

集合论多宇宙观与形式主义

裘江杰

摘 要: 数学对象的实在性问题一直是数学哲学中争论的焦点。作为二十世纪数学基础三大流派之一的形式主义常常被认为是反实在论的; 而新近颇受瞩目的多宇宙观则似乎应持有实在论立场。本文试图论证, 形式主义的要义或许在于形式系统以及元数学, 因此经过某种重构后的形式主义在本体论上可以是中立的; 另一面, 多宇宙观中的核心概念则可视作理想元, 因而多宇宙观可以纳入到这一新的形式主义框架中; 进而, 这两者的结合可以支持、推动当前的数学实践甚至创造新的数学实践形式。

关键词: 集合论多宇宙观; 数学实在论; 形式主义

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 引言

一般认为, 诞生于一百多年前的公理集合论有着两重身份 ([22]): 其一, 它是数理逻辑的四大分支之一¹, 因此也是数学的一个专门领域; 其二, 常规数学所研究的对象可以被表示为各种集合, 所使用到的方法以及预设也可以溯源到集合论公理, 概言之, 许多数学命题可以被视为各种集合论公理系统²中的定理, 因此主流的观点也把它当作数学的基础。

数学是关于什么的? 数学命题在什么意义上为真为假? 对于这样一些问题的不同回答可以粗略地对应到从实在论到反实在论的谱系中的不同的位置, 那么, 基于公理集合论, 则产生了对集合对象、集合宇宙的客观实在性不同的本体论立场。

数学家们对关于数学对象以及集合对象的实在性问题的初始反应通常是朴素的, 他们会自然认为他们自己以及其他严肃的数学家所研究的对象是独立于人类心智而客观存在着的, 这样一种观点属于传统的数学实在论。

不过, 从学术史的视角反观数学哲学中实在论问题争论的历史发展, 情况就要变得复杂了。实际上, 呈现在我们面前的更可能是部分实在部分反实在观; 比

收稿日期: 2019-11-12

作者信息: 裘江杰 中国人民大学哲学院
qiujiangjie@163.com

¹数理逻辑的另外三个主要分支是模型论、递归论以及证明论。

²最典型的集合论公理系统是 ZFC, 此外, 在研究中还会涉及到 ZFC 的各种子系统、扩张系统, 甚至与 ZFC 不一致的系统, 比如 ZF + AD。

如,在数学史上,像负数、虚数这样一些概念在它们被引入之初都曾经被视作为本身无所指的形式或者语言物项,可以对它们进行形式操作,但是这种形式操作只是为了得到描述实存对象的性质或者实存对象之间关系的数学命题,操作本身并无实际意义³。在这些具体的历史场景里,学者们至少是下意识地承认一些数学对象的实在性,但是同时把那些新被引入的概念则当作只是形式表示而已。

十九世纪末,实质性地探讨无穷以及无穷对象的集合论面临的悖论导致了第三次数学危机的爆发,对危机的应对的重要结果之一正是前述的公理集合论的创立⁴,另外一个有影响力的后果则是希尔伯特规划的提出与实施⁵,前者在这一百多年里得到了迅猛的发展,其中一部分相对深刻的成果被认为是受到(特别是实在论的)数学哲学思想的指引而达致的([16, 18]);后者则是形式主义思想的一个主要体现,一种常见的观点是认为希尔伯特规划体现了形式主义的反实在论或者至少是对无穷的反实在论思想([10, 23])。

如前所述,在公理集合论领域工作的数学家可能天然会倾向于实在论,但是在哥德尔不完全性定理以及各种自然的独立性结果出现之后,自二十世纪六十年代以来,数学家们对自身的本体论立场更为自觉,同时他们的立场也进一步发生了分化:其中既有武丁(H. W. Woodin)这样的坚定的实在论者([15]),也有像谢拉赫(S. Shelah)这样的在本体论上更加谨慎的学者([10]),后者被“不谨慎地”视为持有形式主义思想,并且因而是反实在论者([18])。

近年来,在公理集合论的数学以及哲学研究中,多宇宙观(Multiverse View)得到了越来越多的重视和讨论([1, 7, 22])。

哈姆肯斯(J. D. Hamkins)认为传统的集合论实在论是一种单一宇宙观(The universe view),即它断言,恰有一个唯一的集合宇宙,这一本体论立场隐含着所谓的绝对的集合观念,但是哈姆肯斯等学者认为这是可质疑的,特别的,它与独立性现象以及根据不同的方法构造各种集合论模型这样的数学实践是不一致的,因此,他们认为,集合概念是多元的,进而客观存在着的是多个集合宇宙,而非单一的宇宙,这众多的集合宇宙又组成了集合论复宇宙(set theory multiverse)⁶,集合论的一部分研究工作应该关注集合论复宇宙。

