

一个关于有穷开放过程的类型论系统

梁晓龙

鞠实儿[✉]

摘要: 自然界、人类社会和认知领域中普遍存在可扩展的类。它有两种存在形式: 潜无穷序列, 以及有穷开放类。后者是成员可扩展的类, 这种扩展或开放的过程不能无限制地进行下去, 且无法给定过程的终点。进一步, 开放过程具有不同的分层和阶段, 而其生成的类成员以及用于生成类成员的算子也归属于不同层次和不同的阶段。本文主要采用类型论的方法, 描述有穷开放过程及其产物有穷开放类, 给出了用于描述有穷开放类的分层和分阶段属性的开放类型系统。

关键词: 有穷; 开放; 开放类型系统

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 引论

首先, 有穷是人类知识中最为常见的概念之一, 更是逻辑学的核心概念。如逻辑系统中的合式公式和定理的证明长度都是有穷的。在现实世界中, 有穷体现为施加在对象及其发展过程的可量化特性上的限制: 如个体获得的知识总量、计算机储存的数据量、计算机的计算能力、物体运动的速度等物理数值都是有穷的。而无穷可以看作是有穷的否定概念, 常用来刻画理想对象的数量特征: 如图灵机的纸带长度、集合论中的自然数集等。

另一方面, 数学和物理领域以及日常经验生活中的事物, 通常都具有可变性。我们将事物拓展的过程称为开放过程。为了明确起见, 本文主要研究可构造的开放过程, 如递归构造自然数的过程。¹ 而开放过程所产生的那些成员数可扩展的

收稿日期: 2019-08-02

作者信息: 梁晓龙 中山大学逻辑与认知研究所
LiangHillon@gmail.com

鞠实儿[✉] 中山大学逻辑与认知研究所
hssjse@mail.sysu.edu.cn

基金项目: 国家社会科学基金重大项目“广义论证的理论与实验”(18ZDA033)。

致 谢: 叶峰教授和文学锋副教授对本文初稿提出了有益的批评和建议, 在此谨表谢意! 文中的错误当由作者本人负责。

¹将归纳构造自然数看作自然数的构建过程, 这一观点可以参考[1]。在该文中, 布劳威尔(L. E. J. Brouwer)分析“two-oneness”的直观时使用到“process”一词。此外, 在[2, 3, 5]等文献中, 也都用到“process”一词来描述计数、论域扩充(extending the domain)、树和子树等概念。

类则被称为开放类。例如, 上述递归过程生成的自然数所构成的类。反之, 我们将那些成员数固定不变的类称为封闭类。类中的成员称作对象。

其次, 有穷/无穷和开放/封闭这两对概念之间有密切关系。事实上, 对任一组对象组成的类, 都可考虑它是否具有开放性。而当对象类具有开放性, 或为开放类时; 就有必要探讨相应的开放过程是有穷的还是无穷的, 以及是否存在确定的过程完成后不再变化的结果。因此, 可以区分出四种不同的情况: 有穷开放、有穷封闭、无穷开放、无穷封闭。其中, 第二种情况是指有限步内完成的过程, 其生成的结果是确定的成员数有穷且不再扩展的类; 第三种指一个潜无穷过程, 其生成的对象形成的类是一个成员数不断增加, 其增加过程无限制地进行下去不会停止的类; 第四种情况中, 其生成的结果是一个确定的成员数无穷且不再扩展的类, 是一个实无穷; 而有穷开放是指: 开放过程不能无限制地进行下去, 开放过程会生成未完成的有穷类。例如: 人类或机器从 0 开始通过后继函数构造自然数的过程, 和该过程生成的自然数所组成的类。如所周知, 后三种情况已经得到广泛而深入的研究。本文主要探讨有穷开放过程及其所生成的有穷开放类。

进一步, 根据开放过程生成对象的方式和时间节点的不同, 开放过程可以被区分成不同的阶段, 而生成的对象也被相应地划归为各个不同阶段。如数域扩张过程中, 从自然数类到整数类、从整数类到有理数类、从有理数类到实数类等过程, 均可看作数域扩张过程的不同阶段; 又如自然数生成过程中, 生成 10^4 以内数、生成 10^8 以内数、生成 10^{12} 以内数等过程, 均可看作自然数生成过程的不同阶段。各个阶段可以按顺序分别称为第一阶段、第二阶段、等等。第一阶段也称初始阶段。

