$ 是假的。

通过析取范式定理（[4]），任何 $\theta(b_1,\ldots,b_m)\in$ *QFSL* 都逻辑等价于一个关于 $b_1,\ldots,b_m$ 的状态描述的析取，

$$\theta(b_1,\ldots,b_m)\equiv\bigvee_{i\in S}\Theta(b_1,\ldots,b_m)$$

因为状态描述都是互斥的，所以

$$w_i(\theta(b_1,\ldots,b_m))=\sum_{i\in S}w_i(\Theta(b_1,\ldots,b_m)),i\in\mathbb{N}^+$$

从这里就可以看出：通过概率函数 $w_i,i\in\mathbb{N}^+$ 确定了在状态描述上的非精确取值，就可以确定它在 *QFSL* 上的取值，再通过命题 8 就能确定它在 *SL* 上的取值。

从形式上来看就是，如果 $w_i,i\in\mathbb{N}^+$ 是定义在状态描述 $\Theta(a_1,\ldots,a_m),m\in\mathbb{N}^+$ 上的函数，它满足：

- $w_i(\Theta(a_1,\ldots,a_m))\geq 0,i\in\mathbb{N}^+$
- $w_i(\top)=1,i\in\mathbb{N}^+$
- $w_i(\Theta(a_1,\ldots,a_m))$
  $=\sum_{\Phi(a_1,\ldots,a_{m+1})\vDash\Theta(a_1,\ldots,a_m)}w_i(\Phi(a_1,\ldots,a_{m+1})),i\in\mathbb{N}^+$ (5)

那么通过 (5)

$$w_i(\theta(b_1,\ldots,b_m))=\sum_{\Phi(a_1,\ldots,a_k)\vDash\Theta(b_1,\ldots,b_m)}w_i(\Phi(a_1,\ldots,a_{m+1})),i\in\mathbb{N}^+$$

（这里 k 足够大以至于 b_i 都在 $a_1,\ldots,a_k$ 中），$w_i,i\in\mathbb{N}^+$ 就可以扩张成 *QFSL* 上的概率函数，进而扩张成 *SL* 上的概率函数。有了定义在 *SL* 上的一簇概率函数 $w_i,i\in\mathbb{N}^+$，通过定义 1 就能得到定义在 *SL* 语句上的下界预期 $\underline{P}$。

以上就是用经典概率语言表达的非精确谓词逻辑，但是通过命题 1 也能得到用 IP 语言表达的非精确概率谓词逻辑。假设确定了概率函数 $w_i,i\in\mathbb{N}^+$ 在所有状态描述上的取值，这就相当于确定了在所有状态描述上的线性预期 P，然后再对 $\underline{P}$ 进行线性扩张，得到了定义在 *SL* 上 $\underline{E}_{\underline{P}}$。这种方法和命题 8 的方法是等价的，因为线性扩张包含了 Caratheodory 扩张。（[3]）

例 2. 在例子 1 中，所有的状态描述是 $\mathcal{X} = \{\omega_1, \ldots, \omega_8\}$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= W(a_1, a_2) \wedge L(a_1, a_2) \wedge D(a_1, a_2)) \\
\omega_2 &= W(a_1, a_2) \wedge L(a_1, a_2) \wedge \neg D(a_1, a_2) \\
\omega_3 &= W(a_1, a_2) \wedge \neg L(a_1, a_2) \wedge D(a_1, a_2) \\
\omega_4 &= W(a_1, a_2) \wedge \neg L(a_1, a_2) \wedge \neg D(a_1, a_2) \\
\omega_5 &= \neg W(a_1, a_2) \wedge L(a_1, a_2) \wedge D(a_1, a_2) \\
\omega_6 &= \neg W(a_1, a_2) \wedge L(a_1, a_2) \wedge \neg D(a_1, a_2) \\
\omega_7 &= \neg W(a_1, a_2) \wedge \neg L(a_1, a_2) \wedge D(a_1, a_2) \\
\omega_8 &= \neg W(a_1, a_2) \wedge \neg L(a_1, a_2) \wedge \neg D(a_1, a_2)
\end{aligned}$$

