

# 真谓词的不可定义性问题的根源

周志荣

**摘 要:** 塔斯基的真之定义理论确定了“实质的恰当性”与“形式的正确性”标准, 进而蕴涵了语言分层原则、组合性原则和本质上的丰富性原则。虽然为了证明无穷阶的普遍类理论语言或一阶皮亚诺算术语言的真谓词的不可定义性定理, 塔斯基借助了循环性悖论, 但真谓词的不可定义性定理并不局限于悖论性或循环性的语言。造成其真谓词不可定义的真正根源在于它们的元语言不符合真之定义理论的标准, 尤其是“本质上的丰富性”原则。

**关键词:** 真之定义; 循环性; 说谎者悖论; 雅布罗悖论; 塔斯基定理

**中图分类号:** B81

**文献标识码:** A

塔斯基 (A. Tarski) 针对无穷阶的普遍类理论语言 ( $L_{GTC}$ ) 和一阶皮亚诺算术语言 ( $L_{PA}$ ) 提出了真谓词的不可定义性定理 (以下简称为“塔斯基定理”, 参见文献 [13] 第五节)。由于该定理的证明使用了对角线引理构造了说谎者悖论 (即  $\neg Tr(\ulcorner \lambda \urcorner) \leftrightarrow \lambda$ ), 人们通常认为真谓词的不可定义性问题根源于悖论, 进而根源于这两种语言的语义封闭性。詹金斯 (C. S. Jenkins) 和诺兰 (D. Nolan) 反驳说, 我们可以构造一种不具有语义封闭性但同样包含悖论的语言, 其中悖论的产生并没有借助语义概念。([6]) 虽然语义封闭性并不总是构成一种语言的真谓词的不可定义性的必要条件, 但自指性或更一般的循环性通常仍被看作造成麻烦的根源。([5], 第 136 页) 近来, 夏皮罗 (S. Shapiro) 也指出塔斯基定理真正要表明的是: 不存在一种具备充分表达力的语言可以包含 “ $\Phi(\ulcorner S \urcorner) \leftrightarrow S$ ” 这样等式并且 “ $\Phi$ ” 仅仅刻画了该语言的所有真语句的集合。([10], 第 1198–1199 页) 塔斯基定理的基于悖论的证明方式似乎表明悖论乃至语言的循环性是导致真谓词不可定义的根源。如果  $L_{GTC}$  的真谓词的不可定义性根源于悖论, 那么塔斯基在 [13] 的前四节中关于真之定义要求以及有穷阶语言的真谓词定义的构造方法就与后文毫无关联。事实并非如此, 悖论只是真谓词的不可定义性的直接原因, 而非真正根源。为论证这一点, 本文首先要回顾塔斯基对构造一种恰当的真之定义提出的理论要求, 阐述其蕴涵的一些重要原则。然后, 结合  $L_{GTC}$  和  $L_{PA}$  这两种循环性的悖论语言以及

收稿日期: 2019-07-17; 修订日期: 2020-02-29

作者信息: 周志荣 中南财经政法大学哲学院  
zhouzhirong50@126.com

基金项目: 国家社会科学基金重大项目“逻辑真理论的历史源流、理论前沿与应用研究”(12ZDA025)。

一种非循环的悖论语言，分析导致其真谓词的不可定义性与这些原则之间的关系；最后，通过考察两种非悖论性的语言的真谓词的定义问题，进一步指出一种语言的真谓词的不可定义性问题的真正根源。

## 1 塔斯基的真之定义理论

为了构造出“恰当的”或“令人满意”真之定义，塔斯基提出并确立了两个标准（[13]，第 187–188 页；[12]，第 341 页）：形式的正确性与实质的恰当性。满足第一个标准就是要求对于对象语言  $L$  的每个语句，这种定义必须蕴涵一个形如“ $S$  在  $L$  中是真的，当且仅当  $P$ ”的 T-语句；满足第二个标准就是要求：在具体的 T-语句中，等式左边的“ $S$ ”必须被  $L$  中的（直陈性）语句在其元语言  $ML$  中的名字所替换，而右边的“ $P$ ”必须被该语句在  $ML$  中的翻译所替换（这两个要求合起来被称为 T-约定）。综合这两个条件，对于  $L$  的真谓词的一种定义是恰当的，当且仅当针对  $L$  的每个语句  $\varphi$ ，在  $ML$  中都有相应的 T-语句作为该定义的后承，其中等式左边的语法主语是  $\varphi$  的名字，右边是它在  $ML$  中的翻译。这两个要求首先蕴涵了这样一条原则：

**语言分层原则** 必须在元语言和对象语言之间做出严格区分，对象语言的真谓词的定义必须在元语言中被给出。（[13]，第 167 页；[12]，第 350 页）

根据塔斯基的真之定义理论，构造对象语言  $L$  的一种令人满意的真之定义，包含以下三步，即对  $L$  中的每个语句  $\varphi$ ，在元语言  $ML$  中：(1) 给出它的名字  $\ulcorner \varphi \urcorner$ ；(2) 给出它的翻译  $\varphi$ ；(3) 确定相应的 T-语句。考虑到量化语言，定义真谓词需要借助“一个对象序列  $l$  满足一个（开）公式”这个概念。而对后者的定义同样依赖于给出对象语言  $L$  的所有公式的名字及其翻译，在此基础上确定相应的满足语句（即 S-语句）。因此，对于对象语言的每个公式，满足概念的定义都要蕴涵如下形式的等式：对象序列  $l$  满足一个公式  $\ulcorner \varphi(x_n) \urcorner$ ，当且仅当  $\varphi(l_n)$ ，其中  $l_n$  是对象序列  $l$  的第  $n$  个元素。

如果对象语言包含在元语言中，翻译的工作实际上可以免除。<sup>1</sup> 于是，“形式的正确性”标准就显得尤为重要，它要求对对象语言的形式结构进行刻画。其中最关键的工作就是给出所有公式的名字，即在元语言中定义“ $L$  的公式”概念。定义“ $L$  的公式”概念通常是依次通过给定对象语言的所有常项和变元、定义“项”、“初