再次, 开放过程的实质是通过已有的对象生成新对象; 而生成新对象的各种方式可以看作不同的对象生成算子, 又称开放算子。不仅如此, 算子本身也是对象, 对于这些生成算子组成的类, 存在进一步的问题: 这个类是否具有开放性。不难看到, 如此这般关于开放类的分析过程, 可以一层一层地持续下去。这就是说: 在开放过程中生成的开放类具有分层结构。值得一提的是: 根据前文分析, 不同分层上的开放过程也可以是分阶段的, 其成员归属于开放过程的不同阶段。本文主要通过研究开放类的层次和阶段, 揭示有穷开放过程及其生成结果的形式结构。

最后, 在研究方法方面, 考虑到: 类型论语言中任意对象所在的类型均是唯一的。对象和对象所在类型分别属于不同的类型, 故一个用在对象上的谓词使用在对象所在的类型上是不合语法的; 同样, 将若干对象以及对象所在类型组合在一起作为一个新类型, 这也是不合语法的。而集合论语言 (一阶语言) 中, 谓词符并不会限定于特定的集合, 如可用于自然数上的谓词符同样可用于自然数集上, 此外也存在如 $\{3, \omega\}$ 这类既含有自然数又含有自然数集本身的集合。在这个区别下, 类型论语言在描述不同层次的对象使用的不同谓词时会更加直观。故使用类

型论语言更便于描述开放类的分层属性。

此外,本文主要研究可构造的开放过程,故符合构造主义观点的理论更适合作为本文构建的系统的基础理论。而柯里-霍华德对应(Curry-Howard correspondence)理论认为类型、程序以及公式之间有着对应关系:命题对应类型(propositions as types);证明对应程序(proofs as programs);证明的化简对应程序的评估(simplification of proofs as evaluation of programs)。²由于程序通常是由确定的算法给出的,具有可构造性,故在这个对应下类型论更符合构造主义观点、更便于描述符合构造主义的哲学观点。为此,本文将使用类型论语言作为对开放类及其分层和分阶段属性进行形式化描述和分析的工具。

根据以上所述,本文将在第2节介绍类型论语言。在第3节中,本文将以自然数类为典型案例,分析有穷和开放的分层和分阶段属性,并使用类型论语言进行形式化。第4节中,本文将对第3节的形式化系统进行一般化推广,使用类型论语言构建关于有穷开放类的分层和分阶段系统,给出有穷开放类型系统的形式化定义。

2 类型论语言的基本概念

为了简洁起见,本节主要介绍本文研究中涉及的部分类型论概念及其与公式之间的对应关系,更为详尽的相关内容可以参考[4,6]等文献。本文所采用的是马丁洛夫类型论(Martin-Löf's Type Theory)。³

定义 1.⁴ 类型论语言中的项 t 形式如下:

$$t ::= x \mid \lambda x.t \mid (t\ t') \mid c \mid f$$

其中 $x, x', \dots$ 为变元符, $c, c', \dots$ 为项原始常元符, $f, f', \dots$ 为定义常元符。

其中,每个定义常元符 f 通常会给出若干形如 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) := t$ 的定义等式,用以给出定义常元符在代入不同项时所得到的项的具体表达式。

定义 2. 类型论中基本断定的形式为: $a : A$ 以及 $a \equiv b : A$, 其中 a, b, A 为项。

将 $a : A$ 称为: a 的类型为 A ; 将 $a \equiv b : A$ 称为: 项 a 和项 b 在类型 A 上断定相等。

定义 3. 若一基本断定序列 $x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_n : A_n$ 满足: 变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 互不相同, 则称其为一个上下文(context)。空的上下文记为 $\cdot$ 。

²可参考[7]中引言部分。

³本文构建的系统并没有用到所有的马丁洛夫类型论中的类型。在本文以外的后续工作中,本文所构建的系统可通过增加关于算数的公理,以进一步描述有穷开放观点下的算数系统。在这个需求下,马丁洛夫类型论提供的等同类型(identity type)具有重要作用。故出于后续工作需求的考虑,本文采用马丁洛夫类型论作为基础理论。

