

论集合论的模型

李娜

何建锋

摘 要: 本文讨论了 ZF 的经典模型和非经典模型, 梳理了它们的最新动态, 并且将 ZF 的广义代数值模型推广到基于形式不一致逻辑的弗协调集合论。该推广过程的关键在于解决两个问题: 第一, 这类弗协调集合论是否包含不一致的集合; 第二, 在模型中如何处理相等关系 $=$, 以便它能够满足莱布尼兹公理。此外, 本文构造的广义代数值模型具有一定的可推广性。

关键词: 集合论的模型; 独立性; 布尔值; 拓扑斯; 弗协调集合论

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 引言

选择公理 (AC) 在数学中被广泛的使用, 它断定: 对非空集合的任意收集, 我们能从该收集的每个成员中选择一个元素。但是, AC 有一些非直觉的后承, 如“每个集合都能被良序”, 我们难以想像所有实数的集合被良序。

1878 年, 康托 (G. Cantor) 构造了连续统假设 (continuum hypothesis, CH), 它断定: 实数的每个无穷集, 要么和 $\mathbb{N}$ (自然数的集合) 有相同的基数, 要么和 $\mathbb{R}$ (实数的集合) 有相同的基数。CH 的形式化为: $\neg \exists x (\aleph_0 < |x| < 2^{\aleph_0})$, 其中 $|x|$ 表示 x 的基数。CH 有两个推广: 一个是广义连续统假设 (general continuum hypothesis, GCH), $\forall x \neg \exists y (|x| < |y| < |2^x|)$; 另一个是阿列夫假设 (aleph hypothesis, AH), $\forall \alpha (2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$ 。GCH 蕴涵 AC、CH、AH。

1908 年, 集合论第一次被策梅洛 (E. Zermelo) 公理化, 后经过斯柯伦 (T. Skolem) 和弗兰克尔 (A. Fraenkel) 的改进, 形成了 ZF, 在 ZF 的基础上添加 AC, 就得到 ZFC。公理化集合论 ZFC 的诞生, 使得元数学成为可能, 因为所有的数学都能在 ZFC 中被形式化。元数学即对数学自身的研究。但是根据哥德尔 (K. Gödel)

收稿日期: 2017-07-07

作者信息: 李娜 南开大学哲学院
linawii@nankai.edu.cn

何建锋 南开大学哲学院
hejianfeng2016@outlook.com

基金项目: 国家社科基金重点项目“基于哲学逻辑的集合论研究”(16AZD036)。

的不完全性定理, ZF 或 ZFC 系统是不完全的, 因此, 对于我们抱有疑虑的公理 AC 或假设 GCH, 它们在形式系统 ZF 或 ZFC 中的证明或证伪就变得很有意义。

解决这些问题的努力引导了各种集合论模型的诞生。1922 年, 弗兰克尔给出了带原子的 ZF 集合论 (简称 ZFA) 的一个置换模型 (permutation model), 并用它证明了 AC 相对于 ZFA 的独立性 ([11], 第 46 页)。后来, 莫斯托夫斯基 (A. Mostowski) 和施佩克尔 (E. P. Specker) 相继改进了置换模型。置换模型被用于获得 AC 相对于 ZF^0 (ZF 去掉基础公理) 的独立性。1940 年, 哥德尔发表了他的可构成模型 (constructible model), 他使用它证明了 AC 相对于 ZF 的一致性、GCH 相对于 $ZF + AC$ 的一致性 ([11], 第 25 页)。1956 年, 塔尔斯基 (A. Tarski) 提出了自然模型 (natural model) 的概念, 将已存在的累积分层 (cumulative hierarchy) 视为集合论的自然模型 ([25])。1963 年, 科恩 (P. J. Cohen) 构造了集合论的力迫模型 (forcing model), 并使用它证明了 AC 相对于 ZF 的独立性、GCH 相对于 $ZF + AC$ 的独立性 ([11], 第 76 页)。这些模型诞生的目的是为了获得一些重要的独立性结果, 我们姑且将这些模型称为集合论的经典模型。

在科恩之后, 斯科特 (D. Scott)、索洛韦 (R. M. Solovay)、福平卡 (P. Vopěnka) 引入了布尔值模型 (boolean-valued model), 这种模型可视为力迫模型的一种重构 ([3], 第 18 页)。随后, 布尔值模型被推广到了海廷代数 (heyting algebra)、格 (lattice)。2015 年, 洛维 (B. Löwe) 和塔拉法德 (S. Tarafder) 将布尔值模型推广到了三值代数 (three-valued algebra), 构造了广义代数值模型 (generalized algebra-valued model) ([22])。此外, 1980 年, 富尔曼 (M. P. Fourman) 将拓扑斯 (topos) 引入到了集合论的模型研究中, 展示了如何利用拓扑斯获得一些原理的独立性证明 ([13])。这些模型可算是技术上的创新, 我们姑且称它们为集合论的非经典模型。

本文分为三部分: 第一部分分析集合论的经典模型的作用, 并梳理其最新动态; 第二部分简要介绍集合论的非经典模型, 讨论其应用前景; 第三部分为基于形式不一致逻辑的弗协调 ZF 集合论构造具有一定普遍性的广义代数值模型。

2 集合论的经典模型

本节将按照自然模型、可构成模型、置换模型、力迫模型的顺序讨论这些经典模型, 并非按照时间顺序, 这样安排是出于两方面的考虑: 第一, 作为自然模型的累积分层出现的较早, 且被广泛使用, 只是“自然模型”这个名字出现的较晚; 第二, 置换模型和可构成模型没有紧要的联系, 却和力迫模型有共通之处, 它们

不仅都用于获得独立性结果, 而且都具有对称性质 (symmetry property)。¹

2.1 自然模型

1917 年, 米利曼诺夫 (D. Mirimanoff) 使用超穷归纳构造了集合 V_α 的一个累积分层, 其中 α 是任意序数, 如下:

- (1) $V_0 = \emptyset$;
- (2) $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \wp(V_\alpha)$, 其中 $\wp(V_\alpha)$ 是 V_α 的幂集;
- (3) $V_\alpha = \bigcup[V_\beta \mid \beta \in \alpha]$, 其中 α 是任意极限序数 ([6], 第 219 页)。

从累积分层出发, 可以得到任意累积集 V_α , 即, 对任意 α 有 V_α ; 也可以得到所有累积集构成的类 $[V_\alpha \mid \alpha \in ON]$, 其中 ON 是所有序数的类。如果我们用 V 表示集合全域 $\{x \mid x = x\}$, 那么, 使用 ZF 可以证明 $V = \bigcup[V_\alpha \mid \alpha \in ON]$ 。证明过程简述为: 幂集公理用于从 α 得到 V_α 。替换公理和并公理用于为一个极限序数 α 构造 V_α 。考虑一个函数, 它为每个 $\beta < \alpha$ 指派集合 V_β 。通过替换公理, 对 $\beta < \alpha$ 而言, 所有 V_β 的收集是一个集合, 所以, 并公理用于这个集合产生 V_α 。无穷公理用于证明 ω 的存在, 并且也证明序数的超穷序列的存在。最后, 在假定其它公理的情况下, 基础公理等价于陈述: 对某个序数 α 而言, 每个集合都属于某个 V_α 。² 特殊地, 冯·诺依曼 (von Neumann) 证明 $\bigcup[V_\alpha \mid \alpha \in ON]$ 是 ZF 的一个标准模型 (standard-model) ([6], 第 219 页)。所谓标准模型是指, 集合论的语言中的谓词符号 $\in$ 和 $=$ 分别被解释为通常意义上的隶属关系和相等关系。

根据反射原理 (reflection principle), 对每个公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, ZFC 证明: 存在一个序数 α 满足: V_α 反射它, 即, 对每个 $a_1, \dots, a_n \in V_\alpha$ 有: $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ 在 V 中成立, 当且仅当, $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ 在 V_α 中成立。因此, 存在序数 α , 使得 V_α 是 ZFC 的一个模型, 当然也是 ZF 的一个模型。ZF 的形如 V_α 的模型被称为 ZF 的自然模型。关于自然模型的研究主要是确定 α 的取值范围。