<sup>1</sup>在 [13] 中，塔斯基并没有严格区分“实质的恰当性”和“形式的正确性”这两个标准。在 [12] 中，塔斯基才做出了区分。“实质的恰当性”要求目的在于确保定义能够把握住真概念的实际意义，而“形式的正确性”标准目的在于确保一种语言的真之定义能够蕴涵针对其所有语句的 T-语句，因而这要求构造真之定义时必须“能够描述出该语言的形式结构”。（[12]，第 341–342 页）尤其对于形式语言的真谓词的构造而言，“实质的恰当性”标准显得并不那么重要。恰恰是因为存在“形式的正确性”标准，元语言需要刻画出对象语言的形式结构，因而才需要满足后文所述的组合性原则和本质上的丰富性原则。

始公式”、“复合公式”等概念来实现的。这个工作是否能完成,取决于对象语言的复杂度,确切地说,取决于对象语言的语句在结构上是否满足递归定义的要求。因此不难看出:对象语言  $L$  的满足概念(进而真概念)是可定义的,仅当“ $L$  的公式”概念在元语言  $ML$  中是递归可定义的。塔斯基非常强调这种递归定义的结构描述性特征。正如葛瑞·雷(G. Ray)评价的那样:塔斯基在应对悖论和语义模糊性等问题时“选择只考虑带有他称之为得到确切说明的结构的语言。这将保证所考察的语言拥有得到良好定义的初始词汇和语法并且这将有助于确保针对那种语言存在一个得到良好定义的 T-语句集”。([9], 第 168 页)换言之,对于真谓词的定义必须体现语义的组合格性原则:

**组合格性原则**“只有针对其自身结构已得到准确确定的语言,真之定义问题才能获得其确切的意义并且得到严格的解决”。([12], 第 347 页)

“语言具有准确的结构”意味着该语言在语法和语义上具有组合格性特征。语句的语义值的确定依赖于作为其构成部分的子句或公式以及初始符号的语义值。语义的组合格性又取决于公式以及语句的形成规则是否具有语法上的组合格性特征<sup>2</sup>。根据组合格性原则的要求,如果“ $L$ -项”无法定义,那么“ $L$  的语句”就无法定义,进而在元语言中就无法基于语义的组合格性给出  $L$  的真谓词定义。这对于包含有穷多语句的对象语言来说并不构成实质的困难,因为可以采取列举法通过列出它的所有语句的 T-语句来构造真之定义,但对于包含无穷多语句的语言,组合格性原则就具有关键性的作用。

按照塔斯基的分析,当对象语言  $L$  为有穷阶语言时,构造相应的元语言且在其中定义“ $L$  的公式”并非难事,尤其可以通过对  $L$  添加一般的逻辑表达式和语言形态学的词项(即对象语言表达式及其结构关系的名字)进行直接扩张得到元语言。当考虑无穷阶语言(例如  $L_{GTC}$ )时,困难就出现了。这类语言包含了无穷多语义类型的变元<sup>3</sup>,这直接导致:“使用类似的递归的方法来定义公式自然被证明是不适用的”,因此,这对定义满足概念和真概念构成了“本质性的困难”([13], 第 245 页)。理解这个结果并不难:由于  $L_{GTC}$  包含了无穷多语义类型的变元(或名字),我们实际上首先遭遇的问题就是无法定义“ $L_{GTC}$ -项”,因为不存在比  $L_{GTC}$  本质上更丰富的无穷阶语言使得  $L_{GTC}$  的每个项都有一个名字;其次,问题就是无法定义初始公式,因为我们无法以有穷的方式描述无穷多类型的变元(或名字)的无穷多种组合及其与相应的谓词符号的结合。这些基本问题无法解决,那么就不可能构造出符合塔斯基的形式正确性要求的真之定义。为此,塔斯基不得不提出

<sup>2</sup>霍奇斯(W. Hodges)认为递归性并不是正确的真之定义的本质特征,只不过递归的方法更具实用性,塔斯基真之定义的真正核心是组合格性原则。([3], 第 105 页)

<sup>3</sup>由于塔斯基考察的对象语言通常只包含变元、不包含名字,所以这里他只讨论了变元有无穷多语义类型的问题。如果考虑包含名字的对象语言,则同样会出现无穷多语义类型的名字。

另外一条更为重要原则：

**“本质上的丰富性”原则** “元语言必须足够丰富以便为构造对象语言中的每个语句的名字提供可能”，即元语言必须要比对象语言“本质上更为丰富”。（[12]，第 350–352 页）<sup>4</sup>

“本质上的丰富性”原则在塔斯基的真之定义理论大概是最重要的一条原则。塔斯基自己认为，真之定义问题的答案是肯定的还是否定的，“尤其取决于元语言就其逻辑部分而言较之对象语言是否‘本质上更为丰富’”。（[12]，第 351 页）他还指出：“元语言的‘本质上的丰富性’条件不仅是构造令人满意的真之定义的必要条件，也是其充分条件。”（[12]，第 352 页）如果对象语言与元语言是同一种语言，那么本质上的丰富性原则就难以遵循。反过来，要遵循本质上的丰富性原则，仅仅对对象语言和元语言有所区别是不够的，还要求元语言必须能够提供足够多的以及足够高阶的范畴以便满足刻画对象语言的语义组合性特征的需求。比如，我们当然可以假设  $L_{GTC}$  就像  $L_{PA}$  一样具有充分的表达力，从而能够为自己的语句提供名字。如果要以  $L_{GTC}$  作为其自己的元语言，即在  $L_{GTC}$  中定义它自己的真谓词，就一定会出现矛盾。塔斯基对于这个矛盾的证明借助了说谎者悖论。这难免诱使人们认为  $L_{GTC}$  的真谓词的不可定义性问题是出自指性或循环性的悖论造成的，甚至人们还将问题归咎于这种语言的语义封闭性。实际上这些观点掩盖了塔斯基定理具有的普遍意义，即掩盖了造成一种语言（比如  $L_{GTC}$ ）的真谓词的不可定义性问题的真正根源。接下来，本文将分别考察循环性悖论语言和非循环的无根性悖论语言的真谓词的不可定义性问题，试图指出问题的真正根源在于元语言不够丰富，因而无法定义相应的对象语言的“项”和“语句”，并且这个观点同样可以扩展到非悖论性的循环性或无根性语言。

