逻辑学研究 2023 年第 5 期，69–80
文章编号：1674-3202(2023)-05-0069-12

非正规模态逻辑 C2 的时态扩张

涂保勋

摘 要：本文构建了非正规时态逻辑 C2t 的矢列演算 GC2t。运用高野道夫（M. Takana）的语义方法证明了 GC2t 的子公式性质，进而证明了 GC2t 的有穷模型性和可判定性。另外，本文还证明了 GC2t 的插值性质。

关键词：非正规模态逻辑；子公式性质；有穷模型性；插值性质

中图分类号：B81 **文献标识码：**A

1 引言

正规模态逻辑 S5 的根岑式矢列演算通常不具有子公式性质。运用语义的方法，高野道夫（M. Takana）在 [0] 中证明了，如果一个矢列可证，那么存在一个推导使得推导中的所有公式都是该矢列中公式的子公式，即证明了 S5 的子公式性质。高野道夫在 [0] 中评论说，运用同样的方法可以证明基本时态逻辑 Kt 的子公式性质。模态逻辑 K4 的时态扩张的子公式性质证明参见 [0]。

非正规模态逻辑系统 C2 由雷蒙（E. J. Lemmon）在 [0] 中给出，该系统由命题逻辑的重言式，公理 $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ 和以下两个规则组成：

$$\mathrm{R1}: \quad \frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi} \qquad\qquad \mathrm{R2}: \quad \frac{\varphi \to \psi}{\Box\varphi \to \Box\psi}$$

在关系语义和代数语义下，该系统的完全性和有穷模型性被证明，雷蒙评论 C2 的结论可以扩张到其他逻辑。在 [0] 中，C2 被时态化为 C2t，C2t 的可靠性和完全性得到证明。另外，C2t 的加标矢列演算被给出，该演算的可靠性和完全性得到证明。然而在此文章中，C2t 的有穷模型性和可判定性问题没有得到证明。本文将构建 C2t 的根岑式矢列演算，运用高野道夫的语义方法证明 C2t 的子公式性质，进而证明 C2t 的有穷模型性和可判定性。另外，本文还将证明 C2t 的插值性质。

本文的结构如下。第二部分介绍非正规逻辑 C2t 的语型和语义。第三部分给出 C2t 的矢列演算 GC2t。第四部分证明 GC2t 的子公式性质，有穷模型性和可判定性。第 5 部分证明 GC2t 的插值性质。

收稿日期：2021-03-26
作者信息：涂保勋 中山大学逻辑与认知研究所
中山大学哲学系
tubaoxun2015@163.com

2 句法和语义

定义 2.1. 令 $Prop$ 是命题变元的无穷集合，公式集 $\mathcal{L}$ 递归定义如下：

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid (\varphi_1 \vee \varphi_2) \mid (\varphi_1 \to \varphi_2) \mid \Box\varphi \mid \blacksquare\varphi$$

其中 $p \in Prop$。定义 $\neg\varphi := \varphi \to \bot$，$\top := \bot \to \bot$，$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$。$\Diamond\varphi$ 的对偶定义为 $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$。$\blacklozenge\varphi$ 的对偶定义为 $\blacklozenge\varphi := \neg\blacksquare\neg\varphi$。

定义 2.2. 一个正则框架是一个四元组 $\mathfrak{F} = (W, N, R_F, R_P)$，其中 W 是非空集，$N \subseteq W$ 是正规时间点（世界）的集合，R_F 和 R_P 是 W 上满足以下条件的二元关系：

$$\text{对所有 } w, u \in N\text{，} R_F wu \text{ 当且仅当 } R_P uw\text{。}$$

一个正则模型是一个二元组 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$，其中 $\mathfrak{F}$ 是正则框架，$V : Prop \to \wp(W)$ 是一个赋值函数。

定义 2.3. 给定一个公式 $\varphi \in \mathcal{L}$，一个正则模型 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$，和一个点 $w \in W$，公式 φ 在 w 上真（记为 $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$）递归定义如下：

$\mathfrak{M}, w \vDash p$ 当且仅当 $w \in V(p)$，其中 $p \in Prop$，

$\mathfrak{M}, w \nvDash \bot$，

$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \wedge \psi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$ 并且 $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$，

$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \vee \psi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$ 或者 $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$，

$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \to \psi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}, w \nvDash \varphi$ 或者 $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$，

$\mathfrak{M}, w \vDash \Box\varphi$ 当且仅当 $w \in N$ 并且 $\forall u \in W(R_F wu \Rightarrow \mathfrak{M}, u \vDash \varphi)$，

$\mathfrak{M}, w \vDash \blacksquare\varphi$ 当且仅当 $w \in N$ 并且 $\forall u \in W(R_P wu \Rightarrow \mathfrak{M}, u \vDash \varphi)$。

特别地，$\mathfrak{M}, w \vDash \Box\top$ 当且仅当 $w \in N$。$\mathfrak{M}, w \vDash \blacksquare\top$ 当且仅当 $w \in N$。

称一个公式 φ 在 $\mathfrak{M}$ 上可满足，如果存在 $w \in W$ 使得 $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$。称 φ 在 $\mathfrak{M}$ 上真，记为 $\mathfrak{M} \vDash \varphi$，如果对任意 $w \in W$ 都有 $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$。称公式 φ 在一个正则框架 $\mathfrak{F}$ 上有效，记为 $\mathfrak{F} \vDash \varphi$，如果对任意 $\mathfrak{F}$ 上的赋值 V 并且对所有 $w \in W$，$(\mathfrak{F}, V), w \vDash \varphi$。