张宏裕在讨论自然模型时, 给出的定理是“若 $\mathcal{K}$ 是不可及基数, 则 $V_{\mathcal{K}}$ 是 ZF 的模型” ([45], 第 168 页)。关于 ZF 的自然模型 V_α , 这个结果没有完全地描述 α 的取值范围。因为蒙塔古 (R. Montague) 和沃特 (L. R. Vaught) 证明了: 对任意不可及基数 $\mathcal{K}$, 存在一个序数 $\theta < \mathcal{K}$ 并非是不可及的, 且累积集 V_θ 是 ZF 的传递标准模型。为了完全地描述 ZF 的自然模型, 2007 年, 布尼纳 (E. I. Bunina) 和扎哈罗夫 (V. K. Zakharov) 引入了 (强) 公式不可及基数 ((strongly) formula-inaccessible cardinal number) 的概念 ([6])。下面简要介绍这个概念。

关于公式不可及基数。首先给出一些记号说明。如果一个公式 φ 的所有自

¹ 对称性质在获取 AC 的独立性时十分有用, 在利用对称性质为 ZF 构造的置换模型或力迫模型中, 易使 AC 不成立。因为本文不涉及模型的具体构造过程, 所以下文不会讨论对称性质。

由变元包含于变元 $x_1, \dots, x_{m-1}, p_0, \dots, p_{n-1}$ 中, 那么我们把它记为 $\varphi(\vec{x}, \vec{p})$ 。在记号 $\varphi(\vec{x}, \vec{p})$ 中, 变元 $p_0, \dots, p_{n-1}$ 被视作参数 (parameters)。我们用 $\vec{x} \in A$ 、 $\forall \vec{x} \in A$ 、 $\exists \vec{x} \in A$ 分别表示 $x_0 \in A \wedge \dots \wedge x_{m-1} \in A$ 、 $\forall x_0 \in A \dots \forall x_{m-1} \in A$ 、 $\exists x_0 \in A \dots \exists x_{m-1} \in A$ 。然后, 对任意传递集 A , ZF 的每个公式 $\varphi(x, y; \vec{p})$ 定义了一个对应, 即, 依赖参数 $\vec{p}$ 的

$$[\varphi(x, y; \vec{p})|A] \equiv \{z \in A * A \mid \exists x, y \in A (z = \langle x, y \rangle \wedge \varphi^A(x, y; \vec{p}))\} \subset A * A.$$

其中, $\varphi^A(x, y; \vec{p})$ 表示 $\varphi(x, y; \vec{p})$ 在 A 中成立。一个序数 α 被称为公式正则的 (formula-regular), 如果

$$\forall \vec{p} \in V_\alpha \forall \beta (\beta \in \alpha \wedge ([\varphi(x, y; \vec{p})|V_\alpha] \Rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \Rightarrow \bigcup \text{rng}[\varphi(x, y; \vec{p})|V_\alpha] \in \alpha)),$$

其中, $[\varphi(x, y; \vec{p})|V_\alpha] \Rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ 的意思是 $[\varphi(x, y; \vec{p})|V_\alpha]$ 是一个从 β 到 α 内的函数。 φ 是指称 ZF 的任意公式的元变元 (metavariable), rng 表示值域。一个序数 $\alpha > \omega$ 被称为 (强) 公式不可及的, 如果

- (1) $\forall \beta (\beta \in \alpha \Rightarrow |\wp(\beta)| \in \alpha)$;
- (2) α 是公式正则的。

如果一个序数 α 满足 $\forall \beta (\beta \in \alpha \Rightarrow |\wp(\beta)| \in \alpha)$, 那么 α 是一个基数。每个公式不可及序数 α 是一个基数。如果 α 是一个公式不可及基数, 那么 V_α 被称为公式不可及累积集 (formula-inaccessible cumulative sets)。

布尼纳和扎哈罗夫证明了一个定理: 在 ZF 中, 对任意集合 U , 下列断定等价,

- (1) 对某个公式不可及基数 α , 有 $U = V_\alpha$;
- (2) U 是 ZF 的一个超传递标准模型。

据此结果, ZF 的所有自然模型都可以被描述。关于超传递见 [6], 第 222 页。

2.2 可构成模型

可构成模型被用于证明 AC、GCH 相对 ZF 的一致性。可构成 (constructibility) 的最初想法是: 令 A 是非空的、两两不相交集的一个集合。 A 的一个选择集 C 是 $\bigcup A$ 的一个子集, 所以 C 是 $\wp(\bigcup A)$ 的一个元素。所以可以设想, 选择公理是从并公理和幂集公理出发可证的。但是根据分离公理, 我们想证明选择集的存在, 需要一个 ZF 公式 $\phi(x)$ 。但是我们不知道如何从一般意义上获得这样一个公式, 所以, 给出可定义集合 (definable set) 的概念。

令 $\mathcal{L}$ 是一个一阶语言, 令 $\mathcal{R} = \langle A, \dots \rangle$ 是 $\mathcal{L}$ 上的一个关系系统, A 为它的定义域。 A 的一个子集 S 被称为在 $\mathcal{R}$ 上是可定义的 (definable), 当且仅当, 存在

$\mathcal{L}$ 的一个公式 ϕ , ϕ 有一个自由变元 x , 使得 $S = \{a \mid a \in A \text{ 且 } \mathcal{R} \models \phi[a]\}$ 。令 $\text{Def}(\mathcal{R})$ 是 $\mathcal{R}$ 的所有可定义子集的集合。

可构成模型有两种: 语义的和语法的。1939 年, 哥德尔发表了作为语义模型的可构成模型 ([11], 第 25 页)。这种语义模型通过定义一个超穷分层 (transfinite hierarchy) M_α 实现。1940 年, 哥德尔发表了作为语法模型的可构成模型 ([11], 第 25 页)。这种语法模型通过定义可构成集 (constructible sets) 的一个分层 F_α 实现。这里简述作为语义模型的可构成模型, 而关于语法的可构成模型请参见 [45], 第 175 页。

作为语义模型的可构成模型如下:

令 $\mathfrak{M}$ 是 ZF 的一个标准模型, 对 $\mathfrak{M}$ 中的序数 α , 在 $\mathfrak{M}$ 中定义集合的一个分层 M_α 如下:

- $M_0 = \emptyset$;
- $M_{\alpha+1} = \text{Def}(M_\alpha)$;
- $M_\lambda = \bigcup \{M_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, 如果 λ 是一个极限序数。

令 $L = \bigcup \{M_\alpha \mid \alpha \in ON^{\mathfrak{M}}\}$, 其中 $ON^{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中所有序数的类。一个集合被称为可构成的, 当且仅当, 它是某个 M_α 的元素。因为对所有 $\alpha \in ON^{\mathfrak{M}}$, M_α 在 $\mathfrak{M}$ 中是可定义的, 可得 M_α 是 $\mathfrak{M}$ 的子集, 所以有 $L \subseteq \mathfrak{M}$ 。可证地, $\langle L, \in \rangle$ 是 ZF 的一个模型。关于此模型的详情请参见 ([11], 第 26 页)。

可构成模型被用于证明 AC 相对于 ZF 的一致性、GCH 相对于 ZF 的一致性、GCH 相对于 ZF + AC 的一致性。Gödel 还证明了 $V = L$ 在 $\langle L, \in \rangle$ 中成立, 并且 $V = L$ 蕴涵 AC 和 GCH。因此, AC 和 GCH 在 $\langle L, \in \rangle$ 中也成立, 进一步地, $\langle L, \in \rangle$ 是 ZF + AC + GCH 的一个模型。

可构成模型不能被用于证明 AC 和 GCH 相对于 ZF 的独立性。科恩于 1963 年证明了: 如果存在 ZF 的传递标准模型, 那么存在 ZF 的极小模型 (minimal model)。关于极小模型, 如果 M 是 ZF 的一个极小模型, 那么, 对 ZF 的任意传递标准模型 M' , M' 包含一个同构于 M 的子模型 ([8])。科恩的证明带来一个后承: 对任意公式 ϕ , 如果我们使用可构成模型 M_1 证明 ϕ 相对于 ZF 的一致性, 那么无法构造另一个可构成模型 M_2 用于证明 ϕ 相对于 ZF 的独立性。原因是: 存在 ZF 的极小模型 M_3 , 使得 M_1 和 M_2 都包含同构于 M_3 的子模型, 而这是不可能的。因此, 使用可构成模型的方法, 我们无法证明 AC 和 GCH 相对于 ZF 的独立性。

关于可构成模型的后续发展, 可分为四个方面:

一、关于可构成性公理的研究。例如, 1966 年, 斯卡尔佩里尼 (B. Scarpellini) 给出了可构成性公理的最一般形式, 斯卡尔佩里尼称之为弱可构成性公理 (weak axiom of constructibility)。该公理的形式为: $\exists x(\forall u\forall v(u \in x \wedge v \in u \rightarrow v \in$