哈姆肯斯等学者的多宇宙观是一种颇为奇特的立场,已有学者意识到这一概念及相应的理论与形式主义的某种亲缘关系([1, 16]),本文的任务则是希望能论

³比如,意大利数学家卡尔达诺(G. Cardano)最早使用虚数记号,但他认为这仅仅是形式表示。

⁴与之竞争的有罗素的类型论,在数学基础领域胜出的是公理集合论,不过,类型论在数学基础以及计算机科学基础中仍然有着一定的影响,比如,2002年菲尔兹奖获得者沃沃斯基(V. Voevodsky)创立的同伦类型论(homotopy type theory)就结合了类型论的思想。

⁵希尔伯特本人对数学基础的关注主要有两个时期(19世纪末以及20世纪20年代左右),希尔伯特规划则主要是在后一个时期被提出的,目前公认的是,这一规划之于希尔伯特,不仅仅是面向应对数学危机的,实际上也是对直觉主义的回应,从这一点似乎能看到希尔伯特对数学实在论的某种认同。

⁶采用杨睿之的译法。

证多宇宙观确实可以容纳到形式主义的框架中，只不过需要更换对形式主义的反实在论的刻板印象，这种新的形式主义在本体论上将是谨慎的，同时它所注重的主要是方法论或者认识论层面的，它重视数学实践，同时也以促进数学实践为主要目的。

论文的结构如下：首先我们会在第二节梳理这种多宇宙观的“前世今生”，我们将会发现实在论解读并不是其唯一可选的本体论立场，也就是说，赋予其某种形式主义“色彩”是可能的；其次，在第三节中，我们会整理多种视角中的形式主义的形象，这一整理使我们相信形式主义可以摆脱“反实在论”的帽子，这使得它容纳多宇宙观成为可能；在第四节中，我们会在这种中立的本体论的立场下，基于希尔伯特和科里（H. Curry）的思想重构形式主义的框架；最后，在第五节中，基于这一改造后的形式主义的框架，我们会试图“重述”多宇宙观“故事”。

2 多样的多宇宙观

顾名思义，集合论多宇宙观似乎是这样一种形上学观点：存在着多个集合论宇宙。但是，一方面，提出或者持有多宇宙观的，几乎都是集合论学者，他们的第一身份都是数学家，因此，很难说他们本身有清晰的形上学立场，另一方面，就如本节接下来将分析的，持有多宇宙观的学者间也存在着分歧，因此我们或许可以首先将注意力投向它们的对立面，集合论单一宇宙观。所谓的单一宇宙观指的是这样一种实在论立场：存在着唯一一个包含所有的集合的总体，这一总体我们称为集合宇宙，它本身不是集合，但是它是由独立于我们的心智、语言或者概念系统而存在着的所有的集合所组成的。一些学者认为，至少在“哥德尔时代，集合论学者们还生活在这种（朴素的）单一宇宙观下”（[5]）；不过“曲调”并不是完全“协调的”，比如，哈姆肯斯把多宇宙观的思想追溯到了冯·诺依曼 1925 年的论文《集合论的一种公理化》，认为其中对“集合论的一个模型可以是集合论的另外一个模型中的集合”讨论中就蕴涵了多宇宙观的初步想法（[7]）。

哈姆肯斯的这种追溯并不是孤例，弗里德曼（S. Friedman）与其合作者提出了“垂直”多宇宙（vertical multiverse）的概念，并认为这一概念以及相应的思想在策梅罗（E. Zermelo）那里就已有“萌芽”（[1]），策梅罗得到过这样的结果：二阶集合论系统 Z_2 是拟范畴的（quasi-categorical），即，对每个强不可达基数（strongly inaccessible cardinal） κ ， V_κ 是 Z_2 的同构意义上唯一的基数为 κ 的模型。

弗里德曼及其合作者认为，策梅罗的这些集合论模型，随着指标 κ 的增大，形成了一个塔状（tower-like）的多宇宙，这是一种纵向“生长”的复宇宙。弗里德曼等学者提炼出这种“垂直”多宇宙的目的是为了发展他们目前还在进行中的超宇宙规划（The hyperuniverse program）（[2]），这一规划是对哥德尔纲领的一种实

