

基于证据的怀疑

桂海斌

摘要: 文章从对怀疑的哲学讨论出发, 在总结了已有的关于怀疑的定义、怀疑的形式化研究后, 主张继续以形式化的方法来研究基于证据的怀疑。本文借助邻域语义证据模型, 分别从两个方面对怀疑的逻辑性质进行考察: 第一, 将怀疑作为一种静态的认知态度, 考察了信念、证据和怀疑之间的关系, 阐述了怀疑的相关逻辑性质; 第二, 将怀疑作为一种动态的认知过程, 考察了初始认知状态为相信某个命题, 在引入该命题否定的证据集后, 认知状态所发生的变化, 并且给出了动态算子的归约公理及其有效性的证明。

关键词: 信念; 证据模型; 静态怀疑; 动态怀疑

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 引言

怀疑是在知识论的研究中无法避开的一个概念, 因为知识论正是在怀疑的声浪中不断发展前行的。以笛卡儿(R. Descartes)为代表的怀疑论者秉持着普遍怀疑原则主张怀疑一切, 而维特根斯坦(L. Wittgenstein)则明确地指出, “如果你试图怀疑一切, 那么你将不能怀疑任何东西”。([10], 第 115 页) 为此, 维特根斯坦提出了鲜明的口号: “怀疑来自信念之后”。([10], 第 160 页) 无独有偶, 波兰尼(M. Polanyi)在明确了毫无限制的怀疑并不能为我们提供新的认识之后, 亦提出了“怀疑不能在信托框架之外起作用”的主张。([5], 第 266 页)

尽管维特根斯坦和波兰尼使用的术语不同, 但都区分了“合理的怀疑”和“不合理的怀疑”, 将普遍怀疑归属于不合理的怀疑范畴, 主张合理的怀疑需要理由。([11], 第 59 页) 不同于维特根斯坦和波兰尼对“不合理的怀疑”的直接拒斥, 普赖尔(J. Pryor)在研究所谓的毫无理由的“不合理的怀疑”时, 为我们揭示了一种相信与怀疑共存的认知状态, 即仅依据某种不恰当的可能性对一个命题进行怀疑时, 认知主体依然可以形成关于该命题的信念。([7], 第 525 页)

简要言之, 维特根斯坦和普赖尔研究怀疑时的进路不尽相同, 区别在于分别将“有理由的怀疑”和“仅由某种可能性被提出而产生的怀疑”作为各自的主要

收稿日期: 2020-01-15; 修订日期: 2020-09-20

作者信息: 桂海斌 清华大学人文学院哲学系
ghb17@mails.tsinghua.edu.cn

研究对象,是两个不同层次的怀疑研究进路。本文的侧重点是前者,以信念和怀疑之间的密切关系为切入点,将基于证据的怀疑作为待考察的研究对象。

本文结构如下:第二节,介绍学者已经提出的怀疑的定义,以及对怀疑进行形式化的研究,分析和讨论它们的不足之处。第三节,将怀疑作为静态的认知态度,通过考察与怀疑相关的有效式和非有效式来揭示怀疑的逻辑性质。第四节,将怀疑作为动态的认知过程,考察初始认知状态为相信某个命题,在引入该命题否定的证据集后认知状态所发生的变化,并给出动态算子的归约公理及其有效性的证明。第五节,总结本文的研究工作和得到的研究结果。

2 对怀疑定义的研究

就逻辑的研究而言,对信念的研究已经相当成熟,但对怀疑的逻辑研究却并不多见。要逻辑地研究怀疑,首先需要弄清楚的就是怀疑是什么。萨蒙(N. Salmon)在对怀疑进行研究时,曾对怀疑做了如下的定义([8],第1页):

- A 怀疑 p 被定义为: A 不相信 p , 或 A 中止了对 p 的判断。
 - A 不相信 p 被定义为: A 相信 $\neg p$ 。
 - A 中止了对 p 的判断被定义为: 并非 A 相信 p , 且并非 A 相信 $\neg p$ 。

对于萨蒙的定义,撒加德(G. Thagard)直接指出了其中的问题,即对于任意的命题 p ,要么 A 相信 p , 要么 A 怀疑 p 。([9],第392页)而从逻辑的角度上看,萨蒙将“不相信 p ”和“并非相信 p ”当作了两个不同的概念也是不对的,因为“不”和“并非”都是否定连接词“ $\neg$ ”的体现,换言之,“不相信 p ”和“并非相信 p ”表达的是同一个涵义。

奥尔森(E. J. Olsson)和普罗耶蒂(C. Proietti)在研究群体信念时,也曾简要地提到对怀疑的定义([6],第503页):

- 怀疑 p 被定义为: 不相信 p , 且不相信 $\neg p$ 。

然而这种定义的问题在于,怀疑 p 和怀疑 $\neg p$ 没有被区分出来。换言之,依照该定义,在怀疑 p 的同时,也怀疑 $\neg p$ 。

此外,鲍梅尔(M. M. Bäuml)在形式化维特根斯坦观点的工作中也明确地给出了基于概率理论的怀疑定义([1],第36页):

- $\mu(\neg H) \neq 1 \wedge \exists E \subseteq W(\mu(E) < 1 \wedge d_w E > t \wedge \mu(H | E) < t)$

依据鲍梅尔提供的定义,“在点 w 上怀疑一个命题 H ”需要满足四个具体的要求:(1) $\neg H$ 的概率小于1;(2) 存在证据 E 且 E 的概率小于1;(3) $d_w E$ 表达的

是证据 E 在点 w 上的安全度, 需要 E 在 w 点上的安全度比 t 大¹; (4) 给定证据 E 后 H 的概率至少要小于 t 。

与其他学者提出的怀疑的定义有着明显的不同, 鲍梅尔提出的定义, 将证据因素直接纳入到了怀疑的定义中。该定义的要求 (4), 清楚地表达了这样的一个思想, 即我们在怀疑命题 H 时, 不相信命题 H 是因为我们有证据 E 。但是, 以概率的方式对怀疑进行定义, 或多或少会带有一定的局限性, 即阈值 t 的取值难免具有一定的主观性, 在不同的情景下, t 的取值总是不尽相同, 而不同的 t 的取值很可能会导致不同的认知状态。

通过分析和总结学者们关于怀疑的已有研究, 不难发现, 我们至少还能从两个方面推进对怀疑的形式化研究。一方面, 以非概率的方式, 继续对基于证据的怀疑进行系统的形式化研究, 考察怀疑的逻辑性质; 另一方面, 除了将怀疑定义为静态的认知态度, 我们还可以把怀疑视作是动态的过程进行研究。本文对怀疑的形式化研究, 将基于以上两个方面展开。不论是对于作为认知态度的静态怀疑, 还是对于作为动态过程的动态的怀疑, 本文都将紧紧围绕着证据因素对它们进行分析和研究。

3 静态的怀疑

邻域语义的证据模型, 最早是由范丙申 (J. van Benthem) 和帕奎特 (E. Pacuit) 共同提出的 ([3], 第 63 页), 用于研究证据和基于证据的信念之间的关系。本文所使用的语义与范丙申等提供的语义的区别在于信念的定义, 而不同之处将直接体现在证据和信念之间的关系上。

定义 1 (语言 $\mathcal{L}$). 令 $\mathbf{At}$ 为原子公式的集合, 基础证据模型语言的递归定义如下:

$$\mathcal{L} := p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \Box\phi \mid B\phi \mid A\phi$$

其中, $p \in \mathbf{At}$ 。其它的命题连接词 ($\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) 的情况和通常的定义一样。 $\Box\phi$ 读作“认知主体有 ϕ 的证据”, $B\phi$ 读作“认知主体相信 ϕ ”以及 $A\phi$ 读作“ ϕ 在所有点上都为真”。将 E 作为 A 的对偶算子, $E\phi$ 被定义为 $\neg A\neg\phi$ 。

定义 2 (证据模型). 一个证据模型是一个三元组 $\mathcal{M} = \langle W, N, V \rangle$, 其中 W 是一个非空点集, N 是一个邻域关系: $N \subseteq W \times \wp(W)$, V 是一个赋值函数: $\mathbf{At} \rightarrow \wp(W)$ 。我们将 $N(w)$ 记作为集合 $\{X \mid w N X\}$, 特别地, 对于任意的 $w \in W$, $\emptyset \notin N(w)$ 并且 $W \in N(w)$ 。如果对于模型 $\mathcal{M}$ 中任意的两个点 w 和 v 都有 $N(w) = N(v)$,

¹根据鲍梅尔提供的概率方法, 阈值 (threshold) t 的取值范围是 $(0.5, 1]$ 。 E 在 w 点上的安全度反映了认知主体在点 w 上拒斥 E 的意愿, E 的安全度越高, 拒斥 E 的可能性越小。

那么我们称模型 $\mathcal{M}$ 是均衡的证据模型。²

定义 3 (极大有穷相交性). 一个簇 $\mathcal{X}$ 是一个 W 子集的集合, 如果对于每一个 $\mathcal{X}$ 的有限子簇 $\{X_1, \dots, X_n\} \subseteq \mathcal{X}$ 都有 $\bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i \neq \emptyset$, 那么我们称 $\mathcal{X}$ 具有有穷相交性 (f.i.p). 如果 $\mathcal{X}$ 具有有穷相交性, 并且没有其它 $\mathcal{X}$ 的扩充具有这个性质, 那么我们称 $\mathcal{X}$ 有极大有穷相交性。³

命题 1. $\mathcal{M} = \langle W, N, V \rangle$ 是一个任意的证据模型, w 是模型 $\mathcal{M}$ 中任意的一个点。对于任意的极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X} \subseteq N(w)$, 都有 $W \in \mathcal{X}$ 。