$x) \wedge \forall y \exists z (z \in ON \wedge y \in F_x^t z))$, 其中 ON 是所有序数的类, $F_x^t z$ 可以理解为 x 上的一个可构成集。该定理说的是: 存在一个集合 x , 使得对任意集合 y , 都存在一个序数 z 使得 y 是在 x 上可构成的。([28])

二、关于可构成性公理的应用的研究, 一般体现为, 在新构造的模型中验证可构成性公理是否成立, 以此考察新模型的表达力。例如, 福平卡构造了集合论的一个超幂模型 (ultrapower model), 在其中证明了可构成性公理是成立的 ([5])。

三、关于可构成模型的初等模型的研究。1976 年, 考恩 (R. H. Cowen) 研究了作为语义模型的可构成模型, 主要研究了可构成集 M_α 和它的初等子模型、初等等价模型、可定义元素构成的传递坍缩 (transitive collapse) 之间的关系 ([9])。

四、关于可构成模型和布尔值模型的关系的研究。1967 年, 福平卡和哈耶克 (P. Hájek) 讨论了将作为语义模型的可构成模型转换为布尔值模型的可能性 ([32])。

自 20 世纪 70 年代后期起, 关于可构成性公理的研究关注的是精细结构 (fine structure) 和核模型 (the core model)。精细结构是关于可构成全域 L 的理论, 它本质上试图说明可构成分层的生长方式 ([17])。核模型是构造集合论的全域的一个可定义的内模型的方法, 它需要用到精细结构和迭代超幂 (iterated ultrapowers) ([10], 第 xiv 页)。核模型主要用于大基数 (large cardinal) 的研究, 方法是通过判定位于某个大基数公理下的核模型来分析该大基数公理的性质 ([18])。例如, 2001 年, 维克斯 (J. Vickers) 和韦尔奇 (P. D. Welch) 使用核模型的方法证明: $\text{Con}(\text{ZFC} + \text{存在一个传递内模型 } M \text{ 和一个非平凡的初等嵌入 } M \rightarrow V)$ 不能蕴涵 $\text{Con}(\text{ZFC} + \text{存在一个可测基数 (measurable cardinal)})$, 其中 Con 表示一致性 ([31])。

2.3 置换模型

弗兰克尔首次在 1922 年引入了置换模型, 因为当时关于数学和元数学的区分还不十分清晰, 所以弗兰克尔没能很好地处理某些概念的绝对性。这些不足被莫斯托夫斯基观察到和纠正。弗兰克尔-莫斯托夫斯基的方法不是用于普通的集合论, 而是用于带原子 (atoms) 的集合论。弗兰克尔-莫斯托夫斯基的方法后来被施佩克尔改进, 简称为 FMS 方法, 用于允许自反集 (reflexive sets) 存在的集合论。

需要说明原子和自反集。原子有时也被称为基本元素 (urelements), 它自身不是集合, 但可以作为集合的元素。一个集合 x 是自反的, 当且仅当, $x = \{x\}$, 即条件 $\forall y (y \in x \leftrightarrow y = x)$ 成立。自反集具有原子的性质, 并且自反集的存在矛盾于基础公理 ([15], 第 6 页)。因此, 研究允许自反集存在的集合论, 不仅涵盖了对带原子的集合论的研究, 而且可以研究允许非基集 (unfounded sets) 存在的集合论。

从 ZF 中去掉基础公理后, 由剩余的公理构成的集合论, 即为允许自反集的集合论, 记为 ZF° 。简单来说就是: $\text{ZF} = \text{ZF}^\circ + \text{基础公理}$ 。

说明: 给定 ZF, 如果我们使它允许原子, 但不允许自反集, 那么得到的集合论记为 ZFA。在 ZFA 中, 基础公理仍然是有效的, 且使用置换模型可以获得 AC 相对于 ZFA 的独立性。给定 ZF, 如果我们使它允许自反集, 那么必须去掉基础公理。在这样的情况下使用置换模型, 获得的独立性结果都是相对于 ZF° 的。关于前者的实例可参见 [3] (第 3 页), 关于后者的实例请参见 [11] (第 57–74 页)。

这里不再介绍置换模型的一般构造过程, 原因是: 作为获得独立性结果的工具, 置换模型要么不能用于纯集合构成的集合论, 要么不能用于包含基础公理的集合论, 相比之下, 在置换模型之后出现的力迫模型, 不但继承了置换模型的优点, 即对称性, 而且还克服了置换模型的不足, 应用范围十分广泛。如果读者对置换模型的构造过程有兴趣, 请参见 [11] (第 46–57 页)。

置换模型的作用。置换模型被用来获得一些公理相对于 ZF° 的独立性, 主要包括: 基础公理相对于 ZF° 的独立性; AC 相对于 ZF° 的独立性; GCH 相对于 AH 的独立性; AC 相对于库雷巴 (Kurepa) 的反链原理 (anti-chain principle) 的独立性。该反链原理是说: 每个偏序集 $\langle s, \leq \rangle$ 都有一个极大反链。借助于置换模型, 我们还可以获得基数在 ZF° 中的不可定义性。定义一个集合 x 的基数 $|x|$, 要么借助 AC, 要么借助基础公理, 在既没有 AC 也没有基础公理的情况下, 我们无法定义 x 的基数 $|x|$ 。因此, 基数在 ZF° 中是不可定义的。莱维 (A. Lévy) 和甘特 (R. J. Gaunt) 分别独立地获得了这个结果 ([11], 第 68 页)。

2.4 力迫模型

第一个力迫模型由科恩于 1963 年构造。力迫模型是一种扩张模型, 即, 构造力迫模型的过程就是构造某个给定模型的扩张模型。在力迫模型出现之前, 当通过向 ZF 的模型 $\mathfrak{M}$ 伴随新的集合 $a_0, a_1, \dots$ 对 $\mathfrak{M}$ 进行扩张时, 面临的主要困难是, 集合 a_i 自身的结构会带来一些麻烦, 例如, a_i 的内部 $\in$ 结构会摧毁替换公理。力迫模型的出现克服了这个困难。在力迫模型中, 使用力迫关系约束 a_i 的性质, 使之必须遵守 $\mathfrak{M}$ 中形成的某些条件, 通过该方式, 使得 a_i 不能带来我们不期望的麻烦。这些被伴随到 $\mathfrak{M}$ 的集合 a_i 被称为“兼纳集” (generic sets)³。如果通过力迫关系约束 a_i 的条件为有穷条件, 那么这些 a_i 被称为在 $\mathfrak{M}$ 上科恩兼纳的 (Cohen-generic)。使用“科恩兼纳”这个名字是为了纪念第一个发明有穷力迫的科恩。带实线的完美闭子集的力迫被称为萨克斯 (Sacks) 力迫, 对应的兼纳集被称为萨克斯兼纳。带博雷尔 (Borel) 集的力迫被称为索洛韦力迫, 对应的兼纳集被称为索洛韦兼纳。([11])

关于力迫模型, 国内逻辑学界研究的较多, 这里不再赘述。关于力迫模型的

³关于 generic sets 的翻译。数学词典上译为泛集, [45] 译为脱殊集, [37] 译为兼纳集, 本文采用“兼纳集”这个译法。

一个简述请参见 ([37])。关于力迫模型的详情请参见 [11] (第 78–96 页), 关于力迫和布尔值模型的结合的介绍请参见 ([45], 第 229–243 页), 其中, 该模型的名字叫脱殊模型。

下面介绍力迫模型的作用。

力迫模型被用于获得一些独立性结果。科恩证明了 AC 相对于 ZF 的独立性, 即, 如果 ZF 是一致的, 那么 $ZF + AC$ 是不一致的。方法是: $ZF + AC \vdash$ 一个集合 x 是有穷的, 当且仅当, 它是戴德金有穷的。科恩在他构造的兼纳扩张 $\mathcal{M}$ 中, 发现了一个集合既是无穷的又是戴德金有穷的, 因此, $ZF + AC$ 是不一致的。因为 GCH 蕴涵 AC, 所以 GCH 相对于 ZF 也是独立的, 即, 如果 ZF 是一致的, 那么 $ZF + GCH$ 是不一致的。科恩还证明了, 如果 ZF 是一致的, 那么 $ZF + AC + \neg CH$ 是一致的。因此, CH 相对于 $ZF + AC$ 是不一致的, 因为 GCH 蕴涵 CH, 所以 GCH 相对于 $ZF + AC$ 也是不一致的。这就获得了 GCH 相对于 AC 的独立性。以类似的方式, 科恩还证明了可构成性公理 $V = L$ 相对于 $ZF + AC + GCH$ 的独立性。