现的进路⁷，由于它并不与我们所讨论的主题直接相关，因此不再详细展开，我们把讨论的焦点集中在“垂直”多宇宙上。

这种“垂直”多宇宙与哈姆肯斯的多宇宙是不同的⁸，但是它们的倡议者都有着实在论的意向，因此面临着相似的质疑或者问题。对于“垂直”多宇宙，至少有两个相关联着的问题。

首先，如前所述，构成这种复宇宙的都是集合论的模型，如果我们取相应的集合论系统为 ZFC 系统，而这些指标 κ 都是大基数，那么，众所周知，ZFC 并未保证任何大基数的存在，甚至在 ZFC 中都无法证明存在大基数的相对一致性⁹，这意味着“垂直”多宇宙概念本身已经预设了大基数这一强的集合概念，但是后者并不是集合论学者所共同接受的，因此若在本体论上持谨慎的态度，则先把它们作为理想元，悬置实在性问题可能是一种可采取的策略，这一策略是形式主义的，但是请注意，它并未直接否定大基数的实在性，因此不能将之视为反实在论的。

其次，假如我们接受这种大基数以及“垂直”多宇宙的客观实在性，那么其中涉及到的大基数则都存在于集合论宇宙 V 中，因此，对这些大基数 κ ， V_κ 不仅仅是 V 的真前段，同时也是 V 中的元素，但是如此一来，这种“垂直”多宇宙就是 V 的一个子类，因此，称它是多宇宙更像是一种表达上的方便。

在集合论的研究中，我们确实会使用到 V 的一些子类，比如序数类 ON 、可定义集类 L ，但是前者本质上是对一种概念（在这里是序数）的外延表示，这是许多子类的用意；对于后者，我们有时确实也会称其为可定义宇宙，不过一般我们会使用其进行相对一致性的证明，而这又是形式主义风格的工作。

总之，这种“垂直”多宇宙的概念并不导向实在论观，相反，它与形式主义或许有更加自然的关联。

哈姆肯斯的多宇宙是一种“横向的图景”，原因在于哈姆肯斯版本的多宇宙的核心概念是力迫 (Forcing)，这是一种构造集合论模型的方法，它通过在原模型中加入新的元素而得到更加“庞大”但是“高度”不变的新模型，因此这种多宇宙不会在其成员间形成有规律的“个子”的递增或者递减的关系。

哈姆肯斯已经注意到使用力迫法时会遇到的困难 ([8])。概言之，标准的集合力迫法建立的仍然是相对一致性结果，它的核心是将集合论系统的足够大的有穷片段的一个可数传递模型“变胖”为一个新的可数传递模型，使得后者成为同一系统的另一个有穷片段加上某个指定的命题的模型，比如，如果证明中涉及的集合论系统为 ZFC，指定的命题为 φ ，那么力迫法建立的相对一致性结果即为

⁷另外一个著名的进路是武丁的终极 L 研究，郝兆宽 ([17]) 对之有细致深入的介绍。

⁸对后者的介绍稍后给出。

⁹若用 LA 表示一条大基数公理，那么 $ZFC + LA \vdash Con(ZFC)$ ；假如有 $ZFC \vdash Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + LA)$ ，那么将得 $ZFC + LA \vdash Con(ZFC + LA)$ ，这与哥德尔不完全性定理矛盾。

$\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \varphi)^{10}$ 。因此，力迫法本身不能产生新的集合论模型，更不用说提供一整个多宇宙。

哈姆肯斯使用一种变通的方法在类模型上使用力迫法，他称其使用的是自然主义的力迫（Naturalist Account of Forcing），这一方法非常类似于力迫的布尔值模型方法（Boolean-valued model approach to forcing），因此它们的问题也是相似的。如果将它们视为证明相对一致性的“理想”概念¹¹，则不成问题，但是这种处理是形式主义式的，自然不是哈姆肯斯及其合作者所期待的，因此他们实质上认为存在着各种集合宇宙（或者完整的集合论模型），并且对给定的集合宇宙 V 可以进行相应的力迫扩张；然而单一宇宙论者会质疑，既然 V 是集合宇宙，那么可以从何处取来新的集合，特别的，所使用的力迫对应的脱殊滤（Generic Filter）可以存在于 V 外吗？哈姆肯斯的回应是力迫法和独立性证明的数学实践表明存在着不同的集合概念，这些概念相互间可以是不一致的，因此必然对应有不同的集合宇宙。这一回应与其说是对单一宇宙论者的反驳，不如说是对多宇宙观立场的重申，只不过以更加技术化的形式呈现。