## 2 塔斯基定理与循环性悖论

在 [13] 一文的第五节，塔斯基讨论了无穷阶语言的真谓词的定义问题，他考察了作为范例的普遍类理论语言  $L_{GTC}$ ，并最终证明这种语言的真谓词是不可定义的，而他的否定性回答就包含在塔斯基定理之中。塔斯基定理由两个部分构成（[13]，第 247 页）：

( $\alpha$ ) 不管以何种方式在元理论中定义了指示一个表达式类的符号“Tr”，由此将可能推导出在 T-约定的条件 ( $\alpha$ ) 中所描述的一个语句的否定；

<sup>4</sup>谢尔 (G. Sher) 将形式正确性要求分析为三个条件：(a) 被定义的真谓词是对象语言的真谓词，(b) 真之定义是在元语言中给出的，元语言本质上要丰富于对象语言，(c) 元语言必须是形式上严格的和一致的。（[11]，第 151 页）可见，谢尔是将“本质丰富性”原则看作是包含在形式正确性条件中的一个子条件。

( $\beta$ ) 假设元理论的所有可证语句的类是一致的, 基于这样的元理论不可能构造 T-约定涵义上的一种恰当的真之定义。

这里的“元理论”指的是普遍类理论语言的元理论, 以下用  $GTC^+$  来表示, 并用  $L_{GTC^+}$  表示相应的元语言。如果 ( $\alpha$ ) 成立, 我们很容易推出  $GTC^+$  包含矛盾, 因而它不是一致的, 于是 ( $\beta$ ) 显然成立, 因为其前件为假。所以证明 ( $\alpha$ ) 是整个不可定义性定理证明过程的关键, 不过这个证明并不复杂。

由于  $L_{GTC}$  这种语言类似于  $L_{PA}$  (按照塔斯基的观点, 它们之间可以建立一一对应), 借助哥德尔配数法, 它的元语言  $L_{GTC^+}$  能够在该对象语言中得到定义, 换言之,  $L_{GTC} = L_{GTC^+}$ 。由于该语言能够定义为算术语言, 显然对角线引理就是成立的: 令  $\Phi(x)$  是该语言中任意仅包含自由变元  $x$  的公式, 则存在它的一个公式  $\gamma$  使得:  $GTC^+ \vdash \gamma \leftrightarrow \Phi(\ulcorner \gamma \urcorner)$  (其中  $\ulcorner \gamma \urcorner$  是  $\gamma$  的哥德尔数)。现在, 假设  $L_{GTC}$  的真谓词 “Tr” 已经在  $L_{GTC^+}$  中得到定义, 即对任意  $L_{GTC}$  的公式  $\gamma$  都有:  $GTC^+ \vdash \gamma \leftrightarrow Tr(\ulcorner \gamma \urcorner)$ 。再根据对角线引理很容易推出: 存在公式  $\lambda$  (即说谎者语句) 使得  $GTC^+ \vdash \lambda \leftrightarrow Tr(\ulcorner \lambda \urcorner)$ , 进而可以推出:  $GTC^+ \vdash \neg(\lambda \leftrightarrow Tr(\ulcorner \lambda \urcorner))$  于是 ( $\alpha$ ) 得证。由此不难导出矛盾:  $GTC^+ \vdash \psi \wedge \neg\psi$  (其中  $\psi$  为  $\lambda \leftrightarrow Tr(\ulcorner \lambda \urcorner)$ )。于是 ( $\beta$ ) 得证。

严格来说, ( $\beta$ ) 足以表达  $L_{GTC}$  的真谓词的不可定义性, ( $\alpha$ ) 看似是多余的。塔斯基在这里之所以要明确阐述 ( $\alpha$ ), 目的是要指出达到该定理的方式: 他可以不使用任何未经定义的语义概念, 仅凭对角线引理, 即可证明该定理。([2], 第 32 页) 由对角线引理可知, 对  $L_{GTC^+}$  ( $= L_{GTC}$ ) 中可表达的任意谓词  $\Phi$  而言, 都存在一个公式  $\gamma$ , 使得  $GTC^+ \vdash \gamma \leftrightarrow \neg\Phi(\ulcorner \gamma \urcorner)$ , 这意味着任意谓词  $\Phi$  与  $L_{GTC}$  的真谓词都不具有相同的外延, 因而  $L_{GTC}$  的真谓词在它自身中是不可表达的。很明显, 对  $L_{GTC}$  的算术化以及对角线引理在塔斯基定理的证明中起着关键性的作用。正是这一点使人们通常将“塔斯基定理”等同于“ $L_{PA}$  的真谓词的不可定义性”定理。对角线函数的引入以及对角线引理的使用使得  $L_{GTC}$  具有了自指能力, 进而使得循环性悖论的构造成为可能。

在塔斯基看来,  $L_{GTC}$  与  $L_{PA}$  这两种语言极为相似, 因为它们都具有足够的表达力从而可作为自己的元语言。它们的真谓词的不可定义性似乎最终都归咎于我们试图在一个语言自身中来定义它的真谓词。因为如果我们真的这么做, 势必会造成语言的自指性, 进而导致说谎者悖论或类似的矛盾。以类似的证明方式, 不难得到以下这两个推论 ([8], 第 205 页):

- (1) 令  $L_{Tr}$  为在  $L_{PA}$  中添加真谓词 “Tr” 之后得到的扩张语言,  $L_{Tr}$  的真谓词在其自身中不可定义。([4], 第 38 页)
- (2) 令  $PA^+$  为  $PA$  的任意一致性扩张,  $L_{PA^+}$  的真谓词在其自身中不可定义。