称一个公式 φ 相对于一个正则框架类 $\mathbb{C}$ 有效，记为 $\mathbb{C} \vDash \varphi$，如果对所有 $\mathfrak{F} \in \mathbb{C}$，$\mathfrak{F} \vDash \varphi$。给定任意公式集 Γ 和任意公式 φ，称 φ 是 Γ 的逻辑后承，记为 $\Gamma \vDash \varphi$，如果对任意正则模型 $\mathfrak{M}$ 和任意 $w \in W$，$\mathfrak{M}, w \vDash \Gamma$ 蕴含 $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$。

称一个公式集 Γ 定义正则框架类 $\mathbb{C}$，如果对任意正则框架 $\mathfrak{F}$，Γ 在 $\mathfrak{F}$ 上有效当且仅当 $\mathfrak{F} \in \mathbb{C}$。如果 Γ 是单元集 $\{\varphi\}$，称 φ 定义 $\mathbb{C}$。

定义 2.4. 希尔伯特式公理系统 HC2t 在 [0] 中给出，该系统由如下公理模式和推理规则组成：

(1) 公理：

(Taut) 所有命题逻辑重言式特例，

(K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$，

(ad1) $\Box\top \to (\varphi \to \Box\blacklozenge\varphi)$，

(N) $\Box\top \leftrightarrow \blacksquare\top$，

(2) 推理规则：

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\mathrm{MP}) \qquad\qquad \frac{\varphi \to \psi}{\Box\varphi \to \Box\psi}\ (\mathrm{Mon}_{\Box})$$

给定公式 φ 和公式集 Γ，相对于系统 HC2t，称 φ 是 Γ 的演绎后承，记为 $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC2t}} \varphi$，如果存在一个有穷集合 $\Gamma' \subseteq \Gamma$ 使得 $\bigwedge\Gamma' \to \varphi \in \mathrm{HC2t}$，其中 $\bigwedge\Gamma'$ 是 Γ' 中所有公式的合取。当 $\Gamma = \varnothing$，记为 $\vdash_{\mathrm{HC2t}} \varphi$。

命题 2.1. 对任意公式 φ 和 ψ，以下三条成立：

(1) $\vdash_{\mathrm{HC2t}} \blacksquare(\varphi \to \psi) \to (\blacksquare\varphi \to \blacksquare\psi)$，

(2) $\vdash_{\mathrm{HC2t}} \blacksquare\top \to (\varphi \to \blacksquare\Diamond\varphi)$，

(3) 若 $\vdash_{\mathrm{HC2t}} \varphi \to \psi$，则 $\vdash_{\mathrm{HC2t}} \blacksquare\varphi \to \blacksquare\psi$。

命题 2.2 (可靠性). 对任意公式 $\varphi \in \mathcal{L}$，如果 HC2t$\vdash \varphi$，那么 $\models \varphi$。

证明. 需验证 HC2t 的公理有效并且推理规则保持有效性。给定任意正则框架 $\mathfrak{F}$，令 V 是 $\mathfrak{F}$ 上的任意赋值并且 w 是 $\mathfrak{F}$ 上的任意点。以下验证公理 (ad1) 的有效性和规则 (Mon$_{\Box}$) 保持有效性。

(ad1)：设 $(\mathfrak{F}, V), w \models \Box\top$ 并且 $(\mathfrak{F}, V), w \models \varphi$。那么 $w \in N$。令 $w = v$。那么对任意 $u \in R_F(w)$ 存在 v 使得 $R_P vu$ 并且 $(\mathfrak{F}, V), v \models \varphi$。因此 $(\mathfrak{F}, V), w \models \Box\blacklozenge\varphi$。

(Mon$_{\Box}$)：设 $(\mathfrak{F}, V), w \models \varphi \to \psi$ 并且 $(\mathfrak{F}, V), w \models \Box\varphi$。那么 $w \in N$ 并且对任意 $u \in R_F(w)$，$(\mathfrak{F}, V), u \models \varphi$。因为 $w \in N$。由假设得 $(\mathfrak{F}, V), u \models \varphi \to \psi$。因此 $(\mathfrak{F}, V), u \models \psi$。因为 $u \in R_F(w)$。因此 $(\mathfrak{F}, V), w \models \Box\psi$。 □

定理 2.1 (完全性). HC2t 相对于所有正则框架类是强完全的。

证明. 运用典范模型方法，在 [0] 中已被证明。 □

3 HC2t 的矢列演算

令 Γ, Δ 等（有或者无下标）表示有穷可重公式集。一个矢列是形如 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的表达式，其中 Γ 和 Δ 都是有穷的非空的可重公式集。一个矢列规则是以下形式

的表达式：

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \ldots \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}{\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0}\,(\mathrm{R})$$

其中 $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) 称为 (R) 的前提，$\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ 称为 (R) 的结论。

定义 3.1. HC2t 的矢列演算 GC2t 由以下公理模式和矢列规则组成：

(1) 公理模式：

$$\begin{array}{ll}
(A1) & \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \\
(A2) & \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \\
(A3) & \Box\top, \Gamma \Rightarrow \Delta, \blacksquare\top \\
(A4) & \blacksquare\top, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Box\top
\end{array}$$

(2) 联结词规则：

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\wedge \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\,(\Rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\vee \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1, \varphi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\,(\Rightarrow \vee)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\to\Rightarrow) \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\,(\Rightarrow\to)$$

(3) 结构规则：

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(w \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,(\Rightarrow w)$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(c \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,(\Rightarrow c)$$

(4) 切割规则：

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Sigma \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Theta}\,(Cut)$$

(5) 模态规则：

$$\frac{\Box\top, \blacklozenge\Theta, \Sigma \Rightarrow \varphi}{\Box\top, \Theta, \Box\Sigma \Rightarrow \Box\varphi}\,(ad_F) \qquad \frac{\blacksquare\top, \Diamond\Theta, \Sigma \Rightarrow \varphi}{\blacksquare\top, \Theta, \blacksquare\Sigma \Rightarrow \blacksquare\varphi}\,(ad_P)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi}\,(K_F) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\blacksquare\Gamma \Rightarrow \blacksquare\varphi}\,(K_P)$$