下面列举一些其它的独立性结果。([11])

BPI 相对于序原理的独立性。BPI 是布尔素理想定理, 说的是: 每个布尔代数有一个素理想。序原理 OP 为: 每个集合 x 都能被全序。序扩张原理 OE 为: 如果 x 是一个集合, 且 r 是 x 上的一个偏序, 那么存在一个线序 t 使得 $r \subseteq t$ 。在力迫模型出现之前已有 $ZF \vdash AC \rightarrow BPI \rightarrow OE \rightarrow OP$ 。马赛厄斯 (A. R. D. Mathias) 证明了: 如果 $\mathcal{M}$ 是 $ZF + V = L$ 的一个可数标准模型, 那么 $\mathcal{M}$ 能被扩张成为 $ZF + OP + \neg OE$ 的一个可数标准模型 $\mathcal{N}$ 。因此, OE 在 ZF 中独立于 OP, BPI 也在 ZF 中独立于 OP。

哈尔彭 (J. D. Halpern) 和莱维构造了模型 $\mathfrak{M}$ 的一个兼纳扩张 $\mathfrak{M}[a_0, a_1, \dots, A]$, 该扩张是 $ZF + BPI + \neg AC$ 的一个模型。因此, 他们也证明了: 如果 ZF 是一致的, 那么 AC 在 ZF 中相对于 BPI 是独立的。

相关选择公理 (axiom of dependent choices) 是说: 令 R 是集合 x 上的一个二元关系, 使得 $(\forall y \in x)(\exists z \in x)(\langle y, z \rangle \in R)$, 那么存在 x 的元素的一个可数序列 $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots (n \in \omega)$ 使得: 对所有 $n \in \omega$ 有 $\langle y_n, y_{n+1} \rangle \in R$ 。莫斯托夫斯基在 1948 年构造了一个置换模型, 证明了, 在 ZF° 中, AC 相对于相关选择公理的独立性。后来, 马雷克 (W. Marek) 将莫斯托夫斯基的置换模型翻译为一个力迫模型, 证明了, 在 ZF 中, AC 相对于相关选择公理的独立性。

利用力迫模型获得的更多的独立性结果请参见 [43]。

3 集合论的非经典模型

拓扑斯作为一种技术的创新,能对置换模型、力迫模型、布尔值模型进行重构。因此,本节先介绍布尔值模型和布尔值模型的推广,后介绍拓扑斯。

3.1 布尔值模型

使用布尔值模型描述力迫模型的思想最早由索洛韦在 1965 年提出,他使用博雷尔集作为力迫条件构造模型,并声称:力迫某个陈述的条件的组合是该陈述的‘值’。福平卡独立地发现了和索洛韦相同的观点,只是福平卡最初的呈现很简洁,所以没有引起很大关注。这两条记录来自 ([1], 第 xv–xvi 页)。([11], 第 77 页)记录道:斯科特、索洛韦和福平卡发现能把力迫理解为句子的一个布尔赋值。但费尔格纳 (U. Felgner) 的根据是斯科特在 1967 年的课堂笔记,在该笔记中,斯科特证明休恩菲尔德 (J. R. Shoenfield) 构造力迫模型的方法是布尔值模型的方法。斯科特、索洛韦、休恩菲尔德等人都是在讨论会上讨论使用布尔值模型描述力迫模型,很多结果都没有发表,只有贝尔 (J. L. Bell) 整理的笔记。因此,现在通常认为是斯科特、索洛韦、福平卡三人引入了布尔值模型。

布尔值模型的作用和力迫模型的作用是一样的,正如 ([1], 第 xvi 页)所说:“力迫和布尔值模型是相同的东西……从心理上讲,布尔值模型更加自然,但是,当面对具体的模型 (和恰当模型的构造) 时,常常不得不更加靠近力迫条件”。

关于布尔值模型的详细构造过程,参见 [1, 45]。这里只简述一下,便于介绍广义布尔值模型。布尔值模型的构造可分为三步:第一,将集合论的自然模型中的每个集合替换为它们的特征函数,这些特征函数的值域是布尔代数 2 ; 第二,用任意完全布尔代数替换布尔代数 2 作为特征函数的值域; 第三,证明第二步中获得的特征函数的类 (也被称为布尔值全域) 是集合论的模型,该模型即为布尔值模型。

布尔值模型的推广。该推广有两个方向:第一个方向是将布尔值模型由 ZF 推广到其它公理化集合论或逻辑,例如,李娜教授分别将布尔值模型推广到冯·诺依曼-贝奈斯-哥德尔集合论 (von Neumann-Bernays-Gödel axiomatic class-set theory, 即 NBG) ([35])、聚合公理系统 COG ([36])、道义逻辑 D ([39])、含有原子的集合论 ([40])、模态命题逻辑 (K 、 D 、 T 、 S_1 、 S_2 、 S_3) ([38, 42]); 第二个方向,是将布尔值模型推广到海廷代数、格、三值代数。关于第二个方向的推广将在下一节中说明。

3.2 从布尔值模型到广义代数值模型

格 + 一些限制条件 = 海廷代数; 海廷代数 + 另一些限制条件 = 布尔代数。利用完全布尔代数构造 ZFC 的布尔值模型, 可以证明连续统假设相对于 ZFC 的独立性。一种自然的想法是: 用海廷代数替换布尔代数构造模型会怎么样? 用格替换布尔代数构造模型会怎么样? 用海廷代数 H 替换布尔代数 B 构造的 V^H 是直觉主义集合论 (intuitionistic ZF) 的一个模型; 用恰当的格替换布尔代数可以得到量子集合论 (quantum set theory) 或模糊集合论 (fuzzy set theory) 的模型, 例如, [47] 和 [46] 使用格构造了模糊集合论的模型⁴。[22] 用合理蕴涵代数 (reasonable implication algebras) (这是一个三值代数) 替换布尔代数, 得到 ZF 的广义代数值模型。下面按直觉主义集合论的模型、量子集合论的模型、广义代数值模型的顺序介绍此推广过程。

1973 年, 迈希尔 (J. Myhill) 构造了基于直觉主义逻辑的集合论系统 IZF, 即直觉主义 ZF; 和 ZFC 相比, 因为直觉主义逻辑拒绝排中律, 又因为选择公理和基础公理蕴涵排中律, 所以 IZF 舍弃了选择公理和基础公理 ([26])。在使用同一语言的情况下, 从形式上看, IZF 和 ZF 有相同的外延公理、对公理、并公理、分离公理、无穷公理和幂公理; 不同的是, IZF 使用集合归纳公理模式 (axiom schema of set induction) 代替基础公理。此外, 迈希尔使用收集公理模式 (axiom schema of collection) 代替替换公理模式, 这样的行为带来的一个结果是: 有两个直觉主义 ZF, 使用替换公理模式的 IZF^1 和使用收集公理模式的 IZF^2 , IZF^2 的表达力比 IZF^1 强 ([16])。集合归纳公理模式 (简称 Ind) 和收集公理模式 (简称 Coll) 的形式如下:

$$\begin{aligned} \text{(Ind)} \quad & \forall x [\forall y \in x \phi(y) \rightarrow \phi(x)] \rightarrow \forall x \phi(x); \\ \text{(Coll)} \quad & \forall y \in x \exists z \phi \rightarrow \exists w \forall y \in x \exists z \in w \phi \quad ([16]). \end{aligned}$$

在假定排中律的情况下, Ind 等价于基础公理, Coll 等价于替换公理。1979 年, 格雷森 (R. J. Grayson) 使用海廷代数构造了 IZF 的海廷值模型 ([16])。IZF 的海廷值模型的构造过程和上节中的布尔值模型的构造过程类似, 只不过把完全布尔代数换成完全海廷代数, 这里不再赘述。

1936 年, 伯克霍夫 (G. Birkhoff) 和冯·诺依曼引入了量子逻辑 (quantum logic) ([2])。量子逻辑与经典逻辑不同, 它不同于经典逻辑的公理系统, 它只是量子物理理论的一种逻辑结构, 可被视为一个希尔伯特空间 (Hilbert space) 的所有封闭线性子空间 (closed linear subspaces) 的格。因为量子逻辑是格, 所以, 基于量子逻辑构造量子集合论 (quantum set theory) 的工作, 实际上是使用量子逻辑构造集合的格值全域。构造格值全域的过程类似于布尔值全域的构造过程, 这项