这些结果很容易让我们产生这样的看法：自指性或循环性是导致悖论的罪魁祸首，进而也是造成  $L_{GTC}$  的真谓词定义存在本质性困难的根源。夏皮罗认为，塔斯基之所以强调  $L_{GTC}$  或  $L_{PA}$  要具有“充分的表达力”就是“为了确保自指性的机制是可使用的”。（[10]，第 1199 页）但是，为了避免一种语言因包含自己的真谓词而产生语义悖论，塔斯基一开始就主张区分对象语言和元语言，并且强调元语言必须比对象语言本质上更为丰富。根据他的语言分层原则和本质上的丰富性原则，尽管  $L_{PA}$  的真谓词在它自身中不可定义，但可以在更为丰富的元语言中得到定义，例如可以以二阶算术语言（甚至它的一个片段）作为其元语言。（[8]，第 212 页）这也是塔斯基定理所具有的普遍意义：塔斯基定理实际上恰恰断定了，任何一种语言都不能在它自身中定义自己的真谓词，这意味着要定义其真谓词，必须要有本质上更为丰富的元语言。（[1]，第 147 页） $L_{PA}$  与  $L_{GTC}$  这两种语言的区别就在于此，因为按照塔斯基的观点， $L_{GTC}$  的真谓词只有在超穷高阶的元语言中才可定义，换言之，根本不存在比  $L_{GTC}$  更为丰富的无穷阶元语言使得该对象语言的真谓词在其中能够得到定义。由于不存在更为丰富的元语言，进而不能为  $L_{GTC}$  的每个语句提供一个名字，对于那些没有名字的语句，就无法构造相应的 T-语句，所以理所当然就不可能构造出一个真之定义使它蕴含所有相关的 T-语句。

虽然  $L_{GTC}$  是循环性语言，它具备足够充分的表达力，似乎能够为自己的所有语句提供一个名字，但由于悖论的存在，不可定义性问题仍然不可能得到解决。这恰恰表明  $L_{GTC}$  还不足够丰富以便适合作为自己的元语言。塔斯基很清楚这一点。他认为构造有穷阶语言的真谓词定义的方法在无穷阶语言上是不适用的。因为  $L_{GTC}$  作为自己的元语言，“其丰富性对于探讨该语言的纯粹形态而言没有优势”，它需要的是“根本不同于这种语言的所有语法形式的”元语言。（[13]，第 253 页）因此，即使在塔斯基看来，循环性的悖论恐怕也不是造成问题的根本原因。接下来，我们可以考察另外一种的悖论性对象语言，它是非循环的无根性（ungrounded）语言，看看其真谓词的不可定义性问题的根源是否出在悖论上。

### 3 无根性悖论语言的真谓词的不可定义性

雅布罗（S. Yablo）指出，循环性（尤其自指性）并不是造成悖论的必要条件。（[14]）他的论证依赖于构造无穷长的语句序列： $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ ……其中每个  $S_i$  都是这样的语句“对所有  $n > i$ ， $S_n$  不是真的”。对于任意  $S_i$  而言，它说的是它后面的所有语句都不是真的。假设  $S_i$  是真的，则对于任意某个  $k > i$ ， $S_k$  不是真的，由于  $S_k$  断定：任意  $n > k$ ， $S_n$  不是真的，所以至少存在某个  $j > k$  使得  $S_j$  是真的，因而存在某个  $j > i$  使得  $S_j$  是真的。于是  $S_i$  不是真的。矛盾。再假设  $S_i$  不是真的，则存在某个  $k > i$ ， $S_k$  是真的，进而对于任意  $j > k$ ， $S_j$  都不是真的，

如果这个推论成立,则不难证明  $S_j$  又是真的,于是矛盾,所以根据归谬法,  $S_i$  反而是真的。这就是所谓的“雅布罗悖论”,其特点在于,序列中的每个句子单独而言都不自相矛盾,但把所有这些句子放在一起,就会造成不一致。因而它又被雅布罗自己称为“ $\omega$ -悖论”。([15], 第 140 页)

如果是像上面这样来描述雅布罗悖论的话,显然不符合塔斯基的风格。因为在序列中,每个  $S_i$  中出现的真谓词并没有标明所属的语言。于是,问题产生了:如果我们按照塔斯基的语言分层理论,严格区分对象语言和元语言,进而明确这里的每个真谓词所属的语言,悖论还会产生吗?根据雅布罗的做法,针对每个语句  $S_i$ ,我们假设相应有一种语言  $L_i$  以及真谓词  $\text{Tr}_i$ ,令  $S_i$  是  $L_i$  的语句, $\text{Tr}_i$  是  $L_i$  的真谓词,且对任意  $k > i$ ,“ $S_k$ ”和“ $\text{Tr}_k$ ”都是语言  $L_i$  的符号。然后,我们对雅布罗的语句序列作适当修改,使得每个语句  $S_i$  都指称这样的语句:  $\forall n > i, \neg \text{Tr}_n(S_n)$ 。现在假设  $\text{Tr}_i(S_i)$ 。由此可得  $\forall n > i, \neg \text{Tr}_n(S_n)$ 。于是存在  $j > i$ ,使得  $\forall n > j, \neg \text{Tr}_n(S_n)$ ,进而  $\text{Tr}_j(S_j)$ ,即  $\exists n > i, \text{Tr}_n(S_n)$ 。所以  $\neg \text{Tr}_i(S_i)$ 。类似地,如果假设  $\neg \text{Tr}_i(S_i)$ ,不难推出  $\text{Tr}_i(S_i)$ 。因此,雅布罗认为,塔斯基的语言分层方法不足以消除这个悖论,因为它并不是由语言的循环性导致的语义悖论。([15], 第 141 页)

与说谎者悖论不同,雅布罗悖论产生的原因是无穷语句序列包含了无根性语句。一个语句  $\varphi$  是无根的,当且仅当它并不依赖于“非语义的事态”,换言之,总是存在另外一个语句  $\varphi'$ ,使得  $\varphi$  依赖于  $\varphi'$ ,而后者又依赖于其他语句,即存在一个无穷上升的语句依赖序列。([7])类似地,我们可将“无根性语言”定义为包含无根性语句的语言。需要注意的是,在做出元语言 and 对象语言的区分之后,每个语言  $L_i$  都不是无根性语言,因为每个语句  $S_i$  在  $L_i$  中并不依赖于其他语句。于是,我们可以在雅布罗的语句和语言序列的基础上构造一种无根性语言。