在 GC2t 中，一个推导 $\mathcal{D}$ 是由矢列组成的有穷树结构，其中每个节点要么是公理，要么是从子节点矢列使用某个规则得到的。称矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t 中可推导（记为：GC2t $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$），如果在 GC2t 中存在推导 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{D}$ 的根节点为 $\Gamma \Rightarrow \Delta$。称推理规则 (R) 可允许，如果 (R) 的结论 $(\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0)$ 不可推导，那么 (R) 的前提 $(\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i)$ 不可推导。

定义 3.2. 给定任意正规模型 $\mathfrak{M}=(\mathfrak{F},V)$，$w\in\mathfrak{M}$，称矢列 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 在 w 上真（记为：$\mathfrak{M},w\vDash\Gamma\Rightarrow\Delta$），如果 $\mathfrak{M},w\vDash\bigwedge\Gamma\to\bigvee\Delta$。称一个矢列规则在模型上保真，如果在模型上前提真蕴含结论真。称矢列 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是有效的（记为：$\vDash\Gamma\Rightarrow\Delta$），如果 $\bigwedge\Gamma\to\bigvee\Delta$ 是有效式。

命题 3.1 (可靠性)**.** 对任意矢列 $\Gamma\Rightarrow\Delta$，如果 GC2t$\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$，那么 $\vDash\Gamma\Rightarrow\Delta$。

证明. 容易验证 GC2t 的公理都是有效的并且推导规则保持有效性。 □

引理 3.1. 如果 HC2t$\vdash\alpha$，那么 GC2t$\vdash\Rightarrow\alpha$。

证明. 假设 HC2t$\vdash\alpha$，则在 HC2t 中存在一个推导 $\mathcal{D}$。对 $\mathcal{D}$ 的长度归纳证明 $\vdash\Rightarrow\alpha$。设 $|\mathcal{D}|=0$，则 α 在 HC2t 中是公理。公理 (K) 和 (N) 容易验证，这里只验证公理 (ad1)。(ad1) 的推导如下：

$$\dfrac{\Box\top,\blacklozenge\varphi\Rightarrow\blacklozenge\varphi}{\Box\top,\varphi\Rightarrow\Box\blacklozenge\varphi}\,(ad_F)$$

设 $|\mathcal{D}|>0$，则 α 从 $\psi\to\alpha$ 和 α 由 (MP) 得到。由归纳假设得 GC2t$\vdash\Rightarrow\psi$ 并且 GC2t$\vdash\Rightarrow\psi\to\alpha$。$\Rightarrow\alpha$ 的推导如下：

$$\dfrac{\Rightarrow\psi\qquad\dfrac{\dfrac{\psi\Rightarrow\alpha,\psi\qquad\alpha,\psi\Rightarrow\alpha}{\Rightarrow\psi\to\alpha\qquad\psi\to\alpha,\psi\Rightarrow\alpha}\,(\to\Rightarrow)}{\psi\Rightarrow\alpha}\,(Cut)}{\Rightarrow\alpha}\,(Cut)$$

□

定理 3.2. GC2t$\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$ 当且仅当 HC2t$\vdash\bigwedge\Gamma\to\bigvee\Delta$。

证明. 从右到左，设 HC2t$\vdash\bigwedge\Gamma\to\bigvee\Delta$。由引理 3.1 得 GC2t$\vdash\Rightarrow\bigwedge\Gamma\to\bigvee\Delta$。显然 GC2t$\vdash\Gamma\Rightarrow\bigwedge\Gamma$ 并且 GC2t$\vdash\bigwedge\Gamma,\bigwedge\Gamma\Rightarrow\bigvee\Delta$。由 (Cut) 得 GC2t$\vdash\Gamma\Rightarrow\bigvee\Delta$。显然，GC2t$\vdash\bigvee\Delta\Rightarrow\Delta$。由 (Cut) 得 GC2t$\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$。另一个方向，设 GC2t$\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$。那么在 GC2t 中存在 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 的推导 $\mathcal{D}$。对 $|\mathcal{D}|$ 归纳证明 HC2t$\vdash\bigwedge\Gamma\to\bigvee\Delta$。设 $|\mathcal{D}|=0$。则矢列 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是公理。对每条 GC2t 的公理，容易验证 HC2t$\vdash\bigwedge\Gamma\to\bigvee\Delta$。设 $|\mathcal{D}|>0$。则矢列 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 由规则 (R) 得到。其他情况容易验证，这里只验证规则 (ad_F)。在这种情况下，推导的最后一步是：

$$\dfrac{\Box\top,\blacklozenge\Theta,\Sigma\Rightarrow\varphi}{\Box\top,\Theta,\Box\Sigma\Rightarrow\Box\varphi}\,(ad_F)$$

由归纳假设得 HC2t$\vdash\Box\top\wedge\bigwedge\blacklozenge\Theta\wedge\bigwedge\Sigma\to\varphi$。由 $\mathrm{Mon}_\Box$ 得 HC2t$\vdash\Box(\Box\top\wedge\bigwedge\blacklozenge\Theta\wedge\bigwedge\Sigma)\to\Box\varphi$。因为 HC2t$\vdash\Box\top\wedge\bigwedge\Box\blacklozenge\Theta\wedge\bigwedge\Box\Sigma\to\Box(\Box\top\wedge\bigwedge\blacklozenge\Theta\wedge\bigwedge\Sigma)$。因此 HC2t$\vdash\Box\top\wedge\bigwedge\Box\blacklozenge\Theta\wedge\bigwedge\Box\Sigma\to\Box\varphi$。因为 HC2t$\vdash\Box\top\wedge\bigwedge\Theta\wedge\bigwedge\Box\Sigma\to\Box\top\wedge\bigwedge\Box\blacklozenge\Theta\wedge\bigwedge\Box\Sigma$。因此 HC2t$\vdash\Box\top\wedge\bigwedge\Theta\wedge\bigwedge\Box\Sigma\to\Box\varphi$。 □