证明. 假设有一个极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X}$ 使得 $W \notin \mathcal{X}$ 。根据定义, 对于每一个 $X \in \mathcal{X}$, $X \subseteq W$ 。于是, $\bigcap \{\mathcal{X} \cup W\} = \bigcap \mathcal{X}$ 。然而, $\mathcal{X} \subseteq \{\mathcal{X} \cup W\}$ 。于是, $\mathcal{X}$ 就不是极大的。但这与 $\mathcal{X}$ 是一个极大有穷相交性的簇相矛盾。因此原假设不成立。□

为了让读者对极大有穷相交性有更加直观的了解, 我们将通过具体的证据模型来对它进行说明:

$\mathcal{M} = \langle W, N, V \rangle$ 是一个证据模型, $W = \{w, u, v\}$, $N(w) = \{\{u\}, \{v\}, \{w, v\}, \{w, u, v\}\}$, $N(u) = \{\{u\}, \{w, u\}, \{w, u, v\}\}$, $N(v) = \{\{w\}, \{w, u\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$, $V = \emptyset$ 。

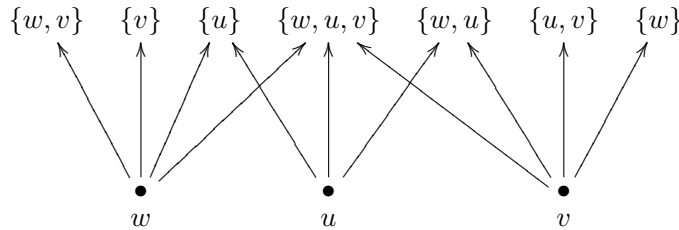


图 1: 证据模型例示

其中, w 的邻域 $N(w)$ 中有两个有极大有穷相交性的簇, 分别是 $\mathcal{X}_1 = \{\{u\}, \{w, u, v\}\}$, $\mathcal{X}_2 = \{\{v\}, \{w, v\}, \{w, u, v\}\}$; u 的邻域 $N(u)$ 中有一个有极大有穷相交性的簇 $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y} = \{\{u\}, \{w, u\}, \{w, u, v\}\}$; v 的邻域 $N(v)$ 中也有两个有极

²定义 2 中的证据模型定义引自文献 [3], 因其最早在文献 [3] 中被提出。文献 [3] 和 [2] 中的证据模型的定义是无差异的。其中 “uniform evidence model” 被笔者译为 “均衡的证据模型”。所谓 “uniform evidence model” 的直观理解是, 对于每一个 “uniform” 的证据模型中任意的两个点, 它们的邻域都是相同的或无差别的, 故而取 “均衡” 一词, 以表达不偏不倚之意。

³定义 3 中的极大有穷相交性定义, 参考的是范丙申和帕奎特等人对证据模型更进一步的研究中的定义, 即文献 [2] 中的定义。对于极大有穷相交性, 文献 [2] 中的定义 (Definition 2.3, 在第 99 页处) 不同于文献 [3] 的定义 (Definition 2.2, 在第 63 页处)。在帕奎特的专著《模态逻辑的邻域语义》([4]) 的一个章节 “证据和信念的逻辑” 中, 可以找到与文献 [2] 一样的极大有穷相交性的定义, 即文献 [4] 第 33 页中, Definition 1.36 对极大有穷相交性的定义。本文的研究结果是基于文献 [2] 中的极大有穷相交性的定义展开的, 不依赖于文献 [3] 的极大有穷相交性的定义。

大有穷相交性的集簇, 分别是 $\mathcal{Z}_1 = \{\{w\}, \{w, u\}, \{w, u, v\}\}$, $\mathcal{Z}_2 = \{\{w, u\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$ 。

定义 4 (真值条件). 令 $\mathcal{M} = (W, N, V)$ 是一个证据模型, 点 $w \in W$ 是模型 $\mathcal{M}$ 中任意的一个点。公式 $\phi \in \mathcal{L}$ 的真值条件被递归定义为:

- $\mathcal{M}, w \models p$, 当且仅当, $w \in V(p)$ 。
- $\mathcal{M}, w \models \neg\phi$, 当且仅当, $\mathcal{M}, w \not\models \phi$ 。
- $\mathcal{M}, w \models \phi \wedge \psi$, 当且仅当, $\mathcal{M}, w \models \phi$, 并且 $\mathcal{M}, w \models \psi$ 。
- $\mathcal{M}, w \models \Box\phi$, 当且仅当, 存在一个有关系 wNX 的集合 X , 使得对每一个点 $v \in X$, 都有 $\mathcal{M}, v \models \phi$ 。
- $\mathcal{M}, w \models B\phi$, 当且仅当, 对于每一个具有极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X} \subseteq N(w)$ 和对每一个点 $v \in \bigcap \mathcal{X}$ 都有 $\mathcal{M}, v \models \phi$, 并且对于任意的 $X \in N(w)$, 倘若存在一个点 $x \in X \in \mathcal{X}$ 使得 $\mathcal{M}, x \models \neg\phi$, 那么存在另一个点 $u \in X$ 使得 $u \in \bigcap \mathcal{X}$ 。
- $\mathcal{M}, w \models A\phi$, 当且仅当, 对于所有的点 $v \in W$, $\mathcal{M}, v \models \phi$ 。

将模型 $\mathcal{M}$ 中所有满足 ϕ 的点的集合记作 $\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ 。可满足性和有效性的定义和它们在标准模态逻辑中的定义一样。

就基于证据的信念而言, 我们认为有证据支持 ϕ 并不意味着认知主体就会相信 ϕ 。为了相信一个命题 ϕ , 认知主体需要考虑他所持有的全部证据, 具体而言, 就是考察证据集中每一个具有极大有穷相交性的证据集簇 $\mathcal{X}$ 。这样的思想, 在范丙申等人定义的 B 算子中就已经被体现出来了。([3], 第 64 页) 在他们的基础上, 本文对 B 算子还做了额外的要求: 相信一个命题 ϕ , 就意味在证据集中的每一个证据里, 都至少有一个满足 ϕ 的点。

通过考察公式 $\Box\phi \rightarrow \neg B\neg\phi$ 的有效性, 就能够体现出二者的区别。在范丙申等人对证据模型的进一步研究中, 曾通过一个无穷模型指出, 依据他们对 B 算子的定义, $\Box\phi \rightarrow \neg B\neg\phi$ 在所有证据模型的类上不是有效的, 仅在这样的证据模型类上才是有效的, 即极大有穷相交性簇的广义交集不为空的模型类。⁴ ([2], 第 100 页)

依据本文所提供的语义, $\Box\phi \rightarrow \neg B\neg\phi$ 在所有证据模型的类上也是有效的。就直观理解而言, 该命题的有效性体现了证据和信念之间的关系: 证据集中有某个命题的证据, 就意味着不会相信该命题的否定。从另一个方向上说, 相信了某个命题的否定, 就意味着, 证据集中没有该命题的证据。

命题 2. $\Box\phi \rightarrow \neg B\neg\phi$ 是有效的。

⁴因此, 范丙申等在保持信念语义不变的情况下转向研究极大有穷相交性的簇的广义交集不为空的证据模型类。

证明. 假定 $\mathcal{M}, w \models \Box\phi$, 根据定义, 存在一个证据 $X \in N(w)$ 使得 $X \subseteq \llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$, 又根据定义 $\emptyset \notin N(w)$, 因此 X 不是空集。也就是说, X 中的每一个点都满足 ϕ , 并且 X 中至少有一个点 x 使得 $\mathcal{M}, x \models \phi$ 。假设 $\mathcal{M}, w \models B\neg\phi$, 首先, 根据定义, 对于每一个有极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X}$, 都会使得 $\bigcap \mathcal{X}$ 中的每个点都满足 $\neg\phi$ 。其次, 由于 X 不是空集, 于是根据定义, 对于每个含有 X 的簇 $\mathcal{X}$, 还要求 X 中存在另一个点 u 使得 $u \in \bigcap \mathcal{X}$, 也就是说, $\mathcal{M}, u \models \neg\phi$ 。这就与 $X \subseteq \llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ 矛盾了。因此, 原假设不成立。 $\square$

由命题 2 很容易联系到引文中已经提到的内容, 即在维特根斯坦看来, “合理的怀疑” 需要理由。就证据模型而言, 怀疑命题 ϕ 就需要有 $\neg\phi$ 的证据, 这也正是怀疑 ϕ 意味着不相信 ϕ 的原因之所在。于此同时, 怀疑 ϕ 也意味着并非模型中所有的点都满足 $\neg\phi$, 因为倘若所有的点都满足 $\neg\phi$ 将会直接拒斥 ϕ , 而不会怀疑 ϕ 。因此, 本文将怀疑定义为 “存在满足 ϕ 的可能性, 但是有 $\neg\phi$ 的证据”:

$$D\phi := \Box\neg\phi \wedge E\phi$$

将 $D\phi$ 读作 “ ϕ 是可疑的”, 其真值条件如下:

$$\mathcal{M}, w \models D\phi, \text{ 当且仅当, } \mathcal{M}, w \models \Box\neg\phi \wedge E\phi$$

相应地, 与怀疑相关的有效式和非有效式主要有:

表 1: 与怀疑相关的有效式和非有效式

有效式	非有效式
$D\phi \rightarrow \Box\neg\phi$	$D(\phi \wedge \psi) \rightarrow (D\phi \wedge D\psi)$
$D(\phi \vee \psi) \rightarrow (D\phi \vee D\psi)$	$(D\phi \wedge D\psi) \rightarrow D(\phi \wedge \psi)$
$A\phi \rightarrow \neg D\phi$	$D(\phi \vee \psi) \rightarrow D\phi$
$A\neg\phi \rightarrow \neg D\phi$	$(D\phi \vee D\psi) \rightarrow D(\phi \vee \psi)$
$\Box\phi \rightarrow \neg B\neg\phi$	$(D\phi \rightarrow D\psi) \rightarrow D(\phi \rightarrow \psi)$
$D\phi \rightarrow \neg B\phi$	$D(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (D\phi \rightarrow D\psi)$
$D(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (A\phi \rightarrow D\psi)$	$D\phi \rightarrow \neg D\neg\phi$
	$D\phi \rightarrow D\neg\phi$
	$\neg B\phi \rightarrow D\phi$

从表 1 上看⁵, $\neg B\phi \rightarrow D\phi$ 不是有效的, 解决了萨蒙的定义中的问题, 即并非对于任意的命题, 要么相信该命题, 要么怀疑该命题。此外, $D\phi \rightarrow \Box\neg\phi$ 的有效性直接表达了怀疑是基于证据的思想, 再结合 $D\phi \rightarrow D\neg\phi$ 不是有效的, 则解决了奥尔森和普罗耶蒂所提供的定义中的问题, 即怀疑状态可以通过审视证据模型中的证据来判定, 是怀疑一个命题, 还是怀疑一个命题的否定, 而不是像奥尔森和普罗耶蒂给出的定义那样, 怀疑一个命题的同时, 总会怀疑该命题的否定。

⁵表 1 中的公式有效性的证明参见附录 A。

$\Box\phi \rightarrow \neg B\neg\phi$ 是有效的, 表达了不相信一个命题的认知状态, 是由该命题的否定的证据导致的。再结合 $D\phi \rightarrow \neg B\phi$ 的有效性和 $D\phi \rightarrow \Box\neg\phi$ 的有效性, 不难发现怀疑状态下的不相信状态, 正是由引发怀疑的证据所导致的, 即在怀疑某个命题 ϕ 时, 不相信 ϕ 的原因在于有 $\neg\phi$ 的证据。而这点恰与鲍梅尔提出的定义中的要求 (4) 是契合的, 即我们在怀疑命题 H 时, 不相信命题 H 是因为我们有证据 E 。

更进一步的, 对 D 算子的逻辑性质进行考察, 发现 $D(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (D\phi \rightarrow D\psi)$ 不是有效的, 这说明 D 算子在分配律上是不成立的。

命题 3. $D(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (D\phi \rightarrow D\psi)$ 不是有效的。

证明. 考虑这样的一个证据模型 $\mathcal{M}$, 其中 $W = \{w, u, v\}$, $N(w) = N(u) = N(v) = \{\{w\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$, $V(p) = \{w\}$, $V(q) = \emptyset$ 。

- 由于 $\mathcal{M}, w \models p \wedge \neg q$, 也就是 $\mathcal{M}, w \models \neg(p \rightarrow q)$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box\neg(p \rightarrow q)$ 。又因为 $\mathcal{M}, u \models \neg p \vee q$, 也就是 $\mathcal{M}, u \models p \rightarrow q$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models E(p \rightarrow q)$ 。于是, $\mathcal{M}, w \models D(p \rightarrow q)$ 。
- 由于 $\mathcal{M}, u \models \neg p$ 并且 $\mathcal{M}, v \models \neg p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box\neg p$ 。又因为 $\mathcal{M}, w \models p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models Ep$ 。于是, $\mathcal{M}, w \models Dp$ 。但是, 由于 $V(q) = \emptyset$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models Eq$ 。于是, $\mathcal{M}, w \not\models Dq$ 。因此, $\mathcal{M}, w \not\models Dp \rightarrow Dq$ 。

综上, $\mathcal{M}, w \not\models D(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (D\phi \rightarrow D\psi)$ 。 $\square$

虽然公式 $D(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (D\phi \rightarrow D\psi)$ 不是有效的, 但我们总能找到怀疑算子所遵循的规律, 比如公式 $D(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (A\phi \rightarrow D\psi)$ 就是有效的。

命题 4. $D(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (A\phi \rightarrow D\psi)$ 是有效的。

证明. 假定 $\mathcal{M}, w \models D(\phi \rightarrow \psi)$ 并且 $\mathcal{M}, w \models A\phi$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \models D(\phi \rightarrow \psi)$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w \models \Box\neg(\phi \rightarrow \psi) \wedge E(\phi \rightarrow \psi)$, 也就是 $\mathcal{M}, w \models \Box(\phi \wedge \neg\psi)$ 并且 $\mathcal{M}, w \models E(\neg\phi \vee \psi)$ 。再根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box(\phi \wedge \neg\psi)$ 当且仅当存在一个 $X \in N(w)$ 使得 X 中的每一个点都满足 $\phi \wedge \neg\psi$, 因此也就存在一个 $X \in N(w)$ 使得 X 中的每一个点都满足 $\neg\psi$, 即 $\mathcal{M}, w \models \Box\neg\psi$ 。由于 $\mathcal{M}, w \models A\phi$, 故模型中所有的点都满足 ϕ , 而 $\mathcal{M}, w \models E(\neg\phi \vee \psi)$, 也就是模型 $\mathcal{M}$ 中存在一个点满足 $\neg\phi \vee \psi$, 因此, 模型 $\mathcal{M}$ 中存在一个点满足 ψ , 即 $\mathcal{M}, w \models E\psi$ 。综上, $\mathcal{M}, w \models D\psi$ 。 $\square$

$D(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (A\phi \rightarrow D\psi)$ 是有效的, 该公式有效性的直观意义在于, 如果被怀疑的命题是一个蕴涵式, 那么, 一旦我们确认该蕴涵式的前件在所有的点上都为真, 我们的怀疑焦点就会转移到该蕴涵式的后件上。它给予我们的一些启发在于, 在推理过程中, 怀疑也有着它所遵循的规律, 我们通过发现和运用这些规律也可以获得新的认识。

4 动态的怀疑

在第三节将怀疑作为静态算子考察时,通过命题2得出怀疑某个命题 ϕ 时,不相信 ϕ 是因为有 $\neg\phi$ 的证据。倘若认知主体的初始认知状态是相信 ϕ ,那么将 $\neg\phi$ 的证据引入到证据集中后,认知主体的认知状态究竟会发生怎样的变化?

定义5(动态怀疑). $\mathcal{M} = \langle W, N, V \rangle$ 是一个证据模型, 并且 $\phi \in \mathcal{L}$. 怀疑后的模型 $\mathcal{M}^{i\phi} = \langle W^{i\phi}, N^{i\phi}, V^{i\phi} \rangle$, 其中 $W^{i\phi} = W$, $V^{i\phi} = V$, $N^{i\phi}(w) = N(w) \cup \{\{u\} \mid u \in \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}\}$. 将 $[_i\phi]\psi$ 记作: “如果初始时, 相信 ϕ 且存在着 $\neg\phi$ 的可能性, 那么在怀疑 ϕ 之后, ψ 为真”。它的真值条件如下:

$\mathcal{M}, w \models [_i\phi]\psi$, 当且仅当, 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}^{i\phi}, w \models \psi$.

通过观察动态怀疑的定义可以发现, 被添加到证据模型中的集合不是某一个证据, 而是每一个具体的证据的集合。将这样的更新理解为动态怀疑的更新是基于以下两点考虑: (1) 每个引发怀疑的可能性都是具体的, 即该可能性引发怀疑不仅仅是因为该可能性存在, 而是确有支持该可能性的证据。(2) 单个的证据被提出时会容易被否掉, 因为认知主体往往不会由于单个的证据被提出而直接改变自己的信念, 而会检测被提出的单个证据是不是站的住脚, 即是否能作为证据被接纳。在科学发展史上, 广为人知的对“地心说”的怀疑就是具体的例子。⁶

命题5. 对于任意的证据模型 $\mathcal{M}$ 和任意的 $p \in \mathcal{A}t$, $\mathcal{M}, w \models [_i p]Dp$.

证明. 假定 $\mathcal{M}, w \models Bp \wedge \neg Ap$. 由于 $N^{i p}(w) = N(w) \cup \{\{u\} \mid u \in \llbracket \neg p \rrbracket_{\mathcal{M}}\}$ 以及 $\mathcal{M}, w \models \neg Ap$, 又因为在动态变化中 $V(\neg p) = V^{i p}(\neg p)$, 于是至少有一个单元素集 $\{u\}$ 并且 $\mathcal{M}^{i p}, u \models \neg p$, 也就是至少存在一个非空的证据 $X \in N^{i p}(w)$ 使得 $X \subseteq \llbracket \neg p \rrbracket_{\mathcal{M}^{i p}}$, 根据定义, $\mathcal{M}^{i p}, w \models \Box \neg p$. 由于 $\mathcal{M}, w \models Bp \wedge \neg Ap$, 也就是 $\mathcal{M}, w \models Bp$ 并且 $\mathcal{M}, w \models \neg Ap$. 首先, 由于 $\mathcal{M}, w \models Bp$, 根据定义, 对于每一个有极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X} \subseteq N(w)$, 都有 $\bigcap \mathcal{X} \subseteq \llbracket p \rrbracket_{\mathcal{M}}$; 其次, 由于 $\mathcal{M}, w \models \neg Ap$ 且 $W \in N(w)$, 再根据命题1, 对于每一个有极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X}$, 至少存在一个证据 $W \in \mathcal{X}$, 使得 W 中存在一个点 y 并且 $\mathcal{M}, y \models \neg p$. 结合 $\mathcal{M}, w \models Bp$, 根据 B 的语义, W 中至少存在一个不同于 y 的点 v , 使得 $\mathcal{M}, v \models p$. 又因为 $W = W^{i p}$ 并且 $V(p) = V^{i p}(p)$, 故而存在一个点 $v \in W^{i p}$, 使得 $\mathcal{M}^{i p}, v \models p$, 根据 E 的语义, $\mathcal{M}^{i p}, w \models Ep$. 因此, $\mathcal{M}^{i p}, w \models Dp$, 根据 $_i$ 的语义, $\mathcal{M}, w \models [_i p]Dp$. $\square$