雅布罗的证明还隐含了这样的条件,即对任意(对象)语言  $L_i$ , (元)语言  $L_{i-1}$  必须包含这样的 T-语句:  $\text{Tr}_i(S_i) \leftrightarrow \forall n > i, \neg \text{Tr}_n(S_n)$  (其中  $i$  为任意某个自然数),因此我们必须预设语言  $L_0$ ,使得它包含“ $\text{Tr}_1(S_1) \leftrightarrow \forall n > 1, \neg \text{Tr}_n(S_n)$ ”,同时不得再假设语句序列中存在  $S_0$  这样的语句,否则我们还需要类似地预设语言  $L_{-1}$ ,令其包含“ $\text{Tr}_0(S_0) \leftrightarrow \forall n > -1, \neg \text{Tr}_n(S_n)$ ”。考虑到该预设,我们令  $T_{S_i}$  为对应于  $S_i$  的 T-语句,然后根据语句序列重新明确一个语言序列:  $L_0, L_1, L_2, \dots$  其中  $T_{S_1} \in L_0$ , 且对任意  $i > 0$ , 都有  $S_i \in L_i, T_{S_i} \in L_{i-1}$ 。接下来,我们将所有这样的  $L_i$  ( $i > 0$ ) 合并起来得到一种语言  $L_\omega$ , 即令  $L_\omega = \bigcup_{i>0} L_i$ 。可以看出,每个  $S_i$  和  $T_{S_i}$  都是  $L_\omega$  的语句。现在,我们来利用雅布罗悖论证明  $L_\omega$  的真谓词的不可定义性。

假设存在某个合适的元语言  $L_\omega^*$ , 在其中可以构造出  $L_\omega$  的真谓词的一个形式正确的塔斯基式定义,即对任意  $S_i \in L_i$  ( $i > 0$ ), 都有  $\text{Tr}_\omega(S_i) \leftrightarrow \forall n > i, \neg \text{Tr}_n(S_n)$  (其中,  $L_\omega^*$  包含了  $L_\omega$  中语句的所有名字“ $S_i$ ” ( $i > 0$ ), 并且对任意  $L_\omega$  中的公式

$\varphi$ , 因为定义而  $\varphi$  也是元语言中的公式)。我们在元理论中假设  $\text{Tr}_\omega(S_i)$ , 由此可得  $\forall n > i, \neg \text{Tr}_n(S_n)$ , 因而存在  $j > i$ , 使得  $\neg \text{Tr}_j(S_j)$ 。又  $\text{Tr}_j(S_j) \leftrightarrow \forall n > j, \neg \text{Tr}_n(S_n)$  在对象语言中因为定义而是平凡的, 所以它在元理论中也成立。于是可得  $\neg \forall n > j, \neg \text{Tr}_n(S_n)$ , 进而可推出  $\neg \forall n > i, \neg \text{Tr}_n(S_n)$ 。因此,  $\neg \text{Tr}_\omega(S_i)$ 。反之同理。由此我们在元语言  $L_\omega^*$  中可以推出  $\text{Tr}_\omega(S_i) \leftrightarrow \neg \text{Tr}_\omega(S_i)$ 。不难得到矛盾。所以,  $L_\omega$  的真谓词在元语言  $L_\omega^*$  中是不可定义的。

由此可见,  $L_\omega^*$  并不是合适的元语言, 原因是: 该元语言直接包含了对象语言中的名字, 尽管 “ $\text{Tr}_\omega$ ” 以及 “ $\text{Tr}_\omega(S_i)$ ” 并不是对象语言中的谓词和语句, 但借助 “ $\text{Tr}_i(S_i) \leftrightarrow \forall n > i, \neg \text{Tr}_n(S_n)$ ”,  $\text{Tr}_\omega(S_i)$  与  $\text{Tr}_i(S_i)$  在元语言建立了等价关系。这就在元语言中产生了循环性。雅布罗曾断言: “在这里不需要哥德尔的技巧, 因为就塔斯基的目的而言, 是否通过对语法的算术化或者借助其他方法来造成自指并不重要。” ([15], 第 142 页) 的确如此,  $\omega$ -悖论的产生机制并不依赖于直接的自指,  $L_\omega$  中的每个语句  $S_i$  都在 “谈论” 别的语句而非自己, 所以严格来说,  $L_\omega$  不是一种循环性语言而是一种非循环的无根性语言。但需要注意的是, 上述论证结果并不是  $\text{Tr}_i(S_i) \leftrightarrow \neg \text{Tr}_i(S_i)$ , 而是  $\text{Tr}_\omega(S_i) \leftrightarrow \neg \text{Tr}_\omega(S_i)$ , 而该结果是在元语言中推导出来的, 其推导过程借助了循环性。因此不能说  $L_\omega$  的真谓词的不可定义性与循环性无关, 但这里所用的悖论即  $\omega$ -悖论从根本上说确实是由这种语言的非循环的无根性造成的。虽然循环性也对  $L_\omega$  这样的非循环的无根性语言的真谓词的不可定义性产生了影响。这是否意味着它就是导致真谓词的不可定义性问题的根源? 其实, 上述分析也表明了情况并非如此。元语言  $L_\omega^*$  的不合适性才是根源: 它不够丰富, 没有能够为对象语言的所有项和语句提供名字, 比如 “ $\text{Tr}_j(S_j) \leftrightarrow \forall n > j, \neg \text{Tr}_n(S_n)$ ” 这个等式在元语言中就没有名字, 为了进行推理, 它作为一个平凡的定义性命题却被直接包含在了元语言中。而这个等式本身并不是真之定义蕴涵的定理。这才是导致问题的根源。