定理 3.3 (完全性)**.** 令 $\mathbb{CF}$ 表示所有正则框架类，如果 $\mathbb{CF} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$，那么 GC2t $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$。

证明. 设 $\mathbb{CF} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$。则 $\mathbb{CF} \models \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$。由 HC2t 的完全性得 HC2t$\vdash \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$。由定理 3.2 得 GC2t$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$。 □

4 子公式性质和可判定性

令 Γ 为有穷可重公式集。$Sf(\Gamma)$ 表示 Γ 的所有子公式的集合。称一个可推导的矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 有子公式性质，如果存在一个推导 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{D}$ 中出现的公式都属于 $Sf(\Gamma, \Delta)$。称一个矢列演算具有子公式性质，如果对该演算中任意可推导的矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，存在一个推导 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{D}$ 中出现的公式都属于 $Sf(\Gamma, \Delta)$。在 GC2t 中，显然规则 (Cut)、(ad_F) 和 (ad_P) 不具有子公式性质。本节的目标是证明 GC2t 的子公式性质。为此，我们将要证明，如果一个矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t 中可推导，那么存在一个该矢列的推导 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{D}$ 中出现的公式都属于 $Sf(\Gamma, \Delta)$。

定义 4.1. 令 Ξ 是子公式封闭的有穷公式集。称一个矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t 中 Ξ-可证，如果存在一个该矢列的推导 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{D}$ 中出现的公式都属于 Ξ。令 a, b 为 Ξ 的两个子集，称二元组 (a, b) Ξ-不相交，如果 $a \Rightarrow b$ 不是 Ξ-可证的。称一个矢列 $a \Rightarrow b$ 是 Ξ-饱和的，如果 (a, b) Ξ-不相交并且满足如下条件：

(1) 如果 $\varphi, a \Rightarrow b$ 不是 Ξ-可证的，那么 $\varphi \in a$。

(2) 如果 $a \Rightarrow b, \varphi$ 不是 Ξ-可证的，那么 $\varphi \in b$。

称公式集 $a \subseteq \Xi$ 是 Ξ-饱和的，如果二元组 $(a, \Xi \backslash a)$ 在 GC2t 中是 Ξ-饱和的。在这一节的后面部分，我们会一直使用 Ξ 表示子公式封闭的有穷公式集。另外，给定任意公式集 $a \subseteq \Xi$，用 a^c 表示 $\Xi \backslash a$。

引理 4.1. 如果 (a, b) 在 GC2t 中 Ξ-不相交，那么存在 Ξ-饱和的二元组 (a^+, b^+) 使得 $a \subseteq a^+$ 并且 $b \subseteq b^+$。

证明. 令 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n (1 \leq m \leq n)$ 是 Ξ 中所有公式的列举使得 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ 是形如 $\Box(\blacksquare)\alpha$ 的公式，$\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n$ 不是形如 $\Box(\blacksquare)\alpha$ 的公式。令 $a_0 \Rightarrow b_0 = a \Rightarrow b$。如果 GC2t$\nvdash a_k \Rightarrow b_k, \varphi_k$，那么令 $a_{k+1} \Rightarrow b_{k+1} = a_k \Rightarrow b_k, \varphi_k$。如果 GC2t$\vdash a_k \Rightarrow b_k, \varphi_k$ 并且 GC2t$\nvdash a_k, \varphi_k \Rightarrow b_k$，那么令 $a_{k+1} \Rightarrow b_{k+1} = a_k, \varphi_k \Rightarrow b_k$。否则，令 $a_{k+1} \Rightarrow b_{k+1} = a_k \Rightarrow b_k$。

下证 $a_{n+1} \Rightarrow b_{n+1}$ 是 Ξ-饱和的。显然 GC2t$\nvdash a_{n+1} \Rightarrow b_k, \varphi_{n+1}$。令 $\varphi = \varphi_i$ 对某个 i $(1 \leq i \leq n)$。设 GC2t$\nvdash \varphi, a_{n+1} \Rightarrow b_{n+1}$。显然 GC2t$\vdash a_k \Rightarrow b_k, \varphi$，否则 $\varphi \in b_{k+1} \subseteq b_{n+1}$ 使得 GC2t$\vdash \varphi, a_{n+1} \Rightarrow b_{n+1}$。因为 $a_k \subseteq a_{n+1}$ 并且 $b_k \subseteq b_{n+1}$，由假设得 GC2t$\nvdash \varphi, a_k \Rightarrow b_k$。所以 $\varphi \in a_{k+1} \subseteq a_{n+1}$。同理可得 $\varphi \in b_{n+1}$。 □

定义 4.2. 令 Ξ 为子公式封闭的有穷公式集，定义 GC2t 的 Ξ-模型 $\mathfrak{M}^\Xi$ 如下：

$W^\Xi = \{a \mid a$ 在 GC2t 中是 Ξ-饱和的 $\}$。

$N^\Xi = \{a \in W^\Xi \mid \Box\top \in a\}$。

令 R_F、R_P 是 W^Ξ 上的二元关系。对任意 $a, b \in W^\Xi$ 并且 $\varphi \in \Xi$，称 R_F 是 $\Box$-饱和的，如果满足如下条件：$\Box\varphi \in a \leftrightarrow a \in N^\Xi$ 并且 $\forall b \in W^\Xi(R_F ab \Rightarrow \varphi \in b)$。称 R_F 是 $\blacklozenge$-饱和的，如果满足以下条件：$\blacklozenge\varphi \in a \leftrightarrow a \notin N^\Xi$ 或者 $\exists b \in W^\Xi(R_F ba$ 并且 $\varphi \in b)$。R_P 的 $\blacksquare(\Diamond)$ 饱和条件类似。