⁶在哥白尼(Copernicus)正式提出“日心说”之前, 由于权威教会对“地心说”的支持, 以及在一定时期里依据“地心说”的本轮模型可以在一定程度上正确地预测天象, 在生产实践中也起过一定的作用, 因而天文学家们相信“地心说”。然而, 随着天文仪器的不断完善, 观测到的行星实际位置同本轮模型计算结果的偏差逐渐出现。起初, 人们并没有认识到这是由于“地心说”本身的错误造成的, 为了修正误差, 不得不反复地引入本轮来补救“地心说”。到了哥白尼的时代, 反复嵌套的本轮已经达近百个, 却仍不能满意地计算出行星的准确位置。正是由于彼时每一个具体的偏差的叠加, 使得当时的天文学家们转而怀疑“地心说”。

命题 5 为我们说明了对于任意的原子命题 p ，如果一个认知主体的初始认知状态是相信 p ，那么在引入 $\neg p$ 的证据集后，该认知主体就会怀疑 p ，这也意味着彼时该认知主体不相信 p 。遗憾的是，命题 5 的有效性并不能推广到任意的公式。

不妨考虑这样的一个模型 $\mathcal{M}$ ，其中 $W = \{w, u, v\}$ ， $N(w) = \{\{w, u\}, \{w, v\}, \{w, u, v\}\}$ ， $N(u) = N(v) = \{\{w, v\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$ ， $V(p) = \{w\}$ 。根据定义， $\mathcal{M}, w \models Bp$ ， $\mathcal{M}, w \models BBp$ ， $\mathcal{M}, u \models \neg Bp$ ， $\mathcal{M}, v \models \neg Bp$ 以及 $\mathcal{M}, w \models E\neg Bp$ 。更进一步地，根据定义， $\mathcal{M}^{iBp}, w \models \neg Bp$ ， $\mathcal{M}^{iBp}, u \models \neg Bp$ 和 $\mathcal{M}^{iBp}, v \models \neg Bp$ ，于是 $\mathcal{M}^{iBp}, w \not\models EBp$ ，根据定义， $\mathcal{M}^{iBp}, w \not\models DBp$ 。因此， $\mathcal{M}, w \not\models [\downarrow Bp]DBp$ 。

从技术的角度上说，不能推广到任意公式是由于动态变化后证据集发生了变化，而证据集的变化则会导致证据模型中有极大有穷相交性的簇的重组，形成新的集簇，此举会对 B 前置的公式在新模型中是否被满足产生很大的影响。尽管命题 5 的有效性不能推广到任意的公式，但它也体现出由证据集变化导致的认知状态的改变不是机械的而是灵活的，即我们不能仅简单的考虑新添加的证据来判断认知状态的变化，而更应该重新审视新的证据集，对新形成的证据模型的模型结构做整体的考察。

命题 6. ϕ 是语言 $\mathcal{L}$ 中的任意公式。如果 $\mathcal{M} = \langle W, N, V \rangle$ 是一个均衡的证据模型，那么对于 W 中的任意两个点 w, v ， $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, v \models B\phi \wedge \neg A\phi$ 。

证明. 命题 6 的证明直接依据 B 和 A 算子的语义，以及均衡证据模型的性质就可以得出，故证明从略。□

就命题 6 的直观理解而言，它表达了在任意一个均衡的证据模型中，对于模型中任意的两个点，它们的邻域都是相同的，故而 $B\phi \wedge \neg A\phi$ 的取值与模型中的点无关。因此，命题 6 为我们在均衡的证据模型类上对动态怀疑的性质进行研究奠定了基础。

引理 1. 令 $\mathcal{M}$ 是任意的一个证据模型， w 是模型 $\mathcal{M}$ 中任意的一个点， $\mathcal{M}^{i\phi}$ 是模型 $\mathcal{M}$ 在动态怀疑 ϕ 后生成的模型。如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$ ，那么 $\bigcup_{\mathcal{Y} \subseteq N^{i\phi}(w)} \bigcap \mathcal{Y} = \bigcup_{\mathcal{X} \subseteq N(w)} \bigcap \mathcal{X} \cup \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ ，其中 $\mathcal{X}$ 是模型 $\mathcal{M}$ 中任意的一个极大有穷相交性的簇， $\mathcal{Y}$ 是模型 $\mathcal{M}^{i\phi}$ 中任意的一个极大有穷相交性的簇。

证明. 假定 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$ ，根据定义，模型 $\mathcal{M}$ 中的每一个极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X}$ ，它的广义交集的每一个点都满足 ϕ 并且广义交集不是空集，⁷ 即 $\bigcap \mathcal{X} \subseteq$

⁷ 由于 $\mathcal{M}, w \models \neg A\phi$ ，根据定义，也就是 W 中存在一个点 s ，使得 $\mathcal{M}, s \models \neg\phi$ 。又根据定义 $W \in N(w)$ ，所以模型 $\mathcal{M}$ 中的每一个极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X}$ 都包含 W 。又由于 $\mathcal{M}, w \models B\phi$ ，根据定义，对于每一个 $\mathcal{X}$ ， W 中都存在一个不同于 s 的点落在 $\bigcap \mathcal{X}$ 中，且 $\bigcap \mathcal{X}$ 中的点都是满足 ϕ 的。因此，模型 $\mathcal{M}$ 中的每一个极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X}$ ，它的广义交集的每一个点都满足 ϕ 并且广义交集不是空集。

$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ 并且 $\bigcap \mathcal{X} \neq \emptyset$ 。由于 $N^{\iota\phi}(w) = N(w) \cup \{\{u\} \mid u \in \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}\}$, 故 $\mathcal{M}^{\iota\phi}$ 中所有极大有穷相交性的簇的集合 $\{\mathcal{Y} \mid \mathcal{Y} \text{ 是模型 } \mathcal{M}^{\iota\phi} \text{ 中一个有极大有穷相交性的簇}\} = \{\mathcal{X} \mid \mathcal{X} \text{ 是模型 } \mathcal{M} \text{ 中的一个有极大有穷相交性的簇}\} \cup \{\mathcal{Z} \mid \mathcal{Z} = \{X_1, \dots, X_n, \{u\}\}, \text{ 其中 } u \in \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}} \text{ 并且 } u \in X_1 \in N(w), \dots, u \in X_n \in N(w)\}$ 。⁸ 因此,

$$\bigcup_{\mathcal{Y} \subseteq N^{\iota\phi}(w)} \cap \mathcal{Y} = \bigcup_{\mathcal{X} \subseteq N(w)} \cap \mathcal{X} \cup \bigcup_{\mathcal{Z} \subseteq N(w)} \cap \mathcal{Z}.$$

由于 $\mathcal{Z}$ 是仅由某个单元元素集合 $\{u\}$ 和原模型 $\mathcal{M}$ 中某些含有点 u 的证据构成的, 因此 $\bigcap \mathcal{Z}$ 就是 $\{u\}$ 。于是, $\bigcup_{\mathcal{Z} \subseteq N(w)} \cap \mathcal{Z} = \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ 。因此, $\bigcup_{\mathcal{Y} \subseteq N^{\iota\phi}(w)} \cap \mathcal{Y} =$

$$\bigcup_{\mathcal{X} \subseteq N(w)} \cap \mathcal{X} \cup \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}.$$

□

定理 1. 以下归约公理在均衡的证据模型类上是有效的:

1. $[\iota\phi]p \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow p) \quad (p \in \mathbf{At})$
2. $[\iota\phi](\neg\psi) \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow \neg[\iota\phi]\psi)$
3. $[\iota\phi](\psi \wedge \tau) \leftrightarrow ([\iota\phi]\psi \wedge [\iota\phi]\tau)$
4. $[\iota\phi]A\psi \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow A[\iota\phi]\psi)$
5. $[\iota\phi]\Box\psi \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow (\Box[\iota\phi]\psi \vee \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi)))$
6. $[\iota\phi]B\psi \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow (B[\iota\phi]\psi \wedge A(\neg\phi \rightarrow [\iota\phi]\psi)))$

证明. 归约公理 1–3 是分别关于原子命题和布尔公式的情况, 它们分别与范丙申等给出的“证据添加”的归约公理 **EA1**、**EA2** 和 **EA3** 相对应 ([3], 第 73 页), 相应的归约公理的有效性证明方法也是一样的。因此, 归约公理的有效性证明将聚焦于 $[\iota\phi]A\psi$ 、 $[\iota\phi]\Box\psi$ 和 $[\iota\phi]B\psi$ 的情况。

令 $\mathcal{M}$ 为任意的均衡证据模型, w, u, v, x, y, z, s 是模型 $\mathcal{M}$ 中任意的点。归约公理 4–6 的证明如下:

- 归约公理 4 的证明。要证 $[\iota\phi]A\psi \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow A[\iota\phi]\psi)$ 在均衡的模型类上是有效的, 需证 $\mathcal{M}, w \models [\iota\phi]A\psi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow A[\iota\phi]\psi$ 。
 $\mathcal{M}, w \models [\iota\phi]A\psi$, 当且仅当 (根据 ι 的语义), 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, w \models A\psi$, 当且仅当 (根据 A 的语义), 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么对于每一个点 $v \in W^{\iota\phi}$ 使得 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, v \models \psi$, 当且仅当 (根据命题 6 和定义), 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么对于每一个点 $v \in W$ 使得 $\mathcal{M}, v \models [\iota\phi]\psi$, 当

⁸就直观理解而言, 模型 $\mathcal{M}^{\iota\phi}$ 中的有极大有穷相交性的簇由两部分组成, 其一, 是模型 $\mathcal{M}$ 中原本的那些有极大有穷相交性的簇, 因为在动态变化中, 被添加到 $N(w)$ 中的每一个集合都是单元元素集, 且每个单元元素集中的点都满足 $\neg\phi$ 的, 这些单元元素集和 $\mathcal{M}$ 中原本的有极大有穷相交性的簇的广义交的交必定为空, 因为模型 $\mathcal{M}$ 中的每一个极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X}$ 的广义交集的每一个点都满足 ϕ 且广义交集不是空集, 因而, 模型 $\mathcal{M}$ 中原本的那些有极大有穷相交性的簇在动态变化后都被保留了下来; 其二, 是由模型 $\mathcal{M}$ 中的证据集和新添加的单元元素集, 形成的新的有极大有穷相交性的簇, 由于是和单元元素集形成的极大有穷相交性的簇, 这些新形成的有极大有穷相交性的簇, 它们的广义交就是一个一个的单元元素集, 且这些单元元素集中的点都满足 $\neg\phi$, 而这些广义交再并起来, 就是 $\llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ 。

且仅当 (根据 A 的语义), 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}, w \models A[\iota\phi]\psi$, 即 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow A[\iota\phi]\psi$ 。

- 归约公理 5 的证明。要证 $[\iota\phi]\Box\psi \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow (\Box[\iota\phi]\psi \vee \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi)))$ 在均衡的模型类上是有效的, 需证 $\mathcal{M}, w \models [\iota\phi]\Box\psi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow (\Box[\iota\phi]\psi \vee \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi))$ 。

($\Rightarrow$) 假设 $\mathcal{M}, w \models [\iota\phi]\Box\psi$, 那么根据 ι 的语义, 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, w \models \Box\psi$ 。根据 $\Box$ 的语义, 也就是, 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么存在一个 $X \in N^{\iota\phi}(w)$ 使得 $X \subseteq \llbracket \psi \rrbracket_{\mathcal{M}^{\iota\phi}}$ 。由于 $N^{\iota\phi}(w) = N(w) \cup \{\{u\} \mid u \in \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}\}$, 因此, 有且仅有两种情况会分别使得模型 $\mathcal{M}^{\iota\phi}$ 中的 w 满足 $\Box\psi$:

- X 是模型 $\mathcal{M}$ 中的一个证据, 即 $X \in N(w)$ 。怀疑 ϕ 后会有 ψ 的证据, 是因为 X 中的每一个点 x 在怀疑后会满足 ψ , 即 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, x \models \psi$, 根据命题 6 和 ι 的语义, $\mathcal{M}, x \models [\iota\phi]\psi$ 。因此, 在这种情况下原模型有 $\mathcal{M}, w \models \Box[\iota\phi]\psi$ 。
- X 是 $\llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ 的某个单元子集 $\{u\}$, 换言之 $X = \{u\} \subseteq \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$, 也就有 $\mathcal{M}, u \models \neg\phi$ 。怀疑 ϕ 后会有 ψ 的证据, 是因为模型 $\mathcal{M}$ 中满足 $\neg\phi$ 的点 u 在怀疑 ϕ 后都会满足 ψ , 即 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, u \models \psi$, 根据命题 6 和 ι 的语义, $\mathcal{M}, u \models [\iota\phi]\psi$ 。也就是, $\mathcal{M}, u \models \neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi$ 。因此, 在这种情况下原模型有 $\mathcal{M}, w \models \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi)$ 。

综上, 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}, w \models \Box[\iota\phi]\psi$ 或者 $\mathcal{M}, w \models \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi)$, 根据定义, 即 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow (\Box[\iota\phi]\psi \vee \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi))$ 。

($\Leftarrow$) 假设 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow (\Box[\iota\phi]\psi \vee \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi))$, 根据定义, 即如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}, w \models \Box[\iota\phi]\psi$ 或者 $\mathcal{M}, w \models \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi)$ 。

- 倘若 $\mathcal{M}, w \models \Box[\iota\phi]\psi$, 那么根据 $\Box$ 的语义, 存在一个 $X \in N(w)$, 使得 X 中的每一个点 x 都有 $\mathcal{M}, x \models [\iota\phi]\psi$ 。根据命题 6 和 ι 的语义, $\mathcal{M}^{\iota\phi}, x \models \psi$ 。由于 $N^{\iota\phi}(w) = N(w) \cup \{\{u\} \mid u \in \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}\}$, 于是, $X \in N^{\iota\phi}(w)$ 。根据 $\Box$ 的语义, $\mathcal{M}^{\iota\phi}, w \models \Box\psi$ 。
- 倘若 $\mathcal{M}, w \models \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi)$, 也就是 $\mathcal{M}, w \not\models \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi)$, 那么根据 A 的语义, 至少存在一个点 $u \in W$ 使得 $\mathcal{M}, u \models \neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi)$, 也就是 $\mathcal{M}, u \models \neg\phi$ 并且 $\mathcal{M}, u \models [\iota\phi]\psi$ 。根据命题 6 和 ι 的语义, $\mathcal{M}^{\iota\phi}, u \models \psi$ 。由于 $N^{\iota\phi}(w) = N(w) \cup \{\{u\} \mid u \in \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}\}$, 于是, $\{u\} \in N^{\iota\phi}(w)$ 。根据 $\Box$ 的语义, $\mathcal{M}^{\iota\phi}, w \models \Box\psi$ 。

综上, 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 不论是 $\mathcal{M}, w \models \Box[\dot{\iota}\phi]\psi$, 还是 $\mathcal{M}, w \models \neg A \neg(\neg\phi \wedge [\dot{\iota}\phi]\psi)$, 都能得出结论 $\mathcal{M}^{\dot{\iota}\phi}, w \models \Box\psi$ 。因此, 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}^{\dot{\iota}\phi}, w \models \Box\psi$ 。再根据 $\dot{\iota}$ 的语义, $\mathcal{M}, w \models [\dot{\iota}\phi]\Box\psi$ 。

- 归约公理 6 的证明。要证 $[\dot{\iota}\phi]B\psi \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow (B[\dot{\iota}\phi]\psi \wedge A(\neg\phi \rightarrow [\dot{\iota}\phi]\psi)))$ 在均衡的模型类上是有效的, 需证 $\mathcal{M}, w \models [\dot{\iota}\phi]B\psi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow (B[\dot{\iota}\phi]\psi \wedge A(\neg\phi \rightarrow [\dot{\iota}\phi]\psi))$ 。

($\Rightarrow$) 假设 $\mathcal{M}, w \models [\dot{\iota}\phi]B\psi$, 那么根据 $\dot{\iota}$ 的语义, 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}^{\dot{\iota}\phi}, w \models B\psi$ 。再根据 B 的语义, 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么对每一个极大有穷相交性的簇 $\mathcal{Y} \subseteq N^{\dot{\iota}\phi}(w)$ 和其广义交集的每一个点 $v \in \bigcap \mathcal{Y}$, 都有 $\mathcal{M}^{\dot{\iota}\phi}, v \models \psi$, 并且对于任意的 $Y \in N^{\dot{\iota}\phi}(w)$, 倘若存在一个点 $y \in Y \in \mathcal{Y}$ 使得 $\mathcal{M}^{\dot{\iota}\phi}, y \models \neg\psi$, 那么存在另一个点 $z \in Y$ 使得 $z \in \bigcap \mathcal{Y}$ 。根据引理 1, 我们有:

$$\bigcup_{\mathcal{Y} \subseteq N^{\dot{\iota}\phi}(w)} \bigcap \mathcal{Y} = \bigcup_{\mathcal{X} \subseteq N(w)} \bigcap \mathcal{X} \cup \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$$

如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 根据 B 的语义, $N(w)$ 中的每一个极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X}$, 它的广义交集的每一个点都满足 ϕ , 并且广义交集不是空集。又每一个包含集合 $\{u\} (u \in \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}})$ 的极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X}$ 的广义交集就是 $\{u\}$ 。对于每一个 $Y \in N^{\dot{\iota}\phi}(w)$, Y 中都存在一个点 z 使得 $z \in \bigcap \mathcal{Y}$ 。而对于每一个点 $v \in \bigcup_{\mathcal{Y} \subseteq N^{\dot{\iota}\phi}(w)} \bigcap \mathcal{Y}$,