但是有意义的只有三种，即 $S = \{\omega_4, \omega_6, \omega_7\}$

$$\begin{aligned}
\omega_4 &= W(a_1, a_2) \wedge \neg L(a_1, a_2) \wedge \neg D(a_1, a_2) \\
\omega_6 &= \neg W(a_1, a_2) \wedge L(a_1, a_2) \wedge \neg D(a_1, a_2) \\
\omega_7 &= \neg W(a_1, a_2) \wedge \neg L(a_1, a_2) \wedge D(a_1, a_2)
\end{aligned}$$

假设在 S 上的存在 $n \in \mathbb{N}^+$ 个概率函数 $w_i, i \in \{1, \ldots, n\}$，它们满足

$$C = \begin{cases} w_i(w_4) \leq 0.5, & i \in \{1, \ldots, n\} \\ w_i(\omega_6) \geq 0.2, & i \in \{1, \ldots, n\} \\ w_i(\omega_4) \geq w_i(\omega_7), & i \in \{1, \ldots, n\} \\ w_i(\omega_7) \geq w_i(\omega_6), & i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

这些概率函数的确定来源于这两个球队过去交锋的经历，它们是推理的前提。在语言 L 中，推理的前提主要是两种语句：无量词语句和量词语句。对于无量词语句，因为任何 $\theta \in QFSL$ 都逻辑等价于一个关于 b_1, b_2 的状态描述的析取，比如 $\theta = \neg W(a_1, a_2) \equiv \omega_6 \vee \omega_7$。对于量词语句，它总是可以转化为无量词语句的析取。所以这就表达出了归纳推理前提的特点——个别现象。

在 IP 推理中，主要关心的是前提对不能必然推出的结论的非精确支持度，在这里就是这次比赛胜负的情况，即确定 S 中状态的非精确概率。首先找出满足 C 的所有概率函数 $w_i, i \in \{1, \ldots, n\}$，这等价于确定了在所有状态描述上的线性预期 P，然后对 P 进行线性扩张，得到了定义在 *SL* 上 $\underline{E}_P$，即 $\underline{E}_P(\omega_4) = 0.33, \underline{E}_P(\omega_6) = 0.2, \underline{E}_P(\omega_7) = 0.25$。利用同样的思想，就能确定表达这次比赛结果的无量词语句和量词语句的非精确概率，比如令 $\alpha = \exists x W(a_1, x) \equiv \omega_4$，那么 $\underline{E}_P(\alpha) = \underline{E}_P(\omega_4) = 0.33$，即通过 IP 推理得出这次比赛 a_1 赢的最低概率是 0.33。

至此实现了从状态描述到任意谓词语句的 IP 推理，但是得到所有状态描述是一个很强的要求，因为它对所有个体都进行了断定，在日常推理中，通常只能得到有限个体的断定，因此需要研究从有限的个体断定出发，如何进行 IP 推理。由于已经完成了从状态描述到任意谓词语句的 IP 推理，所以还需要解决的是从有限的个体描述到状态描述的 IP 推理，通过状态描述集（即可能空间）的精炼可以实现这一步。

3.2 从有限的个体描述到状态描述的 IP 推理

状态描述集 $\mathcal{X}_1$ 表达的是主体已经知道了所有个体的性质，但是在归纳推理开始时，主体只知道有限多个个体的性质，其它个体的性质是未知的，这种认知状态使得主体只能确定状态描述属于 $\mathcal{X}_1$ 的某个子集，然后由这些子集构成 $\mathcal{X}_0$，那么从 $\mathcal{X}_1$ 到 $\mathcal{X}_0$ 就构成了一个映上（[10]，第 180 页），这就是 $\mathcal{X}_0$ 到 $\mathcal{X}_1$ 的精炼 A，$\mathcal{X}_0$ 对应于 $\mathcal{X}_1$ 的一个划分，即对于 $\forall x_0 \in \mathcal{X}_0$，它都等同于一个 $\mathcal{X}_1$ 中的精炼状态描述集 $A(x_0)$。所以 $\mathcal{X}_0$ 上的任意概率分布 f 等同于 $\mathcal{X}_1$ 中的概率分布 g，这里 $g(x_1) = f(x_0), x_1 \in A(x_0)$。对于任意 g，定义 $\mathcal{X}_0$ 中的下界概率 $g_*(x_0) = \inf\{g(x_1) : x_1 \in A(x_0)\}$，那么精炼后的模型就是 $\underline{P_1}(g) = \underline{P_0}(g_*)$。然后再通过定义 1 就能得到定义在状态描述集上的一簇概率分布。