⁴[47] 和 [46] 将 “fuzzy” 译为 “弗晰”, 在本文中译为 “模糊”。

工作于 1981 年由竹内外史 (G. Takeuti) 完成, 详情参见 ([29]), 类似的工作还有 ([30])。2009 年, 小泽正直 (M. Ozawa) 为量子集合论构造了格值模型 ([27])。小泽正直的工作实际上是将竹内外史的格值全域推广到正交模格 (orthomodular lattice), 即, 使用正交模格代替竹内外史使用的量子逻辑构造格值全域。

[22] 构造 ZF 的广义代数值模型的基本思路是: 第一, 给出蕴涵代数的定义, 蕴涵代数是一种否定自由代数 (即不包含否定运算的代数), 且讨论了蕴涵代数的两个性质, 即合理性和蕴涵性, 并给出蕴涵代数的一个例子 PS_3 , PS_3 是合理的且演绎的; 第二, 介绍如何构造模型 V^A , 其中 A 是蕴涵代数, 如果 A 是合理的且演绎的, 那么除基础公理外, ZF 的其它公理或公理模式在 V^A 中有效; 第三, 使用 PS_3 构造模型 V^{PS_3} , 基础公理在 V^{PS_3} 中是有效的, 可证地, V^{PS_3} 是 ZF 的模型 (关于该模型的详情请参见 [22])。

3.3 拓扑斯

拓扑斯在逻辑中的应用分为两个方面: 一方面, 拓扑斯与逻辑中的“理论”对应, 拓扑斯可以在逻辑中被形式化为 (带完全概括公理的) 直觉主义类型论 (intuitionistic type theory (with the full comprehension axiom)); 另一方面, 拓扑斯可以为集合论提供模型。本文不介绍拓扑斯的定义, 关于拓扑斯的定义请参见 ([44]) 和 ([1], 第 175 页)。下面将根据这两个方面来介绍拓扑斯在逻辑中的应用。

[12] (第 1054 页) 引用了劳威尔 (F. W. Lawvere) 的一句话——“以对象范畴形式呈现的拓扑斯概括了‘高阶逻辑’的本质”。在这篇文章中, 富尔曼在拓扑斯和逻辑理论之间建立了一种对应, 并将这种对应形式化。和其它人所做的形式化相比, 富尔曼的形式化引入了一个新的存在谓词 (existence predicate), 这使得我们能以通常的方式在拓扑斯中使用变元。([19]) 是关于逻辑和范畴论的关系的一篇清晰且简洁的调查。富尔曼希望自己所呈现的拓扑斯对于逻辑学家来说是可及的, 他希望逻辑学家能更多地利用由格罗滕迪克 (Grothendieck) 和他的合作者所提供的模型, 而这也正是下面将要介绍的。

拓扑斯为集合论提供模型, 并非像经典模型一样能被用于获取新的结果, 而只是作为一种技术上的创新对已有的集合论模型进行重构。到目前为止, 我们可将这种重构的过程分为四个阶段。第一个阶段, 劳威尔提出了范畴论公理化的集合论 (category-theoretic axiomatizations of set theory), [24] 研究了它和传统公理化集合论在模型方面的异同。第二个阶段, 拓扑斯能够统一地处理置换模型、力迫模型、布尔值模型、模型的对称性, 详情参见 [13]、[14] 和 [3]。第三个阶段, 布尔值模型 $\Leftrightarrow$ 完全拓扑斯。对允许原子的每个布尔值模型, 都存在一个表示它的最小完全拓扑斯, 最小完全拓扑斯是一个格罗滕迪克拓扑斯, 并且, 在这个布尔值

模型中, 该最小完全拓扑斯能被描述; 反之, 每个允许原子的布尔值模型都能从表示它的最小完全拓扑斯中被重构 (详情参见 [4])。第四个阶段, [23] 给出了直觉主义集合论的范畴模型的一个非常一般的构成。

拓扑斯概念的引入, 使得我们有一种新的技术构造集合论的模型, 这不仅体现在为 ZF 构造模型, 更进一步地, 我们能使用拓扑斯为基于非经典逻辑的集合论提供模型。与此同时, 拓扑斯对已有模型的重构, 也为我们提供了一个新的角度去考察已有的模型, 从而发现它们之间的潜在联系。

4 弗协调集合论的模型

梳理经典集合论的模型只是一个出发点, 我们的落脚点是弗协调集合论构造模型。在本节, 我们讨论如何构造弗协调集合论的广义代数值模型, 并说明我们的模型适用于目前所有基于形式不一致逻辑的弗协调 ZF 集合论。

4.1 弗协调集合论

弗协调集合论是基于弗协调逻辑构造的集合论, 换言之, 是将公理化集合论的底层逻辑替换为弗协调逻辑。基于不同的弗协调逻辑, 我们可以构造不同的弗协调集合论。目前已有的弗协调集合论基于三种弗协调逻辑: 形式不一致逻辑 (logics of formal inconsistency)、相干逻辑、多值逻辑。基于形式不一致逻辑的弗协调集合论包括科斯塔 (N. C. A. da Costa) 的 ZF_n 系统、卡埃罗 (R. da C. Caiero) 和苏萨 (E. G. de Souza) 的 ML_1 系统、卡尔涅利 (W. Carnielli) 和科尼利奥 (M. E. Coniglio) 的 $ZFCil$ 系统, 其中, ML_1 系统是基于蒯因 (Quine) 的 NF 集合论构造的, ZF_n 系统是基于丘奇 (A. Church) 的 CHU 系统构造的, $ZFCil$ 系统是基于 ZF 集合论构造的。关于弗协调逻辑和弗协调集合论的介绍参见 ([41])。

形式不一致逻辑的特征是, 通过弱化否定使得 ‘ $\{\neg A, A\} \models B$ ’ 不成立, 其中, $\models$ 既指语法后承也指语义后承; 典型系统是科斯塔的 C 系统, 关于 C 系统的详细介绍参见 [48] (第 1–50 页)。这导致在形式不一致逻辑中通常有两种否定: 一种是弱否定 $\neg$, 这种弱否定是初始符号; 另一种是强否定 $\sim$, 这种否定通常是被定义符号, 从语法形式上看, 强否定等价于经典逻辑中的否定。通常情况下, 形式不一致逻辑包含经典逻辑, 即, 如果把经典逻辑的否定等同于强否定, 那么经典逻辑的定理都是形式不一致逻辑的定理。在形式不一致逻辑中, 任意形如 $(\varphi \wedge \neg \varphi)$ 的矛盾式都不是定理, 这说明: 形式不一致逻辑自身不包含矛盾, 但在形式不一致逻辑中, 我们可以把矛盾作为前提来研究它的后承。

从形式不一致逻辑出发构造弗协调 ZF 时, 一个核心的问题是集合公理 (关于集合的公理, 下同) 应该使用哪种否定。在 ZF 的集合公理中, 使用否定的只有空

集公理和基础公理。如果空集公理使用的是强否定, 那么产生的空集和经典集合论中的空集相同, 是真的“空”, 即, 没有元素隶属于该空集; 如果空集公理使用的是弱否定, 那么产生的空集不是真的“空”, 即, 可能有元素隶属于该空集。如果基础公理使用的是强否定, 那么它能保证弗协调 ZF 中的集合都是良基的, 即, 没有循环集; 如果基础公理使用的是弱否定, 那么它不能保证弗协调 ZF 中的集合都是良基的, 即, 可能存在循环集, 例如 $\{x \mid x \in x\}$ 。这些情形都会影响到模型的构造。

如果一个集合 x 满足 $x \in x$ 或者 $x \neq x$, 那么它不是一致的, 其中, $\neq$ 使用的否定是弱否定。ZF 中的集合都是一致的。在一个基于形式不一致逻辑的弗协调 ZF 中, 如果集合公理使用的都是强否定, 那么在该集合论中不存在不是一致的集合, 这是因为: 集合论中的集合要么由空集出发使用对、并、无穷、幂运算得到, 要么从已有集合出发借助某个定理从分离公理或替换公理得到; 使用强否定的空集是一致的, 从一致集合出发使用对、并、无穷、幂运算生成的集合也是一致的; 任意矛盾式都不是形式不一致逻辑的定理, 这使得我们无法从一致集合出发使用矛盾式获得不是一致的集合。