⁴定义 1-16 可参见[6]中附录部分。

上下文中的每个基本断定可称为一个假定 (assumption)。

常用字符 Γ, Δ 表示类型论中的上下文。

定义 4. 类型论中的断定 (judgement) 的形式为: $\Gamma \text{ ctx}$, $\Gamma \vdash a : A$ 以及 $\Gamma \vdash a \equiv b : A$, 其中 Γ 为上下文, a, b, A 为项。

将 $\Gamma \text{ ctx}$ 称为: 上下文 Γ 是良形式的 (well-formed); 将 $\Gamma \vdash a : A$ 称为: 在上下文 Γ 的假定下, a 的类型为 A ; 将 $\Gamma \vdash a \equiv b : A$ 称为: 在上下文 Γ 的假定下, 项 a 和项 b 在类型 A 上断定相等。

当上下文 Γ 为空时, $\Gamma \vdash a : A$ 和 $\Gamma \vdash a \equiv b : A$ 可分别记为 $\cdot \vdash a : A$ 和 $\cdot \vdash a \equiv b : A$, 或 $\vdash a : A$ 和 $\vdash a \equiv b : A$ 。

定义 5. 类型论中的推理规则 (inference rule) 的形式为:

$$\frac{\mathcal{J}_1 \quad \dots \quad \mathcal{J}_k}{\mathcal{J}} \quad \frac{\mathcal{J}_1 \quad \dots \quad \mathcal{J}_k}{\mathcal{J}} \text{ NAME}$$

其中, NAME 为推理规则的名称, $\mathcal{J}, \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k$ 为断定。

推理规则中, 横线上方称为推理规则的假设, 横线下方向称为推理规则的结论。

定义 6. 如果一个通过若干推理规则构造的树的根部的断定为 $\mathcal{J}$, 则称该树为断定 $\mathcal{J}$ 的一个推演。⁵

定义 7.⁶ 若存在断定 $\Gamma \vdash a : A$ 的一个推演, 其中 Γ 为上下文, a, A 为项, 则: 称断定 $\Gamma \vdash a : A$ 可证; 称类型 A 在上下文 Γ 中是可居留的 (inhabited); 若 A 为命题类型, 则称命题 A 在上下文 Γ 中可证。

若存在断定 $\Gamma \vdash d : (P a)$ 的一个推演, 其中 Γ 为上下文, a, d, P 为项, 若 P 为一个谓词, 则称在上下文 Γ 中项 a 满足谓词 P 。

接下来本节将列出本文进行形式化时所需要涉及到的部分马丁洛夫类型论中的推理规则。

类型论语言中, 类型所在的类型称为类型宇宙 (type universes), 通常用一序列常元 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ 来表示不同层次的类型宇宙。当文中不需要表明所需讨论的是哪一层的类型宇宙时, 可以用 **Type** 表示类型宇宙, 也可用 $A : \text{Type}$ 表示 A 是一个类型。此外, 也用 **Set** 表示集合宇宙 (set universes), 用 $A : \text{Set}$ 表示 A 是一个集合; 用 **Prop** 表示命题宇宙 (proposition universes), 用 $A : \text{Prop}$ 表示 A 是一个命题。

⁵类型论中推演的示例可参见 [6] 中附录部分。

⁶命题类型和谓词的定義可参见 [6], 第 41–47 页。

定义 8. 类型宇宙的推理规则为:

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-INTRO} \quad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-CUMUL}$$

类型宇宙推理规则给出了类型论语言中各个类型所在的宇宙之间的关系。

定义 9. 良形式推理规则为:

$$\frac{}{\cdot \text{ ctx}} \text{ ctx-EMP} \quad \frac{x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_{i-1} : A_{i-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_n : A_n) \text{ ctx}} \text{ ctx-EXT}$$

定义 10. 空类型 $\mathbf{0}$ 的规则包括形成规则和消去规则⁷:

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \mathcal{U}_i} \mathbf{0}\text{-FORM} \quad \frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash \text{ind}_0(\lambda x. C, a) : C[a/x]} \mathbf{0}\text{-ELIM}$$

定义 11. 单元类型 $\mathbf{1}$ 的规则包括形成规则、引入规则、消去规则和计算规则。

单元类型的引入规则和消去规则如下:

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \star : \mathbf{1}} \mathbf{1}\text{-INTRO} \quad \frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x] \quad \Gamma \vdash a : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash \text{ind}_1(\lambda x. C, c, a) : C[a/x]} \mathbf{1}\text{-ELIM}$$

单元类型的形成规则和计算规则如下:

$$\frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_i} \mathbf{1}\text{-FORM} \quad \frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c : C[\star/x]}{\Gamma \vdash \text{ind}_1(\lambda x. C, c, \star) \equiv c : C[a/x]} \mathbf{1}\text{-ELIM}$$

空类型和单元类型在柯里-霍华德对应理论中对应命题 *False* 和命题 *True*, 规则 $\mathbf{0}\text{-ELIM}$ 对应命题 *False* 能推出任意命题; 规则 $\mathbf{1}\text{-INTRO}$ 对应命题 *True* 可被无条件推出。

定义 12. 依赖乘积类型 (Dependent product types) 也称依赖函数类型 (Dependent function types) 或 Π -类型 (Π -types), 依赖乘积类型的推理规则有五条, 包含形成规则、引入规则、消去规则、计算规则和唯一性规则。

依赖乘积类型的形成规则和引入规则为:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (\Pi x : A) B : \mathcal{U}_i} \Pi\text{-FORM} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda(x : A). b : (\Pi x : A) B} \Pi\text{-INTRO}$$

依赖乘积类型消去规则和计算规则为:

$$\frac{\Gamma \vdash f : (\Pi x : A) B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]} \Pi\text{-ELIM} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda(x : A). b)(a) \equiv b[a/x] : B[a/x]} \Pi\text{-COMP}$$

⁷ $B[a_1, \dots, a_n/x_1, \dots, x_n]$ 是指将项 B 中自由变元 $x_1, \dots, x_n$ 的自由出现依次分别代入替换成 $a_1, \dots, a_n$, 且对任意 $1 \leq i \leq n$, 均有 a_i 对于 x_i 在 $B[a_1, \dots, a_{i-1}/x_1, \dots, x_{i-1}]$ 中替换自由。

依赖乘积类型的唯一性规则为:

$$\frac{\Gamma \vdash f : (\Pi x : A)B}{\Gamma \vdash f \equiv (\lambda x. f(x)) : (\Pi x : A)B} \text{ } \Pi\text{-UNIQ}$$

类型 $(\Pi x : A)B$ 称为依赖于类型 A 的到类型 B 的函数类型, 也可记为 $\Pi_{(x:A)}B$ 、 $\forall x : A, B$ 或 $(\forall x : A), B$ 。若需要强调类型 B 根据变元 x 的取值变化, 也可记为 $(\Pi x : A)B(x)$ 、 $\Pi_{(x:A)}B(x)$ 、 $\forall x : A, B(x)$ 以及 $(\forall x : A), B(x)$ 。⁸

Π -类型在柯里-霍华德对应理论中对应全称命题, Π -类型的引入和消去规则分别对应于一阶逻辑的全称引入和全称消去规则。

定义 13. 在依赖乘积类型的规则中, 若类型 B 不随变元 x 的取值变化, 则可称为函数类型 (function type), 作为函数类型时, $(\Pi x : A)B$ 可以记为 $A \rightarrow B$ 。⁹

函数类型在柯里-霍华德对应理论中对应蕴含命题, 其引入规则对应蕴含引入规则; 其消去规则对应 MP 规则。

除以上若干类型的推理规则外, 马丁洛夫类型论中还包括 Σ -类型、等同类型、归纳类型 (inductive type) 等类型的推理规则; 除上述良形式规则外, 还包括变元规则 (variables rule)、替换规则 (substitution rule)、弱化规则 (weakening rule) 以及相等规则 (equality rule) 等结构规则。详细可参见 [6] 中附录部分。

定义 14. 一个形如 $a : A$ 的基本断定可被称为一个公理, 其中 a, A 为项。

一组公理以及马丁洛夫类型论的所有推理规则组成的整体, 称为一个基于马丁洛夫类型论的公理系统, 简称一个公理系统。

不失一般性, 由于任意项的所在类型是唯一的, 故可用项 a 来表示公理 $a : A$; 由于不同公理系统的推理规则均为马丁洛夫类型论的推理规则, 故可用公理系统的公理集表示公理系统本身。进一步, 由于一组数量有穷的公理可以看作一个上下文, 故也可用一个上下文表示一个公理系统。