这样，是单一宇宙还是多宇宙，就成了立场之争，从相对粗浅的本体论直观观之，前者似乎更能得到“拥护”，然而，审慎一点，我们或许可以这样处理：这种多宇宙观看起来与我们的直观不太相符，但是，它在逻辑上并不是矛盾的¹²，因此不妨暂时不否定之，而是在假设其成立的基础上，讨论这一立场是否可能带给我们有意义的哲学上的洞见或者数学实践上新的成果。这种处理显然带有形式主义的色彩。

综上，我们已经了解到，多宇宙观有着不同的版本，并且它们都并不只导向这样或者那样的实在论；对它们的更加谨慎的处理则会关联到形式主义，或者说，这种处理背后体现的正是形式主义的观点，因此，一个自然的想法就是，是否可以将多宇宙观容纳入到形式主义的框架中？

不过，尽管形式主义已有百年之久，但是与逻辑主义以及直觉主义相比，它的“面目”并不是足够清晰的（[10]），并且历史上确实存在过不同的版本，因此在可以回答上述的问题之前，我们首先需要对形式主义进行一个相对细致的梳理；我们会在第三节讨论形式主义可以有的本体论立场，我们认为在此点上，形式主义是相对灵活的，甚至可以说形式主义在本体论上是中立的；然后在第四节，我们会重构一个可以回应上述问题的形式主义框架。

¹⁰关于力迫法的介绍可以参看苦能（K. Kunen）的经典教材 [9]。

¹¹在集合力迫中，我们也常常称，从 ZFC 的一个可数传递模型 M 出发，这个 M 就是一个“理性”元素，它是在 ZFC 中可以明确得到的 ZFC 的足够大的有穷片段的可数传递模型的某种“近似”。

¹²哈姆肯斯与他的合作者提出了复宇宙公理，并且证明，它们相对于 ZFC 是一致的，证明的概括可参看杨睿之的文章 [22]，详细可参看吉特曼（V. Gitman）与哈姆肯斯的论文 [6]。

3 形式主义的本体论立场

被认为是典型的形式主义的观点的,似乎是这样的:数学的对象就是语言的字符,除此之外,并无它物,而数学知识则是“关于那些字符如何彼此关联以及它们在数学实践中怎样被操作的知识”([21],第138页)。

这一观点里所包含的,语言物项无所指这一点可能就是形式主义这个名称的由来之一,同时或许也正是如此,使得形式主义与反实在论有了某种亲缘关系。然而这只是非常粗略的概括。

不同的形式主义者确实都会表现出或者看起来持某种反实在论观点,但是他们在程度上存在着区别,甚至可能是非常不同的,这一点或许可以从持有一些确定的本体论立场的学者对他们眼中形式主义的定位中反映出来。

有一些严格有穷主义者会把(提出规划时期的)希尔伯特当作他们的“同路人”,比如,叶峰认为,“希尔伯特提出,有一个有穷主义数学,它的陈述可以被解释为关于有限具体事物的陈述,特别是,关于有限具体事物的数量属性与排列组合属性的陈述,因此是有实在内容的数学”([24],第138页);因此,在叶峰看来,作为形式主义者的希尔伯特持有的是部分实在部分反实在论的观点,实在论的部分在于承认有穷的数学对象,尽管可能是在曲折的意义上的;而反实在论部分则是否定无穷对象的存在;当然,严格有穷主义者会否定大的有穷数目的实在性,但是作为有穷主义者则很可能并不会如此,但是至少,从严格有穷主义者的角度看,作为有穷主义者的希尔伯特所能承认的数学对象不会超出有穷物项。

另一端,一些实在论者会把某些承认更多数学对象实在性的学者划归为形式主义者。例如,郝兆宽与杨跃把科恩(P. Cohen)与谢拉赫都视作形式主义者¹³,并把他们的观点总结为:“一个集合论语言中的语句 σ 是真的当且仅当 σ 在ZFC中可证”,特别的,认为他们持有的形式主义立场是与实在论的“柏拉图主义”相对立的([18]);因此,至少一部分实在论者会认为像科恩与谢拉赫这样的形式主义者所能承认的数学对象是ZFC系统所承诺的,而在标准的形而上学解释下,ZFC系统允许有任意大基数的集合,因此,这些形式主义者所承认的数学对象将是远远超出有穷物项的。