科斯塔的 ZF_n 系统的集合公理使用的是强否定, 尽管科斯塔声称在 ZF_n 系统中存在全域集, 但是, 全域集的存在不是弗协调逻辑的功劳, 而是因为 ZF_n 系统的集合公理是丘奇的 CHU 系统的集合公理, CHU 自身就带有全域集; 如果我们将 ZF_n 系统的集合公理替换为标准 ZF 的集合公理, 那么 ZF_n 系统中的集合都是一致的。此后, 当我们提及 ZF_n 系统, 指的是它的集合公理是标准 ZF 的集合公理。卡尔涅利和科尼利奥的 $ZFCil$ 系统的集合公理使用的也是强否定, 不同的是, 和 ZF 相比, $ZFCil$ 多了一个反外延公理, 该公理的形式为 $\forall x \forall y (x \neq y \leftrightarrow (\exists z (z \in x \wedge z \notin y) \vee \exists z (z \notin x \wedge z \in y)))$, 该公理中的否定为弱否定, 但是, 该公理是一个双向条件式, 借助它并不能生成新集合。因此, 上述所有基于形式不一致逻辑的弗协调 ZF 的集合都是一致的。

4.2 广义代数值模型的推广

到目前为止, 关于弗协调集合论的模型, 典型的成果是李伯特 (T. Libert) 为基于 pac 的弗协调朴素集合论构造的一种拓扑模型, 详情参见 ([20, 21])。这个领域的研究单薄, 正如卡尔涅利和科尼利奥在 2013 年构造 $ZFCil$ 系统时所说的那样: “关于这个问题, 我们只能谈一些初步的想法, 并且意识到存在大量的工作要做, 在这里, 我们只是触及了这个问题的表面” ([7])。2015 年, 洛维和塔拉法德为 ZF 构造广义代数值模型时, 曾设想他们的技术可以为不包含罗素集的弗协调集合论提供模型 ([22])。我们在此处的工作是为了实现他们的设想, 为基于形式不一致逻辑的弗协调 ZF 构造广义代数值模型。

我们在 4.1 中花费大量的篇幅说明 ZF_n 系统和 $ZFCil$ 系统不包含不一致的集合, 这是为了契合广义代数值模型的特点。广义代数值模型是布尔值模型的推广, 是使用广义代数替换布尔代数构造的模型; 但它们的基本结构是一样的, 即从空集出发借助超穷递归构造的一个分层结构。这个结构本身是良基的, 在其中不存在循环集, 这就要求弗协调集合论不应当包含满足 $x \in x$ 的集合。广义代数值模型使用的广义代数对于集合是没有限制的, 因为在布尔值模型和布尔值模型的推广中, 布尔代数和其它的代数都只服务于逻辑联结词的解释, 对于谓词的解释没有影响; 因此, 使用广义代数替换布尔代数并不会改变模型的基本结构。

为弗协调 ZF 构造广义代数值模型的关键是定义广义代数。广义代数是添加了算子的完全有界格。完全有界格形如 $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$; 广义代数形如 $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1, * \rangle$, 其中, $*$ 表示添加的算子; 关于完全有界格参见 ([1], 第 2 页)。我们需要观察弗协调 ZF 使用的弗协调逻辑有几个初始逻辑联结词, 初始逻辑联结词的数目就是被添加的算子的数目。 ZF_n 系统有四个初始逻辑联结词, 分别是否定 $\neg$ 、蕴涵 $\rightarrow$ 、合取 $\wedge$ 、析取 $\vee$; $ZFCil$ 系统有五个初始逻辑联结词, 分别是否定 $\neg$ 、蕴涵 $\rightarrow$ 、合取 $\wedge$ 、析取 $\vee$ 、一致性 $\circ$ 。在经典集合论的布尔值模型中, 我们将合取和析取分别解释为布尔代数中的交运算和并运算, 即完全有界格 $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 中的 $\wedge$ 和 $\vee$; 但是, 在弗协调 ZF 的情形中, 这不一定行得通, 因为弗协调逻辑的合取和析取的真值函数不一定符合完全有界格的交运算和并运算。这就是为什么我们要根据弗协调逻辑的初始逻辑联结词的数目向广义代数中添加相等数目的算子。

在形式不一致逻辑中, 对任意句子 φ , 它的真假和它的否定 $\neg\varphi$ 的真假是相互独立的, 遵循一个句子和它的否定可以同真但不能同假的原则, 可能有三种情形: φ 真且 $\neg\varphi$ 假; φ 真且 $\neg\varphi$ 真; φ 假且 $\neg\varphi$ 真。因此, 我们需要的广义代数的偏序集中至少要有三个元素, 不妨记为 1、i、0, 分别对应于句子 φ 的真假的三种情形。因此, 我们得到否定的真值表。

φ	$\neg\varphi$
1	0
i	i
0	1

形式不一致逻辑只是弱化了否定, 并没有修改其它的逻辑联结词, 因此, 关于蕴涵 $\rightarrow$ 、合取 $\wedge$ 、析取 $\vee$, 它们的真值表仍然遵循经典逻辑中的一些原则: 关于蕴涵, 一个蕴涵式为真, 当且仅当, 前件为假或者后件为真; 关于合取式, 一个合取式为真, 当且仅当, 它的两个合取肢都为真; 关于析取式, 一个析取式为真, 当且仅当, 它有一个析取肢为真。它们的真值表如下。

$\rightarrow$	1	i	0
1	1	i	0
i	1	i	0
0	1	1	1

$\wedge$	1	i	0
1	1	1	0
i	1	1	0
0	0	0	0

$\vee$	1	i	0
1	1	i	1
i	i	i	i
0	1	i	0

容易看出, 当我们从这三个真值表中删除与 i 有关的行和列之后, 剩余部分恰是经典逻辑的蕴涵、合取、析取的真值表。至此, 一个可能的问题是: 为什么 $\rightarrow$ 和 $\vee$ 的真值表的值中有 i 而 $\wedge$ 的真值表的值中只有 0 和 1? 在形式不一致逻辑中, 弱否定是一个内涵联结词, 作为真值函数, 它是一个内涵算子, 这使得 φ 和 $\neg\varphi$ 的真假是相互独立的, 即使我们知道 φ 是真的, 也不能确定 $\neg\varphi$ 是真是假; 因此, 即使知道 φ 是真的, 也不能确定 φ 的真值是 1 还是 i 。因此, 关于蕴涵、合取、析取, 在它们的真值表中与 i 有关的行和列中, 我们只能确定 φ 是真是假, 当 φ 为真时, 我们不能确定 φ 的真值是 1 还是 i , 可以任意指定 1 和 i ; 因为蕴涵、合取、析取都是初始联结词, 所以, 任意指定 1 和 i 不会在它们之间产生干扰。因此, 在合取的真值表中, 我们将合取式为真的情形全部指定为 1。我们是故意这么做的, 原因将在下文中说明。注意, 本段中所说的真和假分别指的是模型有效和模型无效。

ZFCil 系统中还有一个初始联结词 $\circ$, 它表示一致性, 即: 当 φ 真 $\neg\varphi$ 假或者 φ 假 $\neg\varphi$ 真时, $\circ\varphi$ 为真; 当 φ 真 $\neg\varphi$ 真时, $\circ\varphi$ 为假。因此, $\circ$ 的真值表如下。

φ	$\circ\varphi$
1	1
i	0
0	1

注意, 本段中所说的真和假分别指的是模型有效和模型无效。至此, 我们给出了 ZF_n 系统和 ZFCil 系统的初始联结词的真值表。下面我们定义广义代数。

我们需要的广义代数形如 $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1, \neg^A, \rightarrow^A, \wedge^A, \vee^A, \circ^A \rangle$, 其中, $\neg^A$ 、 $\rightarrow^A$ 、 $\wedge^A$ 、 $\vee^A$ 、 $\circ^A$ 是我们添加到完全有界格中的算子, 它们将在赋值函数中用来解释否定、蕴涵、合取、析取、一致性。关于这个广义代数, A 是一个偏序集, 它是集合 $\{0, i, 1\}$, 它的序为 $0 \leq i \leq 1$, $\wedge$ 和 $\vee$ 分别是格上的交运算和并运算, 0 和 1 分别是它的底元素和顶元素, $\neg^A$ 、 $\rightarrow^A$ 、 $\wedge^A$ 、 $\vee^A$ 、 $\circ^A$ 的运算规则分别对应于上面给出的否定、蕴涵、合取、析取、一致性的真值表。至此, 我们完成了对广义代数的定义。有了广义代数, 我们可以构造出模型的全域 V^L , 构造方法和构造布尔值全域的方法相同, 其中, $L = \langle A, \wedge, \vee, 0, 1, \neg^A, \rightarrow^A, \wedge^A, \vee^A, \circ^A \rangle$ 。类似于布尔值全域的情形, 在全域 V^L 中, 我们可以使用广义归纳法。下面定义赋值函数。