$V^\Xi(\mathrm{p}) = \{a \in W^\Xi \mid \mathrm{p} \in a\}$。

如果 R_F 是 $\Box$-饱和的并且是 $\blacklozenge$-饱和的，R_P 是 $\blacksquare$-饱和的并且是 $\Diamond$-饱和的，那么 $\mathfrak{M}^\Xi = (W^\Xi, N^\Xi, R_F, R_P, V^\Xi)$ 是 GC2t 的 Ξ-模型。

引理 4.2. 令 $a, b \in W^\Xi$ 并且 $\varphi, \psi \in \Xi$，以下条件成立：

(1) 如果 $\varphi \wedge \psi \in a$，那么 $\varphi \in a$ 并且 $\psi \in a$。

(2) 如果 $\varphi \wedge \psi \in a^c$，那么 $\varphi \in a^c$ 或者 $\psi \in a^c$。

(3) 如果 $\varphi \vee \psi \in a$，那么 $\varphi \in a$ 或者 $\psi \in a$。

(4) 如果 $\varphi \vee \psi \in a^c$，那么 $\varphi \in a^c$ 并且 $\psi \in a^c$。

(5) 如果 $\varphi \to \psi \in a$，那么 $\varphi \in a^c$ 或者 $\psi \in a$。

(6) 如果 $\varphi \to \psi \in a^c$，那么 $\varphi \in a$ 并且 $\psi \in a^c$。

证明. 由 Ξ-饱和的定义和 GC2t 相应的联结词规则，条件 (1) 到 (6) 容易证明。 □

引理 4.3. 令 $\mathfrak{M}^\Xi$ 是 GC2t 的正则 Ξ-模型。对所有公式 $\varphi \in \Xi$ 并且 $a \in \Xi$，$\varphi \in a$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^\Xi, a \vDash \varphi$。

证明. 对公式 φ 的复杂度归纳证明。原子公式的情况显然成立。由归纳假设可得布尔公式的情况。令 $\varphi = \Box\psi$。从左到右，设 $\Box\psi \in a$ 并且 $R_F ab$。由 $\Box$-饱和的定义得 $\varphi \in b$。由归纳假设得 $\mathfrak{M}^\Xi, b \vDash \psi$。因为 $b \in R_F(a)$。因此 $\mathfrak{M}^\Xi, a \vDash \Box\psi$。从右到左，设 $\mathfrak{M}^\Xi, a \vDash \Box\psi$ 并且 $R_F ab$。由语义定义得 $\mathfrak{M}^\Xi, b \vDash \varphi$。由归纳假设得 $\varphi \in b$。因为 $R_F ab$。因此 $\Box\varphi \in a$。当 $\varphi = \blacksquare\psi$，证明类似。 □

定义 4.3. 给定 $a, b \in W^\Xi$。令 $\Box\top \in a$ 并且 $\Box\top \in b$。W^Ξ 上的二元关系 R_F^{ad}、R_P^{ad} 定义如下：

$R_F^{ad} ab$ 当且仅当 $\Box\varphi \in a^c$ 蕴含 $\varphi \in b^c$，并且 $\blacklozenge\varphi \in b$ 蕴含 $\varphi \in a$。

$R_F^{ad} ab$ 当且仅当 $\blacksquare\varphi \in a^c$ 蕴含 $\varphi \in b^c$，并且 $\Diamond\varphi \in b$ 蕴含 $\varphi \in a$。

命题 4.1. 对任意公式集 Σ, Θ 和公式 φ，以下条件成立：

(1) 令 $\blacklozenge\Theta \subseteq \Xi$，规则 *(ad$_F$)* 在 GC2t 中可允许当且仅当 R_F^{ad} 成立。

(2) 令 $\Diamond\Theta \subseteq \Xi$，规则 *(ad$_P$)* 在 GC2t 可允许当且仅当 R_P^{ad} 成立。

证明. 这里只证明 (1)。从右至左，设 GC2t $\nvdash \Box\top, \Theta, \Box\Sigma \Rightarrow \Box\varphi$。由引理 4.1 得 $\Box\top \in a$，$\Theta \subseteq a$，$\Box\Sigma \subseteq a$ 并且 $\Box\varphi \in a^c$。由假设得 $\varphi \in b^c$ 。如果 $\blacklozenge\theta \in \blacklozenge\Theta$，那么 $\theta \in \Theta$，并且如果 $\sigma \in \Sigma$，那么 $\Box\sigma \in \Box\Sigma$。因为 $\Box\top \in b$。因此 GC2t $\nvdash \Box\top, \blacklozenge\Theta, \Sigma \Rightarrow \varphi$ 。从左至右，设 $\Box\varphi \in a^c$。令 $\Theta = \{\theta \in a \mid \blacklozenge\theta \in \Xi\}$ 并且 $\Sigma = \{\sigma \mid \Box\sigma \in a\}$。因为 $\Box\top \in a$，$\Theta \subseteq a$ 并且 $\Box\Sigma \subseteq a$。由假设得 GC2t $\nvdash \Box\top, \Theta, \Box\Sigma \Rightarrow \Box\varphi$。那么 GC2t $\nvdash \Box\top, \blacklozenge\Theta, \Sigma \Rightarrow \varphi$。由引理 4.1 得 $\blacklozenge\Theta \subseteq a$、$\Sigma \subseteq a$ 并且 $\varphi \in a^c$。因此 R_F^{ad} 成立。 □