例 3. 假设语言 L 只具有一元谓词 R，对于个体 a_1, a_2 的状态描述是：

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= R(a_1) \wedge R(a_2) \\
\omega_2 &= R(a_1) \wedge \neg R(a_2) \\
\omega_3 &= \neg R(a_1) \wedge R(a_2) \\
\omega_4 &= \neg R(a_1) \wedge \neg R(a_2)
\end{aligned}$$

但是主体只知道 a_1 具有性质 R，其它一无所知，那么此时它只能确定 a_1, a_2 的可能状态要么属于 $t_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$，要么属于 $t_2 = \{\omega_3, \omega_4\}$，所以 $\mathcal{X}_0 = \{t_1, t_2\}$。当主体知晓了 a_2 的性质之后，它就能确定 a_1, a_2 的可能状态属于 $\mathcal{X}_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$。因此 $\mathcal{X}_0$ 是 $\mathcal{X}_1$ 的一个划分，即 $A(t_1) = \{\omega_1, \omega_2\}$，$A(t_2) = \{\omega_3, \omega_4\}$，所以 $\mathcal{X}_0$ 上的任意概率分布 f 等同于 $\mathcal{X}_1$ 中的概率分布 g，$g(\omega_i) = f(t_j), \omega_i \in A(t_j), i \in \{1, \ldots, 4\}, j \in \{1, 2\}$。对于任意 g，定义 $\mathcal{X}_0$ 上的下界概率 $g_*(t_j) = \inf\{g(\omega_i) : \omega_i \in A(t_j)\}$，那么精炼后的模型就是 $\underline{P_1}(g) = \underline{P_0}(g_*)$。

4 结语

综上，通过滤可以在 IP 推理中表达出命题逻辑，但是滤不能处理谓词，为了让 IP 概率逻辑能够表达谓词，必须另辟蹊径。通过在状态描述上引入非精确概率，

然后把非精确概率扩展到 *QFSL*，进而通过 IP 推理的自然扩张扩展到 S*L* 上。这样就实现了非精确概率同谓词逻辑的结合，得出了非精确概率谓词逻辑推理。

得到了非精确概率谓词逻辑推理之后，IP 同模态逻辑的关系成为了一个自然而然的问题，从直观上来看，非精确概率逻辑等同于模态逻辑加概率，因为从贝叶斯敏感度分析可以看出，非精确概率是一簇概率，其中每个概率都是可能的，这将是一个有价值的研究方向。

参考文献

[1] R. B. Ash, 1999, *Probability and Measure Theory*, Cambridge, Massachusetts: Academic Press.

[2] G. D. Cooman, M. Troffaes and E. Miranda, 2015, "n-monotone lower previsions", *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **16(4)**: 101–121.

[3] D. Denneberg, 1994, *Non-additive Measure and Integral*, Dordrecht: Springer Netherlands.

[4] H. B. Enderton, 1972, *A Mathematical Introduction to Logic*, Cambridge, Massachusetts: Academic Press.

[5] E. T. Jaynes and G. L. Bretthorst, 2003, *Probability Theory: The Logic of Science*, Cambridge: Cambridge University Press.

[6] D. V. Lindley, 1981, "Scoring rules and the inevitability of probability", *International Statistical Review*, **50(1)**: 27.

[7] D. V. Lindley, 1987, "The probability approach to the treatment of uncertainty in artificial intelligence and expert systems", *Statistical Science*, **2(1)**: 17–24.

[8] J. Paris and A. Vencovská, 2011, *Pure Inductive Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.

[9] M. Troffaes and G. de Cooman, 2014, *Lower Previsions*, New York: Wiley.

[10] P. Walley, 1991, *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, London: Chapman and Hall.

（责任编辑：赵伟）

Imprecise Predicate Logic Reasoning

Wenquan Pan

Abstract

The Imprecise Probabilistic Logic is the expansion of the classical propositional logic, because its meta-property is popularized by the meta-property of propositional logic, that is, avoiding sure loss promotes Consistency, it is necessary to determine whether the premise is satisfied to Avoiding sure loss before reasoning, and Natural Extension generalizes the deductive process of propositional logic. And the Coherence generalizes Deductive closed and Consistency. However, it is an open question how to combine predicate logic with Imprecise Probability to form Imprecise Predicate Logic. This step can be achieved by grafting subjectivism on Carnap's logicism.

Wenquan Pan School of Marxism, Lingnan Normal University
p297001881@outlook.com