我们使用符号 $\llbracket \bullet \rrbracket$ 表示赋值函数, 其中, $\bullet$ 是一个占位符, 没有意义; 因此,

对任意句子 φ , $\llbracket \varphi \rrbracket$ 是它的真值。关于原子公式, 除了形如 $x \in y$ 和 $x = y$ 的原子公式之外, ZFCil 系统还引入了两个新的谓词, 零元谓词 $\perp$ 和一元谓词 C , $C(x)$ 表示集合 x 是一致的。我们使用 x, y, u, v 表示全域 V^L 中的任意元素, 使用 φ 和 ψ 表示任意公式, 给出公式的赋值函数如下:

$$\begin{aligned}
 \llbracket \perp \rrbracket &= 0 \\
 \llbracket x \in y \rrbracket &= \left(\bigvee_{u \in \text{dom}(y)} (y(u) \wedge \llbracket u = x \rrbracket) \right) \wedge^A \left(\bigvee_{u \in \text{dom}(y)} (y(u) \wedge \llbracket u = x \rrbracket) \right) \\
 \llbracket x = y \rrbracket &= \left(\bigwedge_{u \in \text{dom}(x)} (x(u) \rightarrow^A \llbracket u \in y \rrbracket) \right) \wedge \left(\bigwedge_{v \in \text{dom}(y)} (y(v) \rightarrow^A \llbracket v \in x \rrbracket) \right) \\
 \llbracket C(x) \rrbracket &= \bigwedge_{u \in \text{dom}(x)} (x(u) \rightarrow^A \llbracket C(u) \rrbracket) \\
 \llbracket \neg \varphi \rrbracket &= \neg^A \llbracket \varphi \rrbracket \\
 \llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket &= \llbracket \varphi \rrbracket \rightarrow^A \llbracket \psi \rrbracket \\
 \llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket &= \llbracket \varphi \rrbracket \wedge^A \llbracket \psi \rrbracket \\
 \llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket &= \llbracket \varphi \rrbracket \vee^A \llbracket \psi \rrbracket \\
 \llbracket \circ \varphi \rrbracket &= \circ^A \llbracket \varphi \rrbracket \\
 \llbracket \forall x \varphi(x) \rrbracket &= \bigwedge_{u \in \text{dom}(x)} (\llbracket \varphi(u) \rrbracket) \\
 \llbracket \exists x \varphi(x) \rrbracket &= \bigvee_{u \in \text{dom}(y)} (\llbracket \varphi(u) \rrbracket)
 \end{aligned}$$

说明: 我们这里给出的赋值函数和 ZF 情形中的赋值函数有两点不同: 第一, 关于 $\llbracket x \in y \rrbracket$, 在 ZF 的情形中, $\llbracket x \in y \rrbracket = (\bigvee_{u \in \text{dom}(y)} (y(u) \wedge \llbracket u = x \rrbracket))$, 而在这里, 我们使用算子 $\wedge^A$ 对 $(\bigvee_{u \in \text{dom}(y)} (y(u) \wedge \llbracket u = x \rrbracket))$ 施加了一次自反运算; 第二, 关于 $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket$ 和 $\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket$, 在 ZF 情形中, $\wedge$ 和 $\vee$ 分别被解释为广义代数中的交运算 $\wedge$ 和并运算 $\vee$, 而在这里, 我们将它们分别解释为算子 $\wedge^A$ 和 $\vee^A$ 。至此, 我们给出了模型中的赋值函数。下面定义模型有效性。

关于模型有效性, 我们只需要给出真值的指定集就可以了。根据广义代数值模型的构造规则, 真值的指定集必须是偏序集 A 的一个滤子。我们给出的真值的指定集是 $\{i, 1\}$, 它是偏序集 A 的滤子; 因此, 对任意公式 φ , φ 是模型有效的, 当且仅当, $\llbracket \varphi \rrbracket \in \{i, 1\}$ 。

至此, 我们定义了广义代数 L , 定义了全域 V^L , 定义了赋值函数, 定义了模型有效性。使用我们给出的这些材料, 遵循洛维和塔拉法德为 ZF 构造广义代数值模型的步骤顺序, 弗协调 ZF 的广义代数值模型能够被构造出来。

4.3 一些说明

为弗协调集合论构造模型时, 相等关系 $=$ 是比较难处理的, 在弗协调一阶逻辑中, 一般要求相等关系 $=$ 满足自反性 (即 $x = x$) 和代入自由 (也叫莱布尼兹公理, 即 $(x = y) \rightarrow (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y))$)。在经典逻辑的情形中, 这些要求很容易满足, 因为经典逻辑的联结词都是外延的; 然而, 在形式不一致逻辑中, 逻辑联结词否定 $\neg$ 是内涵的, 这使得在否定 $\neg$ 的辖域中不能进行等值替换, 因而不能满足代入自由。但是, 我们发现, 当 $\llbracket x = y \rrbracket = 1$ 时, 满足代入自由, 当 $\llbracket x = y \rrbracket = i$ 时, 不满足代入自由, 因此, 这就迫使我们的广义代数值模型必须满足: 对全域 V^L 中的任意元素 x 都有 $\llbracket x = x \rrbracket = 1$ 。为了满足这个要求, 我们令初始逻辑联结词 $\wedge$ 的真值表中不包含 i , 只包含 0 和 1; 同时, 我们定义的原子公式 $x \in y$ 的赋值函数也与经典逻辑的情形不同, 借助了算子 $\wedge^A$ 。经过这样的修改, 原子公式 $x \in y$ 的真值 $\llbracket x \in y \rrbracket$ 只能是 0 或 1; 进而, 因为 $\llbracket x = y \rrbracket$ 是借助 $\in$ 而定义的, 所以, $\llbracket x = y \rrbracket$ 也只能是 0 或 1; 在这种情形下, 相等关系 $=$ 的自反性和代入自由就被满足了。

在洛维和塔拉法德为 ZF 构造的广义代数值模型中, 他们使用的广义代数满足合理性和演绎性, 这两个性质极大地方便了 ZF 的公理的模型有效性证明; 然而, 在我们为弗协调 ZF 构造的广义代数值模型中, 我们定义的广义代数不满足合理性, 这增加了公理的模型有效性证明的复杂程度, 一种比较原始的方法是: 像使用真值表证明逻辑定理的有效性一样, 依次验证弗协调 ZF 的每个公理是模型有效的。

我们的方法还可适用于将来可能出现的弗协调 ZF 集合论, 要求是: 这些集合论不能承诺那些不是一致的集合的存在, 即不能包含像 $\{x \mid x \in x\}$ 或 $\{x \mid x \neq x\}$ 这样的集合; 这个要求也恰恰体现了广义代数值模型的局限性, 即, 它不能为弗协调朴素集合论提供模型。对于弗协调 ZF 集合论, 不管它们的底层逻辑是何种形式的形式不一致逻辑, 通过调整蕴涵、合取、析取的真值表中与 i 有关的行和列中的值, 我们都可以构造出适应这些集合论的模型。

5 结语

我们梳理了近百年以来人们为经典集合论构造的各种重要模型, 目的是为了寻找合适的模型构造技术为基于哲学逻辑的集合论构造模型; 特殊地, 为弗协调集合论构造模型。我们根据洛维和塔拉法德为 ZF 构造的广义代数值模型的思路, 为基于形式不一致逻辑的弗协调 ZF 构造了广义代数值模型, 并指出我们的广义代数值模型具有一定的普遍性。

经典集合论的模型大多被用于研究某些公设 (例如 AC 和 GCH) 相对于经典

集合论的一致性或独立性；相比之下，弗协调集合论的情形则不同，弗协调集合论的模型主要用于证明弗协调集合论的非平凡性，即，在弗协调集合论的语言中，存在某个句子 φ 使得 φ 是模型无效的。AC 和 GCH 的独立性和一致性在弗协调集合论的情形中不一定是个问题，例如，从 2010 年到 2012 年，韦伯 (Z. Weber) 构造了一个弗协调朴素集合论，并证明了：AC 是该集合论的一条定理，GCH 在该集合论中是不成立的（即，可证伪的）([33, 34])。但是，韦伯的弗协调朴素集合论缺乏模型。