- 如果 $v \in \bigcup_{\mathcal{X} \subseteq N(w)} \bigcap \mathcal{X}$, 那么 $\mathcal{M}^{\dot{\iota}\phi}, v \models \psi$, 根据命题 6 和 $\dot{\iota}$ 的语义, $\mathcal{M}, v \models [\dot{\iota}\phi]\psi$ 。因此, $\mathcal{M}, w \models B[\dot{\iota}\phi]\psi$ 。
- 如果 $v \in \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$, 即如果 $\mathcal{M}, v \models \neg\phi$, 那么 $\mathcal{M}^{\dot{\iota}\phi}, v \models \psi$, 又根据命题 6 和 $\dot{\iota}$ 的语义, $\mathcal{M}, v \models [\dot{\iota}\phi]\psi$, 故 $\mathcal{M}, v \models \neg\phi \rightarrow [\dot{\iota}\phi]\psi$ 。由于 v 是 $\llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ 中任意的一个点, 并且 $\llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}} \subseteq \bigcup_{\mathcal{Y} \subseteq N^{\dot{\iota}\phi}(w)} \bigcap \mathcal{Y}$, 于是模型 $\mathcal{M}$ 中所有满足 $\neg\phi$ 的点都会满足 $[\dot{\iota}\phi]\psi$, 也就是说, 它们都满足 $\neg\phi \rightarrow [\dot{\iota}\phi]\psi$ 。而模型 $\mathcal{M}$ 中不满足 $\neg\phi$ 的点, 根据 $\rightarrow$ 的真值条件, 也都会满足 $\neg\phi \rightarrow [\dot{\iota}\phi]\psi$ 。因此, $\mathcal{M}, w \models A(\neg\phi \rightarrow [\dot{\iota}\phi]\psi)$ 。

综上, 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}, w \models B[\dot{\iota}\phi]\psi$ 并且 $\mathcal{M}, w \models A(\neg\phi \rightarrow [\dot{\iota}\phi]\psi)$, 根据定义即 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow (B[\dot{\iota}\phi]\psi \wedge A(\neg\phi \rightarrow [\dot{\iota}\phi]\psi))$ 。

($\Leftarrow$) 假设 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow (B[\dot{\iota}\phi]\psi \wedge A(\neg\phi \rightarrow [\dot{\iota}\phi]\psi))$, 根据定义, 即如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}, w \models B[\dot{\iota}\phi]\psi$ 并且 $\mathcal{M}, w \models A(\neg\phi \rightarrow [\dot{\iota}\phi]\psi)$ 。如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么根据 B 的语义, $N(w)$ 中的每一个极大有穷相交性的簇 $\mathcal{X}$ 的广义交集的每一个点 x 都满足 ϕ , 并且广义交集不是空集。由

于 $\mathcal{M}, w \models B[\iota\phi]\psi$, 再根据 B 的语义, 对于每一个的 $x \in \bigcap \mathcal{X}$, $\mathcal{M}, x \models [\iota\phi]\psi$, 再根据命题 6 和 ι 的语义, $\mathcal{M}^{\iota\phi}, x \models \psi$ 。由于 $\mathcal{M}, w \models A(\neg\phi \rightarrow [\iota\phi]\psi)$, 根据 A 的语义, 对每一个 $s \in W$, $\mathcal{M}, s \models \neg\phi \rightarrow [\iota\phi]\psi$ 。于是, 对于每一个 $z \in \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}, z \models [\iota\phi]\psi$ 。再根据命题 6 和 ι 的语义, $\mathcal{M}^{\iota\phi}, z \models \psi$ 。于是, 对于每一个 $v \in \bigcup_{\mathcal{X} \subseteq N(w)} \bigcap \mathcal{X} \cup \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$, 都有 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, v \models \psi$ 。根据引理 1, 我们有:

$$\bigcup_{\mathcal{Y} \subseteq N^{\iota\phi}(w)} \bigcap \mathcal{Y} = \bigcup_{\mathcal{X} \subseteq N(w)} \bigcap \mathcal{X} \cup \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$$

因此, 对每一个极大有穷相交性的簇 $\mathcal{Y} \subseteq N^{\iota\phi}(w)$, 其广义交集的每一个点 v , 都有 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, v \models \psi$, 并且 $\bigcap \mathcal{Y} \neq \emptyset$ 。⁹ 于是, 对于任意的 $Y \in N^{\iota\phi}(w)$, 倘若存在一个点 $y \in Y \in \mathcal{Y}$ 使得 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, y \models \neg\psi$, 那么始终有一个点 $t \in Y$ 使得 $t \in \bigcap \mathcal{Y}$ 。根据 B 的语义, $\mathcal{M}^{\iota\phi}, w \models B\psi$ 。再根据 ι 的语义, $\mathcal{M}, w \models [\iota\phi]B\psi$ 。□

推论 1. 算子 E 前置公式的归约公理 $[\iota\phi]E\psi \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow E[\iota\phi]\psi)$, 在均衡的证据模型类上是有效的。

证明. 令 $\mathcal{M}$ 为任意的均衡证据模型, w 和 v 是 $\mathcal{M}$ 中任意的点。要证 $[\iota\phi]E\psi \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow E[\iota\phi]\psi)$ 在均衡的证据模型类上是有效的, 需证 $\mathcal{M}, w \models [\iota\phi]E\psi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow E[\iota\phi]\psi$ 。

假设 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$ ¹⁰, $\mathcal{M}, w \models [\iota\phi]E\psi$, 当且仅当 (根据假设和 ι 的语义), $\mathcal{M}^{\iota\phi}, w \models E\psi$, 当且仅当 (根据 E 和 A 互为对偶算子), $\mathcal{M}^{\iota\phi}, w \models \neg A\neg\psi$, 当且仅当 (根据假设和 ι 的语义), $\mathcal{M}, w \models [\iota\phi]\neg A\neg\psi$, 当且仅当 (根据假设和定理 1), $\mathcal{M}, w \models \neg[\iota\phi]A\neg\psi$, 当且仅当 (根据 $\neg$ 的真值条件), $\mathcal{M}, w \not\models [\iota\phi]A\neg\psi$, 当且仅当 (根据假设和定理 1), $\mathcal{M}, w \not\models A[\iota\phi]\neg\psi$, 当且仅当 (根据 A 的语义), 存在一个点 $v \in W$ 使得 $\mathcal{M}, v \models \neg[\iota\phi]\neg\psi$, 当且仅当 (根据 $\neg$ 的真值条件), 存在一个点 $v \in W$ 使得 $\mathcal{M}, v \not\models [\iota\phi]\neg\psi$, 当且仅当 (根据假设和定理 1), 存在一个点 $v \in W$ 使得 $\mathcal{M}, v \models \neg[\iota\phi]\psi$, 当且仅当 (根据 $\neg$ 的真值条件), 存在一个点 $v \in W$ 使得 $\mathcal{M}, v \models [\iota\phi]\psi$, 当且仅当 (根据 E 的语义), $\mathcal{M}, w \models E[\iota\phi]\psi$, 当且仅当 (根据假设和定义), $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow E[\iota\phi]\psi$ 。□

就推论 1 的直观理解而言, 它表达了在怀疑 ϕ 后的模型中有一个点满足 ψ , 当且仅当, 在怀疑 ϕ 前的模型中有一个点, 该点在怀疑 ϕ 后会满足 ψ 。

⁹根据引理 1, $\bigcup_{\mathcal{Y} \subseteq N^{\iota\phi}(w)} \bigcap \mathcal{Y} = \bigcup_{\mathcal{X} \subseteq N(w)} \bigcap \mathcal{X} \cup \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ 实际上就是 $\bigcup_{\mathcal{Y} \subseteq N^{\iota\phi}(w)} \bigcap \mathcal{Y} = \bigcup_{\mathcal{X} \subseteq N(w)} \bigcap \mathcal{X} \cup \bigcup_{\mathcal{Z} \subseteq N(w)} \bigcap \mathcal{Z}$ 。由于 $\bigcap \mathcal{X} \neq \emptyset$ 且 $\bigcap \mathcal{Z} = \{u\} (u \in \llbracket \neg\phi \rrbracket_{\mathcal{M}})$, 因此 $\bigcap \mathcal{Y} \neq \emptyset$ 。

¹⁰倘若 $\mathcal{M}, w \not\models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么根据 ι 的语义和 $\rightarrow$ 的真值条件, 很容易证得 $\mathcal{M}, w \models [\iota\phi]E\psi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow E[\iota\phi]\psi$ 。

推论 2. 算子 D 前置公式的归约公理 $[\iota\phi]D\psi \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow ((\Box[\iota\phi]\neg\psi \vee \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\neg\psi)) \wedge E[\iota\phi]\psi))$, 在均衡的证据模型类上是有效的。

证明. 令 $\mathcal{M}$ 为任意的均衡证据模型, w 是 $\mathcal{M}$ 中任意的点。若要证明 $[\iota\phi]D\psi \leftrightarrow ((B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow ((\Box[\iota\phi]\psi \vee \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi)) \wedge E[\iota\phi]\psi))$ 在均衡的证据模型类上是有效的, 需证 $\mathcal{M}, w \models [\iota\phi]D\psi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow ((\Box[\iota\phi]\psi \vee \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\psi)) \wedge E[\iota\phi]\psi)$ 。

$\mathcal{M}, w \models [\iota\phi]D\psi$, 当且仅当 (根据 ι 的语义), 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, w \models D\psi$, 当且仅当 (根据 D 的语义), 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, w \models \Box\neg\psi \wedge E\psi$, 当且仅当 (根据 $\wedge$ 的真值条件), 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, w \models \Box\neg\psi$ 并且 $\mathcal{M}^{\iota\phi}, w \models E\psi$, 当且仅当 (根据定理 1 和推论 1), 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}, w \models \Box[\iota\phi]\neg\psi \vee \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\neg\psi)$ 并且 $\mathcal{M}, w \models E[\iota\phi]\psi$, 当且仅当 (根据 $\wedge$ 的真值条件), 如果 $\mathcal{M}, w \models B\phi \wedge \neg A\phi$, 那么 $\mathcal{M}, w \models (\Box[\iota\phi]\neg\psi \vee \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\neg\psi)) \wedge E[\iota\phi]\psi$, 即 $\mathcal{M}, w \models (B\phi \wedge \neg A\phi) \rightarrow ((\Box[\iota\phi]\neg\psi \vee \neg A\neg(\neg\phi \wedge [\iota\phi]\neg\psi)) \wedge E[\iota\phi]\psi)$ 。□