定义 4.4. 矢列演算 GC2t 在 W^Ξ 上的二元关系 R_F^K，R_P^K 定义如下：

(1) $R_F^K ab$ 当且仅当 $\Box\varphi \in a$ 蕴含 $\Box\top \in a$ 并且 $\varphi \in b$。

(2) $R_P^K ab$ 当且仅当 $\blacksquare\varphi \in a$ 蕴含 $\blacksquare\top \in a$ 并且 $\varphi \in b$。

命题 4.2. 令切割规则 *(Cut)* 的切割公式 $\varphi \in \Xi$，对任意公式 ψ，以下命题成立：

(1) 规则 *(K_F)* 在 GC2t 中可允许当且仅当对任意 $a \in W^\Xi$，$\Box\psi \in a^c$ 蕴含存在 $b \in W^\Xi$ 使得 $R_F^K ab$ 并且 $\psi \in b^c$ 。

(2) 规则 *(K_F)* 在 GC2t 中可允许当且仅当对任意 $a \in W^\Xi$，$\blacksquare\psi \in a^c$ 蕴含存在 $b \in W^\Xi$ 使得 $R_P^K ab$ 并且 $\psi \in b^c$ 。

证明. 这里只证明 (2)。从右至左，设 GC2t $\nvdash \blacksquare\Gamma \Rightarrow \blacksquare\varphi$ 。由引理 4.1 得 $\blacksquare\Gamma \subseteq a$ 并且 $\blacksquare\varphi \in a^c$。由假设得存在 $b \in W^\Xi$ 使得 $R_P^K ab$ 并且 $\psi \in b^c$ 。如果 $\alpha \in \Gamma$，那么 $\blacksquare\alpha \in \blacksquare\Gamma \subseteq a$。因为 $R_P^K ab$。则 $\alpha \in b$。因此 $\Gamma \subseteq b$。因此 GC2t $\nvdash \Gamma \Rightarrow \varphi$。从左至右，设 $\blacksquare\varphi \in a^c$。令 $\Gamma = \{\alpha \mid \blacksquare\alpha \in a\}$。因为 $\blacksquare\Gamma \subseteq a$ 并且 $\blacksquare\varphi \in a^c$。则 GC2t $\nvdash \blacksquare\Gamma \Rightarrow \blacksquare\varphi$。由假设得 GC2t $\nvdash \Gamma \Rightarrow \varphi$。由引理 4.1 得存在 $b \in W^\Xi$ 使得 $\Gamma \subseteq b$ 并且 $\varphi \in b^c$。因此 $R_P^K ab$。 □

引理 4.4. 给定 GC2t 中的矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 使得 $\Xi := Sf(\Gamma, \Delta)$。如果 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t 中 Ξ-不可证，那么对 GC2t 框架上的有穷模型 $\mathfrak{M}^\Xi$，存在 $a \in \mathfrak{M}^\Xi$ 使得 $\mathfrak{M}^\Xi, a \nvDash \Gamma \Rightarrow \Delta$。

证明. 假设 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t Ξ-不可证。由引理 4.1 得存在 $a \in W^\Xi$ 使得 $\Gamma \subseteq a$ 并且 $\Delta \subseteq a^c$。由引理 4.3 得 $\mathfrak{M}^\Xi, a \nvDash \Gamma \Rightarrow \Delta$，其中 $\mathfrak{M}^\Xi$ 是基于 GC2t 的框架 $\mathfrak{F}^\Xi$。由命题 4.2 得 $\mathfrak{F}^\Xi$ 是 HC2t 的框架。 □

定理 4.5 (子公式性质)**.** 对任意矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，如果 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t 中可证，那么 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t 中 Ξ-可证，其中 $\Xi := Sf(\Gamma, \Delta)$。

证明. 设 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t 中 Ξ-不可证。由引理 4.4 得 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t 的某个有穷正则框架上为假。由 GC2t 的可靠性得 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t 中不可证。 □

称 HC2t 具有有穷模型性质，如果存在正则框架类 $\mathbb{C}$ 使得对所有 HC2t 的定理 φ，$\mathbb{C} \vDash \varphi$ 并且所有不是 HC2t 的定理 ψ，ψ 在 $\mathbb{C}$ 中的某个有穷框架上为假。

推论 1. HC2t 具有有穷模型性质并且 HC2t 可判定。

证明. 令 $\mathbb{CF}$ 为所有正则框架类。由 HC2t 得可靠性得所有 HC2t 中的定理 φ 都有效。由 HC2t 的完全性和引理 4.4 得，所有不是 HC2t 的定理 ψ，ψ 在 $\mathbb{CF}$ 中的某个有穷框架上为假。因此 HC2t 具有有穷模型性质并且 HC2t 可判定。 □

5 GC2t 的插值定理

定义 5.1. GC2t* 是将 GC2t 中的规则 (Cut), (ad_F), (ad_P) 分别替换成 (Cut^*), (ad^*_F), (ad^*_P)，公理模式和其他规则保持不变得到的矢列演算。其中规则 (Cut^*)，(ad^*_F)，(ad^*_P) 分别定义如下：

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Sigma \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Theta}\,(Cut^*),$$

其中 $\varphi \in Sf(\Gamma \cup \Sigma \cup \Delta \cup \Theta)$。

$$\frac{\Box\top, \blacklozenge\Theta, \Sigma \Rightarrow \varphi}{\Box\top, \Theta, \Box\Sigma \Rightarrow \Box\varphi}\,(ad^*_F) \qquad \frac{\blacksquare\top, \Diamond\Theta, \Sigma \Rightarrow \varphi}{\blacksquare\top, \Theta, \blacksquare\Sigma \Rightarrow \blacksquare\varphi}\,(ad^*_P),$$

其中 $\blacklozenge\Theta \subseteq Sf(\Sigma \cup \Theta)$，$\Diamond\Theta \subseteq Sf(\Sigma \cup \Theta)$。