#### 4 两种非悖论性语言的真谓词的定义问题

为了进一步揭示悖论并不是导致真谓词不可定义性问题的真正根源, 接下来我们要考虑两种非悖论性的语言, 通过对这两种语言的真谓词的定义问题的考察, 考察真之定义的形式正确性要求对于真谓词的定义性问题的的重要性。这两种语言分别是: 作为  $L_{PA}$  的真扩张语言的  $L_{Tr}$  ( $= L_{PA} \cup \{Tr\}$ ), 以及基于诚实者语句构造的、类似于  $L_\omega$  的无根性语言。前者是非悖论性的循环性语言, 后者是既非悖论性的亦非循环性的语言。

关于  $L_{Tr}$  的真谓词的定义问题, 往往存在着误解。如前所述, 在  $L_{PA}$  中无法定义其自身的真谓词, 因为这会导致悖论。显然, 只要令  $L_{PA}$  的真谓词不包含在其

自身中即可避免悖论,因而人们通常会认为,只要避免了语义封闭性就能解决问题,换言之, $L_{PA}$ 的真谓词可以在 $L_{Tr}$ 这种扩张语言得到定义(其中“ $Tr$ ”为 $L_{PA}$ 的真谓词)。( [16], 第76页)毫无疑问, $L_{PA}$ 的真谓词可以在更为丰富的元语言中得到定义,但问题是 $L_{Tr}$ 能否算是“更丰富的元语言”。

模型论的表达容易掩盖这个问题。借助模型论的方法,令 $\mathfrak{S} = (\mathbf{N}, S, +, 0)$ 为 $L_{PA}$ 的标准自然数模型,且令 $\mathbf{T} = \{\ulcorner A \urcorner : \mathfrak{S} \models A \text{ 且 } A \text{ 为 } L_{PA}\text{-语句}\}$ ,且 $\mathfrak{S}' = (\mathfrak{S}, \mathbf{T})$ 为 $L_{Tr}$ 的标准模型,则塔斯基定理可以被表述为: $\mathbf{T}$ 在 $\mathfrak{S}$ 中(确切地说在 $\mathbf{N}$ 中)不可定义,即并非对任意 $\ulcorner A \urcorner \in \mathbf{T}$ ,都有 $\mathfrak{S} \models Tr(\ulcorner A \urcorner)$ 。但对任意 $\ulcorner A \urcorner \in \mathbf{T}$ ,都有 $(\mathfrak{S}, \mathbf{T}) \models Tr(\ulcorner A \urcorner)$ ,即 $\mathbf{T}$ 在 $\mathfrak{S}'$ 中是可定义的。在这里, $\mathbf{T}$ 实际上就是真谓词“ $Tr$ ”在模型 $\mathfrak{S}'$ 下的解释,因此很明显,虽然 $L_{PA}$ 的真谓词在模型 $\mathfrak{S}$ 中不能得到解释,但可以在扩张的模型 $\mathfrak{S}'$ 中得到解释。不过,容易忽略的问题是:这里的 $\mathbf{T}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$ 是什么关系?显然, $\mathbf{T}$ 不是 $\mathbf{N}$ 的子集, $\mathbf{T}$ 在 $\mathbf{N}$ 中不可定义这其实已经表明了不存在 $\mathbf{X}$ , $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{N}$ 的子集且 $\mathbf{X} = \mathbf{T}$ 。

回到前面的问题,假设 $L_{Tr}$ 是可在其中定义 $L_{PA}$ 的真谓词的元语言,这意味着, $L_{PA}$ -项和 $L_{PA}$ -公式都可在该语言中得到定义。显然,(1)0是 $L_{PA}$ -项,且(2)如果 $t, t'$ 是 $L_{PA}$ -项,则 $St$ 和 $t+t'$ ,  $t \times t'$ 都是 $L_{PA}$ -项。在此基础上,可以定义 $L_{PA}$ -公式,例如,如果 $t, t'$ 是 $L_{PA}$ -项,则 $t = t'$ 是 $L_{PA}$ -公式,如果 $A$ 是公式,则 $\neg A$ 是 $L_{PA}$ -公式……不过,这并不是真正的定义,因为它没有考虑到元语言的特殊性。在 $L_{Tr}$ 中, $L_{PA}$ 的每个符号、项和公式都有一个哥德尔数作为其名字。对于每个公式 $A$ 而言, $\ulcorner A \urcorner$ 是“ $A$ ”在 $L_{Tr}$ 中的名字,即“ $A$ ”的哥德尔数。假设某个 $n$ 是 $L_{PA}$ -公式“ $A$ ”的哥德尔数且,即 $\ulcorner A \urcorner = n$ 。假设“ $n$ ”本身就是一个 $L_{PA}$ -项。如果“ $n$ ”的意义在元语言中没有变化,则“ $n$ ”的指称依然是 $n$ 。由于“ $n$ ”同时也是 $\ulcorner A \urcorner$ 的哥德尔数,因此“ $n$ ”的指称是“ $A$ ”。这表明“ $n$ ”在 $L_{Tr}$ 中是一个有歧义的项。当然,在元语言中,每个 $L_{PA}$ -项和 $L_{PA}$ -公式都有一个哥德尔数作为其名字,它们都存在歧义问题。这个问题使得 $L_{Tr}$ 是否是 $L_{PA}$ 加上真谓词的扩张遭到质疑。

针对歧义问题,我们有两种选择:一是否认哥德尔数是 $L_{PA}$ -项,这意味着 $L_{Tr}$ 并不是简单地将真谓词加入 $L_{PA}$ 中形成的扩张,而是对 $L_{PA} \cup \{Tr\}$ 的真扩张,这样一来 $L_{Tr}$ 就变成了“本质上更为丰富”的元语言;二是容忍歧义,承认这些哥德尔数作为项是特殊的自然数,因而承认元语言 $L_{Tr}$ 在对象语言的基础上“生成”了新的 $L_{PA}$ -项。如果 $L_{PA}$ -公式的哥德尔数都是 $L_{PA}$ -项,那么对 $L_{PA}$ -项的定义就需要添加第三个子句:如果 $A$ 是 $L_{PA}$ -公式,则 $\ulcorner A \urcorner$ 是 $L_{PA}$ -项。由此不难得出, $L_{PA}$ -项是可定义的,仅当 $L_{PA}$ -公式是可定义的。于是造成循环定义,违背组合性原则的要求。综合上述两个方面,如果 $L_{PA}$ -公式的名字本身就是 $L_{PA}$ -项,则会造成歧义以及循环定义问题;而如果不是 $L_{PA}$ -项,则元语言对对象语言做出了真扩张。所以除非 $L_{Tr}$ 对 $L_{PA} \cup \{Tr\}$ 做出真扩张以满足本质上的丰富性原则的要求,在 $L_{Tr}$ 中