在本小节一开头所引的观点所对应的,被称为是词项形式主义,这种形态的形式主义在希尔伯特之前就已经出现,它是弗雷格所批评的对象([21],第139页),从我们上面的讨论中不难了解,这种观点并不被后来的形式主义者所认同。

同词项形式主义同样“古老”的,是所谓的游戏形式主义。这一版本的形式主义认为“数学各分支中的印刷字符并没有什么数学的解释”,注意,它与词项形式主义是不同的,因为后者至少“认为数学是关于其词项的”([21],第140页);

¹³科恩是力迫法的发明者、逻辑学界唯一的菲尔兹奖获得者;而谢拉赫则是逻辑学界唯一的沃尔夫数学奖获得者,这两位数学家都是数学实践活动中的佼佼者,他们的观点值得反思。

游戏形式主义在本体论上更加激进，它所对应的是一种彻底的反实在论，即认为不存在任何的数、集合等等这样的数学对象，显然这也不会被后来的形式主义者认同。

二十世纪四十年代以后，被认为具有相对系统的形式主义思想的学者主要是科里。¹⁴ 科里持有反形而上学的立场 ([14])，他认为，“数学不应该受任何（基本的形而上学假设以外的）假设的限制” ([21]，第 165 页)，但是这并不是反实在论的；更确切地说，科里在本体论上是中立的，比如，“他非常乐意致力于一个无限的本体论，这个本体论假定是抽象的表达式类型” ([14])。

从到目前为止的梳理中，我们似乎可以得出这样的结论：形式主义并不必然导致反实在论，它可能并不那么支持实在论，但是也不会否定之，它应该是谨慎的，因此形式主义可以在本体论是中立的。

4 重构形式主义

在本节中我们会试图重构形式主义框架；这一框架应该面向数学实践，允许数学家们把一些概念视为是“理想元”，但是在本体论上又不做断然的限制，同时这一框架应该免于哥德尔不完全性定理的“攻击”。

重构的基础是希尔伯特规划，它是一个受到哥德尔不完全性定理“破坏”的形式主义框架，我们需要细致地整理希尔伯特的构想，这一工作会结合着与科里的相关思想的对比讨论来进行。

科里从希尔伯特那里继承下来的形式主义思想中主要有两个基本概念：一是形式系统，二是元数学；可以认为这两个概念张成了形式主义框架的基本架构。

所谓的形式系统是指形式化的公理系统。对形式系统的关注并不是在希尔伯特的第二个数学基础研究时期才发生的，他的 1899 年的名著《几何基础》就构造了现代数学的第一个真正严格的形式系统，他在这方面的思考和研究的时间还可以往前推，比如有学者曾谈到，早在 1891 年希尔伯特就这样说过：“在一个真正的几何学的公理化中你总能用‘桌子、椅子和啤酒杯’来代替‘点、直线和平面’。” ([21]，第 147 页) 科里则认为，“随着一门数学分支的发展，在其方法论上会变得越来越严格，结果是该分支在形式演绎系统中被编集成典” ([21]，第 164 页)。也就是说足够成熟的数学分支最终都会形成一个形式系统，科里进而“把这种形式化的进程（当）作为数学的本质” ([21]，第 165 页)。更细致而言，即使我们接受实在论，认为任何数学命题都非真即假，但是对那些真的数学命题，我们

¹⁴这是夏皮罗 (S. Shapiro) 的观点 ([21])，不过这可能并不完全正确，因为更加晚近的自认或者被认为论述过形式主义思想的学者还有如加贝 (M. Gabbay) 等学者，只不过他们的思想似乎并不是相对纯粹的形式主义的，而是与，比如虚构主义 (Fictionalism) 等交织在一起，更详细的介绍请参看斯坦福哲学百科的词条数学哲学中的形式主义 ([14])。

总需要把它们纳入到一个形式系统中，即要么作为系统的公理，要么则是在一个形式系统中作为定理被推演得到。

形式主义的第二个基本概念是元数学，元数学在希尔伯特那里的要点是一致性证明。对希尔伯特规划的一种工具主义（instrumentalism）的解读是：希尔伯特把无穷数学当作“理想元”，通过证明“理想元”对有穷主义数学的保守性来为这部分数学辩护（[24]，第295页），这里的保守性指的是“如果借助于无穷数学可以证明某个有穷主义数学命题，那么在有穷主义数学中就可以证明该命题”¹⁵；如果采用前述的约定，用PRA表示有穷主义数学的形式系统，那么保守性的任务可以转化为在PRA中证明“理想元”对应的形式系统的一致性（[24]，第296–300页）这样就导出了通常所说的，元数学的主要任务是证明形式系统的一致性。