定义 15. 对任意公理系统 $\mathcal{A}$, 若存在 $\mathcal{A}$ 中部分公理组成的上下文 Γ , 且存在断定 $\Gamma \vdash a : A$ 的一个推演, 其中 a, A 为项, 则: 称断定 $a : A$ 在 $\mathcal{A}$ 中可证; 称类型 A 在 $\mathcal{A}$ 中是可居留的; 若 A 为命题类型, 则称命题 A 在 $\mathcal{A}$ 中可证。

若存在 $\mathcal{A}$ 中部分公理组成的上下文 Γ , 且存在断定 $\Gamma \vdash d : (P a)$ 的一个推演, 其中 a, d, P 为项, 且 P 为一个谓词, 则称 $\mathcal{A}$ 中项 a 满足谓词 P 。

⁸多层的依赖乘积类型的符号可以进行简写, 只保留最开始的 Π 或 $\forall$ 符号, 如 $(\Pi x y : A)B$ 、 $\Pi_{(x:A)(y:C)}B$ 、 $\forall (x : A) (y : C), B$ 、 $(\forall x y : A), B$ 等等。在涉及类型宇宙的情况下 $(\forall A : \mathcal{U}_i), B$ 可简写为 $(\forall A), B$, 若根据表达式能得出 $(\forall x : A), B$ 形式的式子中的 A 的表达式时, 也可简写为 $(\forall x), B$ 。

⁹多次使用符号 $\rightarrow$ 的情形下, 符号 $\rightarrow$ 是右结合的, 即 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 表示 $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 。

定义 16. 对任意公理系统 $\mathcal{A}$ ，若对任意的 $\mathcal{A}$ 中部分公理组成的上下文 Γ ，以及任意项 a ，不存在断定 $\Gamma \vdash a : \mathbf{0}$ 的使用公理系统中推理规则的推演，则称公理系统 $\mathcal{A}$ 是一致的。

3 有穷开放的分层和分阶段属性

本节将给出有穷开放分层和分阶段的直观图景，以及一个自然数开放类的具体的构造过程；进而分析自然数开放类的各层次各阶段对象，以及各层次各阶段的有穷谓词之间的关系；并使用类型论语言对此进行形式化，构建一个关于自然数开放类的类型论系统。

为了实现目标，本节先用类型论语言描述一个自然数的系统，它可以作为有穷开放过程以及由此生成的有穷开放类的典型案例。通过分析这一案例，可以展示有穷开放类构建过程及其分层和分阶段的一般结构。

根据先前所述，对象和开放算子的分层和分阶段的直观图景如下，称为有穷开放层次图景：

第 0 层:	第一阶段	第二阶段	第三阶段	第四阶段	...	...	...
第 1 层:	第一阶段	第二阶段	第三阶段	第四阶段	...	...	...
第 2 层:	第一阶段	第二阶段	第三阶段	第四阶段	...	...	...
第 3 层:	第一阶段	第二阶段	第三阶段	第四阶段	...	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
第 n 层:	第一阶段	第二阶段	第三阶段	第四阶段	...	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

在上述图景中，有穷开放类与它的生成算子的类分属于不同的层次。其中，处在第 0 层的是：关于类的成员的有穷开放类，简称第 0 层开放类；在第 1 层的是：由从第 0 层开放类生成其新成员的算子构成的有穷开放类；在第 2 层的是：由从第 0 层或第 1 层开放类的成员出发，生成第 0 层或第 1 层开放类的新成员的那些算子组成的有穷开放类；依次类推，在第 n 层的是：由从前 n 层中某一层开放类的成员出发、生成前 n 层中某一层开放类的新成员的算子构成的有穷开放类。每个层次上的对象整体上构成一个随开放过程变化的开放类，而每个层次上的开放类又根据开放过程区分为不同的阶段。其中，每个层次中的第一阶段中的对象（若存在的话）均是给定的。