实际上无法构造出  $L_{PA}$  的真谓词的定义。反言之, 如果  $L_{Tr}$  中构造出了  $L_{PA}$  的真谓词的定义, 那么哥德尔数就不应该被视为真正的  $L_{PA}$ -项。

再考虑第二种语言, 即一种无根性语言  $L_{\omega'}$ , 它与  $L_{\omega}$  的区别在于, 在它包含的语句序列中, 每个语句都“说”后面的语句是真的, 即每个语句  $S_i$  都指称这样的语句:  $\forall j > i, Tr_j(S_j)$ 。不难发现,  $L_{\omega'}$  是非悖论性的。我们考虑两种情形: (1) 令  $L_{\omega'}$  为自己的元语言, 考虑它的真谓词在自身中能否得到定义; (2) 令  $L_{\omega'}^*$  为一个本质上更为丰富的元语言, 能够为所有  $L_{\omega'}$  符号、项以及公式提供一个名字, 考虑  $L_{\omega'}$  的真谓词能否在这个元语言中得到定义。

情形 (1)。如果在  $L_{\omega'}$  中定义其真谓词, 因为按照塔斯基的真之定义的要求, 元语言要为对象语言中的初始符号 (比如项) 以及语句提供名字。但是  $L_{\omega'}$  本身并不是一个足够丰富的语言, 当它作为自己的元语言时, 每个语句 “ $\forall j > i, Tr_j(S_j)$ ” 固然都有自己的名字 “ $S_i$ ”, 但每个 “ $Tr_i(S_i)$ ” 却没有自己的名字。此外, “ $S_i$ ” 这个名字本身以及谓词 “ $Tr_i$ ” 也没有名字, 这样来的问题是我们无法定义  $L_{\omega'}$ -项以及  $L_{\omega'}$ -公式。根据塔斯基的真之定义理论, 由于  $L_{\omega'}$  对于其自身而言不具备本质上丰富的表达力, 因而无法刻画出其自身的形式结构, 当然也就无法在其自身中构造出其真谓词的定义。

情形 (2)。假设  $L_{\omega'}^*$  是本质上更为丰富的元语言, 它不仅包含了  $L_{\omega'}$  的真谓词 “ $Tr_{\omega'}$ ” 以及必要的逻辑、语法等符号, 还能为所有  $L_{\omega'}$ -项和公式都提供一个名字。其中, 对于任意名字和真谓词, “ $\langle \theta \rangle$ ” 是 “ $\theta$ ” 在  $L_{\omega'}^*$  中的名字。我们可以将  $L_{\omega'}$ -项和语句定义为: 对任意自然数  $i$ ,  $\langle S_i \rangle$  都是  $L_{\omega'}$ -项; 如果  $i$  是任意自然数,  $\langle S_i \rangle$  是  $L_{\omega'}$ -项且  $\langle Tr_i \rangle$  是  $L_{\omega'}$ -谓词, 则  $\langle Tr_i(S_i) \rangle$  是  $L_{\omega'}$ -公式; 如果  $\langle Tr_i(S_i) \rangle$  是公式, 则  $\langle \forall i > j, Tr_i(S_i) \rangle$ 、 $\langle Tr_i(S_i) \leftrightarrow \forall k > i, Tr_k(S_k) \rangle$  都是  $L_{\omega'}$ -公式。在定义了  $L_{\omega'}$ -项和公式之后, 就可以按照一般的做法, 构造相应的语义定义 (其中  $i, j, n$  为任意某个自然数):

- (I)  $Ref(\langle S_i \rangle) = S_i, Ref(\langle Tr_i \rangle) = \langle \forall n > i, Tr_n(S_n) \rangle;$
- (II)  $Tr_{\omega'}(\langle Tr_i(S_i) \rangle) \leftrightarrow Ref(\langle S_i \rangle) \in Ref(\langle Tr_i \rangle);$
- (III)  $Tr_{\omega'}(\langle \forall n > i, Tr_n(S_n) \rangle) \leftrightarrow \forall n > i, Tr_{\omega'}(\langle Tr_n(S_n) \rangle);$
- (IV)  $Tr_{\omega'}(\langle Tr_i(S_i) \leftrightarrow \forall k > i, Tr_k(S_k) \rangle)$   
 $\leftrightarrow (Tr_{\omega'}(\langle Tr_i(S_i) \rangle) \leftrightarrow Tr_{\omega'}(\langle \forall k > i, Tr_k(S_k) \rangle))$

对于任意  $L_{\omega'}$ -语句  $A$ , 由上述定义都可以推出:  $Tr_{\omega'}(\langle A \rangle) \leftrightarrow A$ 。因此, 只要元语言足够丰富, 即使  $L_{\omega'}$  是非循环的无根性语言, 其真谓词也可在该元语言中得到定义。当然, 这个定义可能存在瑕疵, 因为如果严格依照塔斯基的真之定义理论, 真之定义蕴涵的每个 T-等式 “ $Tr(s) \leftrightarrow p$ ” 的右边都不能再出现真谓词 “ $Tr$ ”。不过, 需要注意的是, 在这里, 等式右边包含的 “真谓词” 并不是 “ $Tr_{\omega'}$ ”。