我们在上一节证明了 GC2t 的子公式性质。由 GC2t 的子公式性质得 GC2t 和 GC2t* 等价。在这一节，我们将要证明 GC2t* 的插值定理。从而得到 GC2t 的插值性质。

定义 5.2. 我们用 $\Gamma \uplus \Delta$ 表示 Γ 和 Δ 的并。对任意矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，称 $(\Gamma_1 : \Delta_1); (\Gamma_2 : \Delta_2)$ 是 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的划分，如果 $\Gamma_1 \uplus \Gamma_2 = \Gamma$ and $\Delta_1 \uplus \Delta_2 = \Delta$。令 GC2t* $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$。对任意 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的划分 $(\Gamma_1 : \Delta_1); (\Gamma_2 : \Delta_2)$，称公式 χ 是 $(\Gamma_1 : \Delta_1); (\Gamma_2 : \Delta_2)$ 的插值，如果以下条件满足：

(1) GC2t* $\vdash \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi$，

(2) GC2t* $\vdash \chi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$，

(3) $var(\chi) \subseteq var(\Gamma_1, \Delta_1) \cap var(\Gamma_2, \Delta_2)$，

其中 $var(\Gamma)$ 在 Γ 中所有变元的集合。

定理 5.1. 如果 GC2t* $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ 并且 $(\Gamma_1 : \Delta_1); (\Gamma_2 : \Delta_2)$ 是 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的划分，那么存在公式 χ 使得 χ 是 $(\Gamma_1 : \Delta_1); (\Gamma_2 : \Delta_2)$ 的插值。

证明. 设 GC2t* $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ 并且 $(\Gamma_1 : \Delta_1); (\Gamma_2 : \Delta_2)$ 是 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的划分。令 $\mathcal{D}$ 是矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 GC2t* 的推导。对 $|\mathcal{D}|$ 归纳证明存在公式 χ 使得 χ 是 $(\Gamma_1 : \Delta_1); (\Gamma_2 : \Delta_2)$ 的插值。

(1) 设 $|\mathcal{D}|=0$。那么 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是公理。以下有四种情况，在这四种情况下，变元条件显然满足。

(1.1) $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是 (A1：$\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi$) 的特例，分以下情况。

(1.1.1) $(\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2)=(\varphi,\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2,\varphi)$。因为 $\vdash\varphi,\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\varphi$ 并且 $\vdash\varphi,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2,\varphi$。因此 φ 是插值。

(1.1.2) $(\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2)=(\varphi,\Gamma_1:\Delta_1,\varphi);(\Gamma_2:\Delta_2)$。因为 $\vdash\varphi,\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\varphi,\bot$ 并且 $\vdash\bot,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2$. 因此 $\bot$ 是插值。

(1.1.3) $(\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2)=(\Gamma_1:\Delta_1);(\varphi,\Gamma_2:\Delta_2,\varphi)$。因为 $\vdash\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\top$ 并且 $\vdash\top,\varphi,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2,\varphi$。因此 $\top$ 是插值。

(1.1.4) $(\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2)=(\Gamma_1:\Delta_1,\varphi);(\varphi,\Gamma_2:\Delta_2)$。因为 $\vdash\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\varphi,\neg\varphi$ 并且 $\vdash\neg\varphi,\varphi,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2$。因此 $\neg\varphi$ 是插值。

(1.2) $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是 (A2：$\bot,\Gamma\Rightarrow\Delta$) 的特例，分以下情况。

(1.2.1) $(\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2)=(\bot,\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2)$。因为 $\vdash\bot,\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\bot$ 并且 $\vdash\bot,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2$。因此 $\bot$ 是插值

(1.2.2) $(\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2)=(\Gamma_1:\Delta_1);(\bot,\Gamma_2:\Delta_2)$。因为 $\vdash\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\top$ 并且 $\vdash\top,\bot,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2$。因此 $\top$ 是插值。

(1.3) $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是 (A3：$\Box\top,\Gamma\Rightarrow\Delta,\blacksquare\top$) 的特例，分以下情况。

(1.3.1) $(\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2)=(\Box\top,\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2,\blacksquare\top)$。因为 $\vdash\Box\top,\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\blacksquare\top$ 并且 $\vdash\blacksquare\top,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2,\blacksquare\top$。因此 $\blacksquare\top$ 是插值。

(1.3.2) $(\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2)=(\Box\top,\Gamma_1:\Delta_1,\blacksquare\top);(\Gamma_2:\Delta_2)$。因为 $\vdash\Box\top,\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\blacksquare\top,\bot$ 并且 $\vdash\bot,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2$。因此 $\bot$ 是插值。

(1.3.3) $(\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2)=(\Gamma_1:\Delta_1);(\Box\top,\Gamma_2:\Delta_2,\blacksquare\top)$。因为 $\vdash\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\top$ 并且 $\vdash\top,\Box\top,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2,\blacksquare\top$。因此 $\top$ 是插值。

(1.3.4) $(\Gamma_1:\Delta_1);(\Gamma_2:\Delta_2)=(\Gamma_1:\Delta_1,\blacksquare\top);(\Box\top,\Gamma_2:\Delta_2)$。因为 $\vdash\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1,\blacksquare\top,\neg\blacksquare\top$ 并且 $\vdash\neg\blacksquare\top,\Box\top,\Gamma_2\Rightarrow\Delta_2$。因此 $\neg\blacksquare\top$ 是插值。

(1.4) $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是 $(A4\Box\blacksquare\top,\Gamma\Rightarrow\Delta,\Box\top)$ 的特例。证明类似。

(2) 设 $|\mathcal{D}|>0$。那么 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 由推理规则 (R) 得到。这里只验证规则 (ad_F) 和 (K_F)。