科里则认为“一个成熟的数学理论的论断不应该被解释为某一特定的演绎系统（形式系统）之中若干动作的结果，而应该是关于形式系统的论断”（[21]，第165页），他明确写道：“数学是关于形式系统的科学”¹⁶；关于形式系统、关于数学的数学研究正是元数学。由此可见科里对希尔伯特思想的某种继承性，但是这不意味着科里只是对希尔伯特“锦上添花”似的发展。科里至少在两个关键点上与希尔伯特存在着分歧。

第一点是，希尔伯特把元数学限制在有穷主义数学上¹⁷，但是科里认为“元数学本身也是数学的一个分支，……也应该被形式化。元数学中的非有穷元结果通过建立元数学的一个形式系统而被纳入考虑，……不会形成一个恶性无穷倒退”（[21]，第165页），因此并不需要在进行元数学讨论时进行这种限制。科里在这一点上可能是对的，但是要注意到，希尔伯特在提出他的规划时尚未出现哥德尔不完全性定理，因此希尔伯特对有穷性的限制可能是出于最大理想化的考虑，而并不是希尔伯特在数学本体论上的思想的反映¹⁸，因此希尔伯特有可能会认同科里的观点。

科里与希尔伯特的第二个分歧则是，希尔伯特注重在元数学中证明“理想”数学的一致性，但是科里“并不要求一个一致性的证明”（[21]，第166页）。科里在这一点上对希尔伯特的偏离可能是有问题的，尽管在哥德尔不完全性定理的背景下，希尔伯特的“一致性证明”需要换以“相对一致性证明”以及其他的一些关于形式系统的研究。

哥德尔不完全性定理表明，任何包含足够多的算术的形式系统，如果它是一致的，那么它无法证明其自身的一致性，自然也无法证明比它更“庞大”的系统的

¹⁵取自 [24]，表述上有稍微的调整。

¹⁶科里的论述（[3]），转引自夏皮罗（[21]）。

¹⁷希尔伯特本人并未明确论述有穷主义数学的含义，自然也未给出其形式系统，一种较为常见的观点是把原始递归算术 PRA 视为有穷主义数学的形式系统，更加详细的讨论可参看 [11, 20, 24]。

¹⁸希尔伯特在 [8] 中确实有强烈的有穷主义哲学的色彩，但是希尔伯特的思想在不同的时期里并不那么固定。

一致性,因此希尔伯特原初的元数学目标确实不可能完成。不过,希尔伯特的“一致性证明”的受挫并不意味元数学的“消亡”,元数学的重要意义在于,它强调对数学的形式化,以及对形式系统的研究,这种研究是反思性的,一致性或者相对一致性只是其中的一个方面,尽管可能是最重要的方面之一;此外,我们还可以讨论对一个数学命题的“辩护”恰好需要什么样的公理,此即目前已经得到了丰富成果的反推数学 (Reverse Mathematics, [19]); 逻辑学家弗里德曼 (H. Friedman) 另辟蹊径,研究了需要大基数公理的有穷数学命题 ([4]), 这一工作有两方面的元数学意义: 其一,由此可以走向对常规数学完全的形式系统的找寻; 其二,它也可以视为对那些新公理的某种辩护——属于常规数学的有穷数学命题的获取需要它们。

上面的讨论使我们看到,尽管希尔伯特原初的“一致性证明”的元数学失败了,但是,作为对数学的反思性研究的元数学仍然具有着强劲的生命力,因此它(们)仍然是形式主义的重要组成部分。

综上,我们认为,形式主义仍然是一个有着独特生命力的研究框架,它的核心“构件”是形式系统与元数学。各种形式系统一方面可以是对已有数学结果的系统化整理,另一方面,或许更加重要的是,可以以“隐定义”的方式引入“理想元”,在搁置对其本体论地位的争论的前提下促发新的数学研究;而对形式系统的性质、形式系统之间关系等的研究则为典型的元数学工作。

5 形式主义视角下的多宇宙观

在第三、四节里我们讨论一种新的形式主义框架,它在本体论上是中立的,而在第二节中,我们也了解到多宇宙观并不必然导向实在论,因此,将多宇宙观纳入到这种新的形式主义框架是可能的。在这一节里,我们将尝试把基于多宇宙概念的几方面的具体工作,纳入到框架的合适的“位置”上去。