相较于推论 1 而言, 推论 2 的直观则稍显复杂, 它表达了在怀疑 ϕ 后的模型中怀疑 ψ , 当且仅当, 第一, 在怀疑 ϕ 前的模型中, 要么有一个证据, 该证据中每一个点在怀疑 ϕ 都满足 $\neg\psi$, 要么模型中至少有一个满足 $\neg\phi$ 的点, 并且该点在怀疑 ϕ 后会满足 $\neg\psi$; 第二, 在怀疑 ϕ 前的模型中有一个点, 该点在怀疑 ϕ 后会满足 ψ 。

概言之, 在第四节中, 我们对怀疑的动态特征、动态怀疑导致的证据模型变化的机制进行了研究。在对怀疑的动态特征进行考察时, 我们延续了由证据导致怀疑的研究思想, 从对动态怀疑的理解出发, 结合实例提出从相信一个命题到怀疑一个命题, 是由于有新的证据被添加到证据集中。接着, 我们展现了新证据被添加到证据集后, 对整个证据模型的影响, 并指出对于模型变化的考察, 不能仅简单的考虑新添加的证据, 而更应该重新审视新的证据集, 需要对新形成的证据模型的模型结构做整体的考察。最后, 为了研究动态逻辑的完全性, 我们从均衡的证据模型类的性质着手, 证明了相应的引理、定理 (归约公理) 和推论。就所得的技术结果而言, 归约公理有效性的证明为整个公理系统的完全性证明提供了基础。

5 结束语

本文研究工作开展的初衷, 是考虑到怀疑在西方哲学上 (尤其是在西方知识论上) 所发挥的重要作用, 于是希望通过借助逻辑的工具, 对怀疑的性质进行形式化的考察。

在已有的研究中,有的学者提出了怀疑的定义,也有的学者着手开展对怀疑进行形式化研究的工作,或借助于经典模态逻辑,或与概率理论相结合。本文在回顾了学者们已有的研究的基础上,分别讨论了他们提出的怀疑定义的特征。在揭示了已有的怀疑定义的不足之处后,本文提出在邻域语义的证据模型中,分别对静态的怀疑和动态怀疑做了形式化的研究。

一方面,将怀疑作为一种静态的认知态度,并将其定义为“存在满足 ϕ 的可能性,但是有 $\neg\phi$ 的证据”,明确了基于证据的怀疑所需满足的条件。该定义不仅为既不相信一个命题也不怀疑该命题的认知状态保留了空间,还明确了怀疑一个命题时不相信该命题,是由于有该命题否定的证据所导致的。另一方面,将怀疑作为动态的过程,给出了动态怀疑算子的语义,并说明了动态怀疑导致证据模型发生变化的机制。接着,在具体展现了动态怀疑引发的证据集的变化后,在均衡的证据模型类上给出了相应的归约公理,并对它们的有效性进行了证明。

需要明确的是,本文在第四节中所呈现的动态怀疑,只是从“相信一个命题 ϕ ”到“怀疑一个命题 ϕ ”的动态变化,而动态怀疑并不仅此一类。通常,我们在认知过程中还会经历“从对命题 ϕ 毫无概念”到“怀疑一个命题 ϕ ”的动态变化。就证据模型而言,它意味着怀疑前的证据模型“既没有 ϕ 的证据,也没有 $\neg\phi$ 的证据;既不相信 ϕ ,也不相信 $\neg\phi$ ”。对这类动态怀疑的探究,将是未来的研究方向之一。

此外,在引文中已经提到,本文的研究对象是基于证据的怀疑,而在西方知识论的发展历程中,仍有许多关于非证据的怀疑的研究讨论。非证据的怀疑往往与知识关系密切。因此,在证据模型中考察和探究非证据怀疑的静态特征、动态特征以及和知识的关系,亦是做进一步研究的方向之一。

A 附录

A.1 有效式的证明

以下是表 1 中有效式的具体证明。

命题 7. $D\phi \rightarrow \Box\neg\phi$ 是有效的。

证明. 倘若 $\mathcal{M}, w \models D\phi$, 那么根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box\neg\phi \wedge E\phi$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box\neg\phi$ 。 $\square$

命题 8. $D(\phi \vee \psi) \rightarrow (D\phi \vee D\psi)$ 是有效的。

证明. 倘若 $\mathcal{M}, w \models D(\phi \vee \psi)$, 那么根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box\neg(\phi \vee \psi) \wedge E(\phi \vee \psi)$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box\neg(\phi \vee \psi)$ 并且 $\mathcal{M}, w \models E(\phi \vee \psi)$ 。

- $\mathcal{M}, w \models \Box \neg(\phi \vee \psi)$, 当且仅当 (根据定义), 存在一个 $X \in N(w)$ 使得对于每个点 $v \in X$, 都有 $\mathcal{M}, v \models \neg(\phi \vee \psi)$, 当且仅当 (根据定义), 存在一个 $X \in N(w)$ 使得对于每个点 $v \in X$, 都有 $\mathcal{M}, v \models \neg\phi \wedge \neg\psi$, 也就是 $\mathcal{M}, v \models \neg\phi$ 并且 $\mathcal{M}, v \models \neg\psi$ 。那么, 根据定义, 我们就可以得出 $\mathcal{M}, w \models \Box \neg\phi$ 并且 $\mathcal{M}, w \models \Box \neg\psi$ 。
- $\mathcal{M}, w \models E(\phi \vee \psi)$, 当且仅当 (根据定义), 存在一个点 $u \in W$, 使得 $\mathcal{M}, u \models \phi \vee \psi$, 当且仅当 (根据定义), 存在一个点 $u \in W$, 使得 $\mathcal{M}, u \models \phi$ 或 $\mathcal{M}, u \models \psi$, 当且仅当 (根据定义), $\mathcal{M}, w \models E\phi$ 或 $\mathcal{M}, w \models E\psi$ 。

倘若 $\mathcal{M}, u \models E\phi$, 那么根据定义可得 $\mathcal{M}, w \models D\phi$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models D\phi \vee D\psi$; 倘若 $\mathcal{M}, u \models E\psi$, 根据定义同样可得 $\mathcal{M}, w \models D\phi \vee D\psi$ 。

综上, $\mathcal{M}, w \models D\phi \vee D\psi$. □

命题 9. $A\phi \rightarrow \neg D\phi$ 是有效的。

证明. 倘若 $\mathcal{M}, w \models A\phi$, 那么根据定义, 对每一个点 $v \in W$, 都有 $\mathcal{M}, v \models \phi$ 。因此, $\mathcal{M}, w \not\models \Box \neg\phi$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models D\phi$, 也就是 $\mathcal{M}, w \models \neg D\phi$. □

命题 10. $A\neg\phi \rightarrow \neg D\phi$ 是有效的。

证明. 倘若 $\mathcal{M}, w \models A\neg\phi$, 那么根据定义, 对每一个点 $v \in W$, 都有 $\mathcal{M}, v \models \neg\phi$ 。因此, $\mathcal{M}, w \not\models E\phi$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models D\phi$, 也就是 $\mathcal{M}, w \models \neg D\phi$. □

命题 11. $\Box\phi \rightarrow \neg B\neg\phi$ 是有效的。

证明. 参见命题 2. □

命题 12. $D\phi \rightarrow \neg B\phi$ 是有效的。

证明. 倘若 $\mathcal{M}, w \models D\phi$, 根据定义 $\mathcal{M}, w \models \Box \neg\phi \wedge E\phi$, 于是, $\mathcal{M}, w \models \Box \neg\phi$ 。再根据 $\Box \neg\phi \rightarrow \neg B\phi$ 是有效的, 可得 $\mathcal{M}, w \models \neg B\phi$. □

命题 13. $D(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (A\phi \rightarrow D\psi)$ 是有效的。

证明. 参见命题 4. □

A.2 非有效式的证明

以下是表 1 中非有效式的具体证明。

命题 14. $D(\phi \wedge \psi) \rightarrow (D\phi \wedge D\psi)$ 不是有效的。

证明. 考虑这样一个证据模型 $\mathcal{M}$, 其中 $W = \{w, u, v\}$, $N(w) = N(u) = N(v) = \{\{w\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$, $V(p) = \{w, u\}$, $V(q) = \{w\}$ 。

- 由于 $\mathcal{M}, w \models p \wedge q$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models E(p \wedge q)$ 。 $\mathcal{M}, u \models \neg p \vee \neg q$, 并且 $\mathcal{M}, v \models \neg p \vee \neg q$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box(\neg p \vee \neg q)$, 也就是 $\mathcal{M}, w \models \Box \neg(p \wedge q)$ 。因此, $\mathcal{M}, w \models D(p \wedge q)$ 。
- 由于 $\mathcal{M}, w \models p$ 并且 $\mathcal{M}, u \models p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models \Box \neg p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models Dp$ 。因此, $\mathcal{M}, w \not\models Dp \wedge Dq$ 。

综上, $\mathcal{M}, w \not\models D(p \wedge q) \rightarrow (Dp \wedge Dq)$ 。 $\square$

命题 15. $(D\phi \wedge D\psi) \rightarrow D(\phi \wedge \psi)$ 不是有效的。

证明. 考虑这样一个证据模型 $\mathcal{M}$, 其中 $W = \{w, u, v\}$, $N(w) = N(u) = N(v) = \{\{w\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$, $V(p) = \{w\}$, $V(q) = \{u, v\}$ 。