比较上述两种语言,可以发现:一方面,第一种语言  $L_{PA}$  的元语言  $L_{Tr}$  并非在本质上比对象语言更为丰富,它无法独立地为对象语言的项和语句提供名字,所以只能用对象语言的名字指称自己的项和语句,从而造成自指,但由于真谓词并不属于对象语言,因此没有产生悖论。不过这仍然会造成歧义问题,这为构造  $L_{PA}$  的真谓词定义造成了麻烦,要克服麻烦就不得不承认  $L_{Tr}$  是对  $L_{PA} \cup \{Tr\}$  做出真扩张。 $L_{\omega'}$  的真谓词的定义在第一种情形下的问题是因为其本身表达力不足造成的(这也是塔斯基定理直接表达的内容)。而另一方面,上述结果并不妨碍  $L_{PA}$  的真谓词在本质上更为丰富的二阶语言中得到定义,同样在第二种情形下,由于有了本质上更为丰富的元语言,  $L_{\omega'}$  的真谓词定义才能得以构造出来,该定义符合塔斯基的真之定义理论的要求,尽管  $L_{\omega'}$  本身是无根性的。

## 5 结论

塔斯基借助循环性悖论证明了  $L_{GTC}$  的真之不可定义性定理,该定理的证明方式长期以来令不少人误以为悖论或循环性是导致一种语言的真谓词的不可定义性问题的根源,从而忽略了构造一个真之定义的真正重要的因素以及一种语言的真谓词的不可定义性问题的真正根源。悖论以及循环性之所以能够造成真谓词的不可定义性问题,还是因为它们导致了特定的元语言无法完全地刻画对象语言的形式结构,即无法在满足组合性原则的前提下为对象语言的所有项和语句提供名字,进而为每个语句递归地构造相应的 T-语句。塔斯基定理所断定的内容其实并不仅仅适用于像  $L_{GTC}$  这样的悖论性语言,它也适用于任何一种试图在其自身中定义自己的真谓词的语言,此外还适用于那些无法找到“本质上更为丰富的”元语言的对象语言以及其现有的元语言不具备“本质上的丰富性”的对象语言,其中有的对象语言甚至并不包含悖论,也不是循环性的语言。因为塔斯基的真之定义理论的核心原则是:只有在本质上更为丰富的元语言中,对象语言的真谓词才能得到定义。构造一种语言的真谓词定义的关键在于找到“本质上更为丰富的”元语言。相反,真谓词的不可定义性问题的真正根源在于找不到这样的元语言,或者至少现有的元语言相对于对象语言来说并非本质上更为丰富。基于这一点,以下推断就不难被理解和接受:(1) 无论是悖论性的还是非悖论性,循环性还是非循环性的语言,只要能够找到本质上更为丰富的元语言,其真谓词就能得到定义;(2) 即使一种对象语言的真谓词在一个合适的元语言中得到定义,它也可能在另外一种不合适的元语言中是不可定义的;(3) 事实上,并非所有的语言都存在本质上更为丰富的元语言,比如自然语言或  $L_{GTC}$ , 它们的真谓词在无穷阶语言中注定无法得到定义。

## 参考文献

- [1] C. Cieśliński, 2015, “How Tarski defined the undefinable”, *European Review*, **23(1)**: 139–149.
- [2] M. Góñez-Torrente, 2004, “The indefinability of truth in the ‘Wahrheitsbegriff’”, *Annals of Pure and Applied Logic*, **126(1-3)**: 27–37.
- [3] W. Hodges, 2004, “What languages have Tarski truth definitions”, *Annals of Pure and Applied Logic*, **126(1-3)**: 93–113.
- [4] L. Horsten, 2011, *The Tarskian Turn: Deflationism and Axiomatic Truth*, Cambridge, MA: The MIT Press.
- [5] D. Jacquette, 2010, “Circularity or lacunae in Tarski’s truth-schemata”, *Journal of Logic, Language and Information*, **19(3)**: 315–326.
- [6] C. S. Jenkins and D. Nolan, 2008, “Liar-like paradox and object language features”, *American Philosophical Quarterly*, **45(1)**: 67–73.
- [7] H. Leitgeb, 2005, “What truth depends on”, *Journal of Philosophical Logic*, **34(2)**: 155–192.
- [8] R. Murawski, 1999, “Undefinability vs. definability of satisfaction and truth”, in J. Woleński and E. Köhler (eds.), *Tarski and The Vienna Circle*, pp. 203–215, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [9] G. Ray, 2002, “Truth, the liar, and tarskian truth definition”, in D. Acquette (ed.), *A Companion to Philosophical Logic*, pp. 164–176, Malden: Blackwell Publishing.
- [10] S. Shapiro, 2013, “Tarski’s theorem and the extensionality of truth”, *Erkenntnis*, **78(5)**: 1197–1204.
- [11] G. Sher, 1999, “What is Tarski’s theory of truth?”, *Topoi*, **18(2)**: 149–166.
- [12] A. Tarski, 1944, “The semantic conception of truth and the foundations of semantics”, *Philosophy and Phenomenological Research*, **4(3)**: 341–375.
- [13] A. Tarski, 1956, “The concept of truth in formalized languages”, J. H. Woodger (trans.), in J. Corcoran (ed.), *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, pp. 152–278, Oxford: Clarendon Press.
- [14] S. Yablo, 1993, “Paradox without self-reference”, *Analysis*, **53(4)**: 251–252.
- [15] S. Yablo, 2004, “Circularity and paradox”, in T. Bolander *et al.* (eds.), *Self-Reference*, pp. 139–157, Stanford: CSLI Publications.
- [16] 熊明, “塔斯基定理的一种推广”, 逻辑学研究, 2010 年第 1 期, 第 73–88 页。

(责任编辑: 袁之)

## On Cause of the Problem of the Indefinability of Truth

Zhirong Zhou

### Abstract

Tarski provided the criterion of formal correctness and of material adequacy with his theory of definition of truth, which implies further three principles: that of hierarchy, of compositionality and of essential richness. Although Tarski proved the undefinability theorem, which asserts directly that the truth predicate of  $L_{GTC}$  (or  $L_{PA}$ ) is undefinable in itself, with the circular paradox. However, what is asserted in the theorem is not only applicable to paradoxical or circular languages. The real cause of the undefinability of truth is that their meta-language cannot satisfy these criteria and principles, especially that the meta-language is not essentially richer than its object language.