首先是独立性研究,这方面的工作反映的是相应的形式系统的非完全性。自二十世纪六十年代以来,独立性相关的工作在公理集合论研究中蔚为大观。从形式主义的角度看,一个独立性结果一般由两个相对一致性证明组成:假设我们认为 T 是一个一致的理论,进入,如果我们获得了两个相对一致性命题 $\text{Con}(T) \rightarrow \text{Con}(T+\varphi)$ 以及 $\text{Con}(T) \rightarrow \text{Con}(T+\neg\varphi)$,那么就得到了 φ 相对于 T 的独立性,即,我们必须承认, T 既证明不了 φ ,也证明不了 φ 的否定,除非我们认为 T 是不一致的。多宇宙观则为这种独立性证明提供了“工业化”的程序:假设在多宇宙中有 T 的模型,如果能使用力迫法在多宇宙中构造 $T+\varphi$ 的模型以及 $T+\neg\varphi$ 的模型,即可获得相应的独立性结果。许多重要的独立性研究都以这种方式完成。([13])

其次是新公理的搜寻。对于实在论者,自然不会仅满足于 ZFC 中的可证性,而是希望能够获取更强的新公理。对新公理的搜寻目前也是公理集合论的一个主

要的研究方向。这方面的工作仍然是可以在新的形式主义框架下进行的：我们可以先把新公理所表达的视为理想元，然后去考察增加了新公理后的新的形式系统的丰富性，这是传统数学一直在实践着的方法。那么一个自然的问题是，什么样的数学命题可以作为新公理的候选？前述的弗里德曼规划是对这个问题的一种回应：为获得具有某种独立性的常规数学结果所必须的命题可能可以作为新公理的候选。这一进路是形式主义的。

对探究新公理问题的另外一个回应则改造自武丁的一个批评（[15, 18]）。武丁认为¹⁹，在假设武丁基数类是真类和 Ω 猜想下，脱殊多宇宙真理观只是“把整个集合宇宙的真归结为这个宇宙的某个清晰片段的真”，因此“只是一种更为精致的形式主义”（[18]）。如前所述，那种把真视为某个固定的形式系统中的可证性的意象只是对形式主义的“卡通般”的描画，新的形式主义框架自然不会限制于这种“片段的真理”，尽管它确实强调可证性，但是它允许有多种的形式系统，并且并不否定形式系统中使用到的理想元和理想命题可能的实在性，因此武丁的批评或许可以说是对形式主义的一个具体策略的驳斥，但是并未直接否定形式主义本身，相反，由武丁的批评可以导向对前述问题的这样的一个回应：一个数学命题是脱殊绝对的或者在力迫下不变的可能是它可以作为新公理候选的一个必要条件，其理由恰恰在于，作为数学基础的集合论应该是对数学的最基本、最普遍的描画，因此，集合论公理应该具有某种绝对性。

最后，就如希尔伯特规划促生了证明论那样，在新的形式主义的框架下，对于多宇宙的研究也在形成新的数学实践。例如，前面介绍过的多宇宙观的主要倡导者，哈姆肯斯与弗里德曼都与他们各自的合作者进行了系统性的研究²⁰，这方面的工作也得到了其他研究者的跟随与呼应²¹。

6 结束语

数学对象，或者更一般的集合对象的实在性一直是数学哲学中争论的焦点。形式主义常常被与反实在论相关联着，但是这并不确切，许多拥护形式主义的学者至多只是持有部分实在部分反实在观，而这在数学发展史上是非常常见的。更重要的是这一断定或许是偏离形式主义的真正要点的：形式主义的真正要义在于注重形式系统、注重元数学；它注意到了数学实践中存在着理想元和理想命题这一事实，从而在本体论上采取相对谨慎的态度，但是这并不意味着它对那些理想元持反实在论的看法，事实上，理想元、理想命题的提出恰恰是人类创造力和想

¹⁹更详细的介绍请参看 [18] 的第二节。

²⁰前一方面的工作请参看 [22]，后一方面的工作请参看 [1, 2]。

²¹比如，最近文丘里（G. Venturi, [12]）将罗宾逊无穷力迫法应用到脱殊多宇宙上，以对脱殊模型的选取进行代数探讨。

象力的产物，它们是否最终被接受依赖于它们是否提供了深刻的洞见、是否带来了丰富的数学成果，而这与形式主义对数学实践的注重是一致的。

多宇宙观是数学基础中新近出现的一组观点，它（们）的特点在于其并非只是纯哲学概念性的，与之对应着精确的数学概念以及丰富的研究课题，它并不必然导向实在论立场，因此可以容纳到新的形式主义框架中去，在这种改造后的形式主义的框架下，它会为当前的数学实践提供认识论上的理据，同时也像希尔伯特规划样式的形式主义那样，创造新的数学实践形式。形式主义以及多宇宙观最终都是“为了人类心智的荣耀”。