- 由于 $\mathcal{M}, w \models p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models Ep$ 。由于 $\mathcal{M}, u \models \neg p$ 并且 $\mathcal{M}, v \models \neg p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box \neg p$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \models Dp$ 。
- 由于 $\mathcal{M}, u \models q$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models Eq$ 。由于 $\mathcal{M}, w \models \neg q$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box \neg q$ 。因此, $\mathcal{M}, w \models Dq$ 。
- 由于 $\mathcal{M}, w \not\models p \wedge q$, $\mathcal{M}, u \not\models p \wedge q$ 并且 $\mathcal{M}, v \not\models p \wedge q$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models E(p \wedge q)$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models D(p \wedge q)$ 。

综上, $\mathcal{M}, w \not\models (Dp \wedge Dq) \rightarrow D(p \wedge q)$ 。 $\square$

命题 16. $D(\phi \vee \psi) \rightarrow D\phi$ 不是有效的。

证明. 考虑这样一个证据模型 $\mathcal{M}$, 其中 $W = \{w, u, v\}$, $N(w) = N(u) = N(v) = \{\{w\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$, $V(p) = \emptyset$, $V(q) = \{w\}$ 。

- 由于 $\mathcal{M}, u \models \neg p \wedge \neg q$ 并且 $\mathcal{M}, v \models \neg p \wedge \neg q$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box(\neg p \wedge \neg q)$, 也就是 $\mathcal{M}, w \models \Box \neg(p \vee q)$ 。由于 $\mathcal{M}, w \models q$, 因此, $\mathcal{M}, w \models p \vee q$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \models E(p \vee q)$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \models D(p \vee q)$ 。
- 由于 $V(p) = \emptyset$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models Ep$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models Dp$ 。

综上, $\mathcal{M}, w \not\models D(p \vee q) \rightarrow Dp$ 。 $\square$

命题 17. $(D\phi \vee D\psi) \rightarrow D(\phi \vee \psi)$ 不是有效的。

证明. 考虑这样一个证据模型 $\mathcal{M}$, 其中 $W = \{w, u, v\}$, $N(w) = N(u) = N(v) = \{\{w\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$, $V(p) = \{w\}$, $V(q) = \{u, v\}$ 。

- 根据定义, $\mathcal{M}, w \models Dp$ 。¹¹ 因此, $\mathcal{M}, w \models Dp \vee Dq$ 。
- 由于 $\mathcal{M}, w \not\models \neg p \wedge \neg q$, $\mathcal{M}, u \not\models \neg p \wedge \neg q$ 并且 $\mathcal{M}, v \not\models \neg p \wedge \neg q$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models \Box(\neg p \wedge \neg q)$, 也就是 $\mathcal{M}, w \not\models \Box \neg(p \vee q)$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models D(p \vee q)$ 。

¹¹ 由于所构造的证据模型和命题 15 的证明所用证据模型是一样的, $\mathcal{M}, w \models Dp$ 可直接参照命题 15 的证明。

综上, $\mathcal{M}, w \not\models (Dp \vee Dq) \rightarrow D(p \vee q)$ 。 $\square$

命题 18. $(D\phi \rightarrow D\psi) \rightarrow D(\phi \rightarrow \psi)$ 不是有效的。

证明. 考虑这样一个证据模型 $\mathcal{M}$, 其中 $W = \{w, u, v\}$, $N(w) = N(u) = N(v) = \{\{w\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$, $V(p) = \emptyset$, $V(q) = W$ 。

- 由于 $V(p) = \emptyset$, 因此, $\mathcal{M}, w \not\models Ep$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models Dp$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \models Dp \rightarrow Dq$ 。
- 由于 $\mathcal{M}, w \not\models p \wedge \neg q$, $\mathcal{M}, u \not\models p \wedge \neg q$ 并且 $\mathcal{M}, v \not\models p \wedge \neg q$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models \Box(p \wedge \neg q)$, 也就是 $\mathcal{M}, w \not\models \Box \neg(p \rightarrow q)$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models D(p \rightarrow q)$ 。

综上, $\mathcal{M}, w \not\models (Dp \rightarrow Dq) \rightarrow D(p \rightarrow q)$ 。 $\square$

命题 19. $D(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (D\phi \rightarrow D\psi)$ 不是有效的。

证明. 参见命题 3。 $\square$

命题 20. $D\phi \rightarrow \neg D\neg\phi$ 不是有效的。

证明. 考虑这样一个证据模型 $\mathcal{M}$, 其中 $W = \{w, u, v\}$, $N(w) = N(u) = N(v) = \{\{w\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$, $V(p) = \{w\}$ 。

- 由于 $\mathcal{M}, w \models p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models Ep$ 。由于 $\mathcal{M}, u \models \neg p$ 并且 $\mathcal{M}, v \models \neg p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box \neg p$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \models Dp$ 。
- 由于 $\mathcal{M}, u \models \neg p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models E\neg p$ 。由于 $\mathcal{M}, w \models p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box p$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \models D\neg p$, 也就是 $\mathcal{M}, w \not\models \neg D\neg p$ 。

综上, $\mathcal{M}, w \not\models Dp \rightarrow \neg D\neg p$ 。 $\square$

命题 21. $D\phi \rightarrow D\neg\phi$ 不是有效的。

证明. 考虑这样一个证据模型 $\mathcal{M}$, 其中 $W = \{w, u, v\}$, $N(w) = N(u) = N(v) = \{\{w\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$, $V(p) = \{u\}$ 。

- 由于 $\mathcal{M}, u \models p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models Ep$ 。由于 $\mathcal{M}, w \models \neg p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \models \Box \neg p$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \models Dp$ 。
- 由于 $\mathcal{M}, w \not\models p$ 和 $\mathcal{M}, v \not\models p$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models \Box p$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models D\neg p$ 。

综上, $\mathcal{M}, w \not\models Dp \rightarrow D\neg p$ 。 $\square$

命题 22. $\neg B\phi \rightarrow D\phi$ 不是有效的。

证明. 考虑这样一个证据模型 $\mathcal{M}$, 其中 $W = \{w, u, v\}$, $N(w) = N(u) = N(v) = \{\{w\}, \{u, v\}, \{w, u, v\}\}$, $V(p) = \emptyset$ 。

- 在给定的证据模型中有两个极大有穷相交性的簇, $\mathcal{X}_1 = \{\{w\}, \{w, u, v\}\}$ 和 $\mathcal{X}_2 = \{\{u, v\}, \{w, u, v\}\}$, 其中, $\bigcap \mathcal{X}_1 = \{w\}$, $\bigcap \mathcal{X}_2 = \{u, v\}$ 。由于 $V(p) = \emptyset$, 因此, $\mathcal{M}, w \not\models p$, 于是 $\bigcap \mathcal{X}_1 \not\subseteq \llbracket p \rrbracket_{\mathcal{M}}$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models Bp$, 也就是 $\mathcal{M}, w \models \neg Bp$ 。
 - 由于 $V(p) = \emptyset$, 根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models Ep$ 。根据定义, $\mathcal{M}, w \not\models Dp$ 。
- 综上, $\mathcal{M}, w \models \neg Bp \rightarrow Dp$ 。 □

参考文献

- [1] M. M. Bäuml, 2015, ‘On Certainty’ and Formal Epistemology, MA thesis, University of Amsterdam.
- [2] J. van Benthem, D. Fernández-Duque and E. Pacuit, 2012, “Evidence logic: A new look at neighborhood structures”, *Advances in Modal Logic*, **Vol. 9**, pp. 97–118, Rickmansworth: College Publications.
- [3] J. van Benthem and E. Pacuit, 2011, “Dynamic logics of evidence-based belief”, *Studia Logica*, **99(1–3)**: 61–92.
- [4] E. Pacuit, 2017, *Neighborhood Semantics for Modal Logic*, Berlin: Springer.
- [5] M. Polanyi, 1958, *Personal Knowledge*, Abingdon-on-Thames: Routledge.
- [6] C. Proietti and E. J. Olsson, 2013, “A DDL approach to pluralistic ignorance and collective belief”, *Journal of Philosophical Logic*, **43(223)**: 499–515.
- [7] J. Pryor, 2000, “The skeptic and the dogmatist”, *Noûs*, **34(4)**: 517–549.
- [8] N. Salmona, 1995, “Being of two minds: Belief with doubt”, *Noûs*, **29(1)**: 1–20.
- [9] P. Thagard, 2004, “What is doubt and when is it reasonable?”, *Canadian Journal of Philosophy*, **34(sup1)**: 391–406.
- [10] L. Wittgenstein, 1991, *On Certainty*, Oxford: Blackwell.
- [11] 郁振华, “怀疑之批判——论波兰尼和维特根斯坦的思想会聚”, *哲学研究*, 2008 年第 6 期, 第 54–63 页。

(责任编辑: 袁之)

Evidence-based Doubt

Haibin Gui

Abstract

Starting from the philosophical discussion of doubt, this paper summarizes the existing definition of doubt and the formal study of doubt, and proposes to continue to study evidence-based doubt in a formal way. This paper, with the help of the neighborhood semantic evidence model, investigates the logical nature of doubt from two aspects: first, regards doubt as a static epistemic attitude, examines the relationship between belief, evidence and doubt, and expounds the relevant logical nature of doubt; Second, taking doubt as a dynamic epistemic process, this paper investigates the change of epistemic state when the initial epistemic state is to believe a proposition, and introduces the evidence set of negation of the proposition, and gives the reductive axiom of dynamic operator and its validity proof.