广义代数值模型有它的局限性，它不能为承诺了不一致集合的弗协调集合论提供模型，例如弗协调朴素集合论。2003 年到 2005 年，李伯特使用拓扑为基于 *pac* 的弗协调朴素集合论构造了模型，他的模型包含不是一致的集合。在未来的工作中，我们将致力于借助拓扑斯为弗协调集合论、模态集合论、弗协调模态集合论构造模型。

参考文献

- [1] J. L. Bell, 2005, *Set Theory: Boolean-valued Models and Independence Proofs*, UK: Oxford University Press.
- [2] G. Birkhoff and J. von Neumann, 1936, "The logic of quantum mechanics", *Annals of Mathematics*, **37**(4): 823–843.
- [3] A. Blass and A. Scedrov, 1989, *Freyd's Models for the Independence of the Axiom of Choice*, American Mathematical Society.
- [4] A. Blass and A. Scedrov, 1992, "Complete topoi representing models of set theory", *Annals of Pure and Applied Logic*, **57**(1): 1–26.
- [5] L. Bukovsky, 1972, "Models of set theory with axiom of constructibility which contain non-constructible sets", *Institute for Information Transmission Problems*, **20**(12): 95.
- [6] E. I. Bunina and V. K. Zakharov, 2007, "Formula-inaccessible cardinals and a characterization of all natural models of Zermelo-Fraenkel set theory", *Izvestiya: Mathematics*, **71**(2): 219.
- [7] W. Carnielli and M. E. Coniglio, 2013, "Paraconsistent set theory by predicating on consistency", *Journal of Logic and Computation*, **26**(1): 97–116.
- [8] P. J. Cohen, 1963, "A minimal model for set theory", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **69**(4): 537–540.
- [9] R. H. Cowen, 1976, "Elementary equivalence and constructible models of Zermelo-Fraenkel set theory", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **22**(1): 333–338.
- [10] A. Dodd, 1982, *The Core Model*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [11] U. Felgner, 1971, *Models of ZF-Set Theory*, New York: Springer Verlag.
- [12] M. P. Fourman, 1977, "The logic of topoi", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, **90**: 1053–1090.

- [13] M. P. Fourman, 1980, “Sheaf models for set theory”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **19**: 91–101.
- [14] P. Freyd, 1987, “All topoi are localic or why permutation models prevail”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **46(1)**: 49–58.
- [15] K. Godel, 1940, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-hypothesis with the Axioms of Set Theory*, New Jersey: Princeton University Press.
- [16] R. Grayson, 1979, “Heyting-valued models for intuitionistic set theory”, *Applications of Sheaves*: 402–414.
- [17] R. B. Jensen, 1972, “The fine structure of the constructible hierarchy”, *Annals of Mathematical Logic*, **4(3)**: 229–308.
- [18] R. B. Jensen and A. Prestel, 1981, *Set Theory and Model Theory*, Springer-verlag.
- [19] J. Lambek, 1989, “On some connections between logic and category theory”, *Studia Logica*, **48(3)**: 269–278.
- [20] T. Libert, 2003, “ZF and the axiom of choice in some paraconsistent set theories”, *Logic and Logical Philosophy*, **(11)**: 91–114.
- [21] T. Libert, 2005, “Models for a paraconsistent set theory”, *Journal of Applied Logic*, **3(1)**: 15–41.
- [22] B. Lowe and S. Tarafder, 2015, “Generalized algebra-valued models of set theory”, *Review of Symbolic Logic*, **8(1)**: 192–205.
- [23] S. Maschio and T. Streicher, 2015, “Models of intuitionistic set theory in subtoposes of nested realizability toposes”, *Annals of Pure and Applied Logic*, **166(6)**: 729–739.
- [24] W. Mitchell, 1972, “Boolean topoi and the theory of sets”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **2(3)**: 261–274.
- [25] R. Montague and R. L. Vaught, 1959, “Natural models of set theories”, **47(2)**: 219–242.
- [26] J. Myhill, 1973, “Some properties of intuitionistic Zermelo-Fraenkel set theory”, *Proceedings of the 1971 Cambridge Summer School in Mathematical Logic (Lecture Notes in Mathematics volume.337)*, pp. 206–231, Cambridge: Springer.
- [27] M. Ozawa, 2009, “Orthomodular-valued models for quantum set theory”, *Physics*, **(8)**: 1–27.
- [28] B. Scarpellini, 1966, “On a family of models of zermelo-Fraenkel set theory”, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **12(1)**: 191–204.
- [29] G. Takeuti, 1981, “In qunatum set theory”, in E. Beltrametti and B. C. van Frassen (eds.), *Current Issues in Quantum Logic*, pp. 303–322, New York: Plenum.
- [30] S. Titani, 1999, “A lattice-valued set theory”, *Archive for Mathematical Logic*, **38(6)**: 395–421.
- [31] J. Vickers and P. D. Welch, 2001, “On elementary embeddings from an inner model to the universe”, *The Journal of Symbolic Logic*, **66(3)**: 1090–1116.
- [32] P. Vopenka and P. Hajek, 1967, “Concerning the nabla-models of set theory”, *Bull. acad. polon. sci. ser. sci. math. astronom. phys.*, **15**: 113–117.
- [33] Z. Weber, 2010, “Transfinite numbers in paraconsistent set theory”, *Review of Symbolic Logic*, **3(1)**: 71–92.

- [34] Z. Weber, 2012, "Transfinite cardinals in paraconsistent set theory", *Review of Symbolic Logic*, **5(2)**: 269–293.
- [35] 李娜, "公理系统 GB 的布尔值模型", 河南大学学报 (自然科学版), 1989 年第 4 期, 第 53–57 页。
- [36] 李娜, "聚合公理系统 COG 的布尔值模型", 河南大学学报 (自然科学版), 1993 年第 2 期, 第 39–42 页。
- [37] 李娜, "20 世纪集合论的主要方法", 中山大学学报论丛, 2000 年第 2 期, 第 20–24 页。
- [38] 李娜, "关于模态命题系统的一种布尔值模型", 南京大学学报 (数学半年刊), 2001 年第 1 期, 第 109–113 页。
- [39] 李娜, "道义逻辑 D——系统的一种布尔值模型", 河南大学学报 (自然科学版), 2002 年第 2 期, 第 10–13 页。
- [40] 李娜, 集合论含有原子的自然模型和布尔值模型, 2011 年, 北京: 北京师范大学出版社。
- [41] 李娜, 何建锋, "一种处理集合论悖论的新方法", 哲学动态, 2017 年第 11 期, 第 93–98 页。
- [42] 李娜, 李季, "严格蕴涵系统 S3 的协调性", 南京大学学报 (数学半年刊), 2005 年第 1 期, 第 23–27 页。
- [43] 李娜, 王中明, "公理集合论在现代数学发展中的作用", 自然辩证法研究, 1996 年第 1 期, 第 37–38 页。
- [44] 孟晓青, "Topos 理论简介", 数学进展, 1992 年第 1 期, 第 1–24 页。
- [45] 张宏裕, 公理化集合论, 2000 年, 天津: 天津科学技术出版社。
- [46] 张锦文, "一类格值集合模型", 华中工学院学报, 1980 年第 1 期, 第 17–26 页。
- [47] 张锦文, "正规弗晰集合结构与布尔值模型", 华中工学院学报, 1979 年第 2 期, 第 1–7 页。
- [48] 张清宇, 弗协调逻辑, 2003 年, 北京: 中国社会出版社。

(责任编辑: 罗心澄)

On the Models of Set Theory

Na Li Jianfeng He

Abstract

In this paper, the classical and non-classical models of ZF are discussed, their latest developments are summarized, and the generalized algebra-valued model of ZF is generalized to the paraconsistent set theories based on the logics of formal inconsistency. The key of this generalization process is to solve two problems: first, whether this kind of paraconsistent set theory contains inconsistent sets; second, how to deal with equality relation $=$ in the model so that it can satisfy Leibniz axiom. In addition, the generalized algebra-valued model constructed in this paper has certain generalizability.

Na Li School of Philosophy, Nankai University
linawii@nankai.edu.cn

Jianfeng He School of Philosophy, Nankai University
hejianfeng2016@outlook.com