参考文献

- [1] C. Antos *et al.*, 2015, “Multiverse conceptions in set theory”, *Synthese*, **192**(8): 2463–2488.
- [2] T. Arrigoni and S. Friedman, 2013, “The hyperuniverse program”, *Bulletin of Symbolic Logic*, **19**(01): 77–96.
- [3] H. Curry, 1954, “Remarks on the definition and nature of mathematics”, *Dialectica*, **8**(3): 228–233.
- [4] H. Friedman, 1998, “Finite functions and the necessary use of large cardinals”, *Annals of Mathematics*, **148**(3): 803–893.
- [5] S. Fuchino, 2012, “The set-theoretic multiverse as a mathematical plenitudinous platonism viewpoint”, *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, **20**: 49–54.
- [6] V. Gitman and J. D. Hamkins, 2010, “A natural model of the multiverse axioms”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **51**(4): 475–484.
- [7] J. D. Hamkins, 2012, “The set-theoretic multiverse”, *The Review of Symbolic Logic*, **5**(3): 416–449.
- [8] D. Hilbert, 1984, “On the infinite”, in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, pp. 183–201, Cambridge: Cambridge University Press.
- [9] K. Kunen, 1980, *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, Amsterdam: North-Holland.
- [10] P. Simons, 2009, “Formalism”, in A. Irvine *et al.* (eds.), *Philosophy of Mathematics*, pp. 291–310, Amsterdam: Elsevier.
- [11] W. Tait, 1981, “Finitism”, *The Journal of Philosophy*, **78**(9): 524–546.
- [12] G. Venturi, 2020, “Infinite forcing and the generic multiverse”, *Studia Logica*, **108**(2): 277–290.
- [13] N. Weaver, 2014, *Forcing for Mathematicians*, Singapore: World Scientific.
- [14] A. Weir, 2020, “Formalism in the Philosophy of Mathematics”, in E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Spring 2020 edition, <https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/formalism-mathematics/>.
- [15] H. W. Woodin, 2004, “Set theory after Russell: The journey back to Eden”, in G. Link (ed.), *One Hundred Years of Russells Paradox*, pp. 29–48, Berlin: De Gruyter.

- [16] R. Yang, 2012, "A pragmatistic view on philosophy of mathematics", *Studies in Logic*, **5(1)**: 68–95.
- [17] 郝兆宽, 哥德尔纲领, 2018年, 上海: 复旦大学出版社。
- [18] 郝兆宽, 杨跃, “柏拉图主义与集合论终极宇宙”, 逻辑学研究, 2017年第4期, 第87–98页。
- [19] 康孝军, “反推数学及其哲学意义”, 科学技术哲学研究, 2015年第2期, 第34–39页。
- [20] 康孝军, “希尔伯特的有穷数学”, 自然辩证法通讯, 2018年第6期, 第44–49页。
- [21] 斯图尔特·夏皮罗(著), 郝兆宽、杨睿之(译), 数学哲学: 对数学的思考, 2009年, 上海: 复旦大学出版社。
- [22] 杨睿之, “集合论多宇宙观述评”, 自然辩证法研究, 2015年第9期, 第99–103页。
- [23] 叶峰, “一种自然主义的数学哲学”, 科学文化评论, 2008年第4期, 第5–16页。
- [24] 叶峰, 二十世纪数学哲学, 2010年, 北京: 北京大学出版社。

(责任编辑: 袁之)

Set-theoretic Multiverse View and Formalism

Jiangjie Qiu

Abstract

The reality of mathematical objects has always been the focus of debate in the philosophy of mathematics. Formalism, one of the three major schools of foundations of mathematics in twentieth-century, is often regarded as anti-realism. The recently popular multi universe view seems to take a realist position. This paper tries to argue that the essence of formalism lies in the formal system and meta-mathematics, so the formalism after some reconstruction can be ontologically neutral. On the other hand, the core concepts in the multi-universe view can be regarded as ideal elements, so the multi-universe view can be incorporated into this new formalism framework. Furthermore, the combination of these two can support and promote current mathematical practice and even create new mathematical practice forms.