(2.1) (R) 是 (ad_F)，则推导的最后一步是：

$$\frac{\Box\top,\blacklozenge\Theta,\Sigma\Rightarrow\varphi}{\Box\top,\Theta,\Box\Sigma\Rightarrow\Box\varphi}\,(ad_F)$$

令 $(\Box\top,\Theta_1,\Box\Sigma_1:\Box\top,\Theta_2,\Box\Sigma_2)$ 是 $\Box\top,\Theta,\Box\Sigma\Rightarrow\Box\varphi$ 的划分。往证存在插值 χ 使得 GC2t* $\vdash\Box\top,\Theta_1,\Box\Sigma_1\Rightarrow\chi$ 并且 GC2t* $\vdash\chi,\Box\top,\Theta_2,\Box\Sigma_2\Rightarrow\Box\varphi$，$var(\chi)\subseteq var(\Theta_1,\Box\Sigma_1)\cap var(\Theta_2,\Box\Sigma_2,\Box\varphi)$。由归纳假设得，存在公式 χ 使得

(1a)$\vdash\Box\top,\blacklozenge\Theta_1,\Sigma_1\Rightarrow\chi$

(1b) $\vdash \chi, \Box\top, \blacklozenge\Theta_2, \Sigma_2 \Rightarrow \varphi$

(1c) $var(\chi) \subseteq var(\blacklozenge\Theta_1, \Sigma_1) \cap (\blacklozenge\Theta_2, \Sigma_2, \varphi)$

由 (1a) 运用规则 (ad_F) 得 $\vdash \Box\top, \Theta_1, \Box\Sigma_1 \Rightarrow \Box\chi$。由 (K_F) 和 (1b) 得 $\vdash \Box\chi, \Box\top, \Box\blacklozenge\Theta_2, \Box\Sigma_2 \Rightarrow \Box\varphi$。显然 $\vdash \Box\top, \Box\chi, \Box\Sigma_2, \Theta_2 \Rightarrow \Box\top, \Box\blacklozenge\Theta_2, \Box\chi, \Box\Sigma_2$。因此 $\vdash \Box\chi, \Box\top, \Theta_2, \Box\Sigma_2 \Rightarrow \Box\varphi$。因为 $var(\chi) \subseteq var(\blacklozenge\Theta_1, \Sigma_1) \cap var(\blacklozenge\Theta_2, \Sigma_2)$。显然 $var(\Box\chi) \subseteq var(\Theta_1, \Box\Sigma_1) \cap var(\Theta_2, \Box\Sigma_2)$。因此 $\Box\chi$ 是插值。

(2.2) (R) 是 (K_F)，则推导的最后一步是：

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi}\,(K_F)$$

令 $(\Box\Gamma_1 : \Box\Gamma_2)$ 是 $\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi$ 的划分。往证存在插值 χ 使得 GC2t* $\vdash \Box\Gamma_1 \Rightarrow \chi$ 并且 GC2t* $\vdash \chi, \Box\Gamma_2 \Rightarrow \Box\varphi$，$var(\chi) \subseteq var(\Box\Gamma_1) \cap var(\Box\Gamma_2, \Box\varphi)$。由归纳假设得存在公式 χ 使得

(1a) $\vdash \Gamma_1 \Rightarrow \chi$

(1b) $\vdash \chi, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi$

(1c) $var(\chi) \subseteq var(\Gamma_1) \cap var(\Gamma_2, \varphi)$

由 (1a) 运用规则 (K_F) 得 $\vdash \Box\Gamma_1 \Rightarrow \Box\chi$。由 (1b) 运用规则 (K_F) 得 $\vdash \Box(\chi, \Gamma_2) \Rightarrow \Box\varphi$。显然 $\vdash \Box\chi, \Box\Gamma_2 \Rightarrow \Box(\chi, \Gamma_2)$。因此 $\vdash \Box\chi, \Box\Gamma_2 \Rightarrow \Box\varphi$。因为 $var(\varphi) \subseteq var(\Gamma_1) \cap var(\Gamma_2, \varphi)$。显然 $var(\Box\varphi) \subseteq var(\Box\Gamma_1) \cap var(\Box\Gamma_2, \Box\varphi)$。因此 $\Box\chi$ 是插值。 □

参考文献

[0] E. J. Lemmon, 1996, “Algebraic semantics for modal logic I”, *The Journal of Symbolic Logic*, **31(1):** 46–65.

[0] A. Maruyama, 2003, *Towards combined system of modal logics—A syntactic and semantic study,* PhD thesis, School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology.

[0] A. Maruyama, S. Tojo and H. Ono, 2001, “Decidability of temporal epistemic logics for multi-agent models”, *Proceedings of the ICLP0 Workshop on Computational Logic in Multi-Agent Systems (CLIMA-01)*, pp. 3140.

[0] M. Takano, 1992, “Subformula property as a substitute for cut-elimination in modal propositional logics”, *Mathmatica Japonica*, **37(6):** 1129–1145.

[0] M. Takano, 2001, “A modified subformula property for the modal logics K5 and K5D”, *Bulletin of the Section of Logic*, **30(2):** 115–122.

[0] 马明辉，王善侠，邓辉文，“极小非正规时序逻辑的矢列式演算系统”，中国科学：信息科学，2017 年第 1 期，第 31–46 页。

（责任编辑：袁之）

Temporal Extension of Non-Normal Modal Logic C2

Baoxun Tu

Abstract

We build another sequent calculi GC2t for non-normal temporal logic C2t. Applying Takano's semantic method, we show the subformula property of GC2t. Consequently we show the finite model property and decidability of GC2t. Furthermore, we show the interpolation property of GC2t.

Baoxun Tu Institute of Logic and Cognition, Sun Yat-sen University
Department of Philosophy, Sun Yat-sen University
tubaoxun2015@163.com