例如：在使用自然数 0 和后继函数 f_S 递归生成自然数开放类的过程中¹⁰，自

¹⁰需要注意的是，是否将生成自然数的过程看作开放过程，这取决于数学哲学家的哲学观点。若数学哲学家认为：自然数集是事先给定的满足某些公理的集合。那么，就不存在生成自然数的开放过程，其观点中的自然数类也应该是一个封闭的类。若数学哲学家认为：自然数是通过各种运算方式逐步生成，那么自然数类则是一个开放的类。进一步，当数学哲学家认为自然数类为开放类时，需给出的初始阶段的自然数和各层开放算子，取决于数学哲学家所认为的自然数的生成方式。

然数 0 为第 0 层的第一阶段给定的对象, f_S 为第 1 层的第一阶段给定的开放算子。在任一开放类所在层次上, 如果没有给定的对象和生成算子, 则无法形成这一层次上的开放类。

可见, 上述从 0 出发通过后继函数生成自然数开放类的方式较为简单, 仅涉及到自然数开放类所在层次, 及其下一层算子所在类的层次。进一步, 为描述更复杂情形下有穷开放类的生成方式以及各阶段之间的结构关系, 需要考虑涉及更多层次的情形。不失一般性, 本文选择了另一种自然数定义的方案, 并基于此方案描述了一个作为有穷开放类的自然数类。在本节中, 定义自然数类时给出的初始元素为: 自然数 0, 1, 2、后继函数 f_S 、+2 函数 f_{+2} 、+3 函数 f_{+3} 、加法函数 f_+ 、二次迭代函数 $f_{(-)^2}$ 、值为 0 的自然数上的常函数 f_0 、值为 0 的定义域为自然数上一元函数的常函数 f'_0 。自然数类定义为由上述各个初始对象和算子递归生成的对象类, 后文将此自然数类记为 $\mathbb{N}_3$ 。¹¹

本节中, 基于类型论语言的描述上述方式生成的自然数类 $\mathbb{N}_3$ 的公理系统, 称为基于 $\mathbb{N}_3$ 的有穷开放分层系统, 后文中记为 $Open\mathbb{N}_3$ 。系统 $Open\mathbb{N}_3$ 包含了两部分公理: 一部分是与上述自然数类中初始元素相关的公理; 另一部分是与有穷开放分层图景的前 4 层的结构相关的公理。 $Open\mathbb{N}_3$ 将描述这些层次上的各个阶段有穷谓词之间的关联, 并作为典型案例展示有穷开放分层图景的前 4 层的一般结构。

在定义系统 $Open\mathbb{N}_3$ 时, 本节将依次分阶段给出有穷对象和分层次分阶段给出开放算子。首先, 引入论域类型: 第 0 层对象的论域记为 $U_{opc} : \mathbf{Type}$ 。

根据前文所述, 给定的第 0 层第一阶段的对象为: 0, 1, 2 : U_{opc} 。

对于每一个被认为是第 0 层第一阶段有穷的对象, 需要有一个关于“第 0 层第一阶段有穷”的谓词, 以及相应的公理宣称其有穷。

表示第 0 层第一阶段有穷的谓词记为 $F_1 : U_{opc} \rightarrow \mathbf{Prop}$, F_1 为类型 U_{opc} 上的一元谓词。宣称自然数 0、1、2 是第 0 层第一阶段有穷的公理分别为:

$$A_{F_1,0} : F_1\ 0 \quad A_{F_1,1} : F_1\ 1 \quad A_{F_1,2} : F_1\ 2$$

在第 0 层第一阶段有穷对象之后, 下一层次为第 1 层的开放算子, 开放算子用于生成更多的对象。

第 1 层开放算子所在的类型记为 $U_{opc} \rightarrow U_{opc}$ 。

表示第 1 层开放算子的第一阶段有穷谓词记为 $F_1^{O_1} : (U_{opc} \rightarrow U_{opc}) \rightarrow \mathbf{Prop}$, $F_1^{O_1}$ 为类型 $U_{opc} \rightarrow U_{opc}$ 上的一元谓词。

¹¹ 由于初始元素包括了自然数 0 及后继函数 f_S , 且涉及的其他自然数和算子均为皮亚诺算数系统中可定义的。所以可根据皮亚诺算数系统中的公理, 以及根据各个初始元素在皮亚诺算数系统中的定义, 给出相应的关于各个初始元素的公理。此方式给出的公理均在皮亚诺公理系统中可证。反之, 由于皮亚诺算数系统的公理集是此处所得的公理系统公理集的一个子集。故皮亚诺算数系统中的公理均在此系统中可证。故可通过此种更复杂的方式定义递归生成自然数开放类的过程, 且此过程所描述的自然数类与前文更简单的生成方式所描述的自然数类相吻合。

此时的有穷谓词与此前的第 0 层第一阶段有穷谓词的论域并不相同。

根据前文所述, 给定的三个第 1 层第一阶段的算子为:

$$f_S : U_{opc} \rightarrow U_{opc} \quad f_{+2} : U_{opc} \rightarrow U_{opc} \quad f_{+3} : U_{opc} \rightarrow U_{opc}$$

f_S 、 f_{+2} 、 f_{+3} 分别为自然数上的后继函数、+2 函数和 +3 函数。

与第 0 层第一阶段有穷对象一样, 对于第 1 层第一阶段开放算子给出相应的公理, 以宣称第 1 层第一阶段开放算子有穷:

$$A_{F_1, f_S} : F_1^{O_1} f_S \quad A_{F_1, f_{+2}} : F_1^{O_1} f_{+2} \quad A_{F_1, f_{+3}} : F_1^{O_1} f_{+3}$$

给定第 0 层第一阶段对象和第 1 层第一阶段开放算子后, 可以通过函数的应用获得更多的对象, 如 $(f_S 0)$ 、 $(f_{+2} 1)$ 、 $(f_{+3} 2)$ 等等。

数学哲学中, 潜无穷和实无穷观点会认为: 若一个数 x 有穷 (如 0), 一个函数 f 满足“作用在任意有穷数上得到的数仍然有穷” (如后继函数 f_S), 则 x 在函数 f 作用任意次的情况下得到的数仍然是有穷的。即是说, 认为函数迭代作用生成论域中的元素的过程是可以一直进行下去的。

而在有穷开放观点中, 将避免接受“算子任意次迭代生成的对象‘同样有穷’”。接下来将给出有穷开放观点下的, 关于第 0 层第一阶段有穷对象和第 1 层第一阶段有穷开放算子的公理。

为方便起见, 首先引入一个三元谓词符 P_{map} , 该谓词可用于简化公理的表达式, 表示“保持满足性”。 P_{map} 及其所在的类型由如下断定给出:

$$\begin{aligned} P_{map} : & (\forall A B : \mathbf{Type}) (\forall P_1 : A \rightarrow \mathbf{Prop}) \\ & (\forall P_2 : (A \rightarrow B) \rightarrow \mathbf{Prop}) (\forall P_3 : B \rightarrow \mathbf{Prop}), \\ & (\forall a f, P_1 a \rightarrow P_2 f \rightarrow P_3 (f a)) \end{aligned}$$

其中, 由 P_1, P_2, P_3 的类型可以得知 A, B 的形式, 故不失一般性, 可将 A, B 视为隐参数, 用 $(P_{map} P_1 P_2 P_3)$ 表示 $(P_{map} A B P_1 P_2 P_3)$ 。项 $(P_{map} P_1 P_2 P_3)$ 表示谓词 P_{map} 分别作用在关于 A 、关于 A 到 B 的函数所在类型、关于 B 的三个谓词 P_1 、 P_2 、 P_3 上可得: 满足谓词 P_2 的函数 f , 作用在满足 P_1 的项 a 上, 所得的项满足 P_3 。

表示第 0 层第二阶段有穷谓词记为 $F_2 : U_{opc} \rightarrow \mathbf{Prop}$, F_2 为类型 U_{opc} 上的一元谓词。且第 0 层第二阶段有穷谓词应满足: 对于任意第 0 层第一阶段有穷的对象 n , 使用第 1 层第一阶段有穷的开放算子 f 作用后, 得到的项满足第 0 层第二阶段有穷谓词。即公理:

$$A_{F_1, F_1^{O_1}, F_2} : P_{map} F_1 F_1^{O_1} F_2$$

当需要开放过程是扩充过程的情形时, 可得 F_1 与 F_2 之间的关系公理:

$$A_{F_1 \rightarrow F_2} : \forall x, F_1 x \rightarrow F_2 x$$

该关系公理也称为扩充公理。

定义 17. 若一个公理系统包括且仅包括以下公理: U_{opc} 、0、1、2、 F_1 、 $A_{F_1,0}$ 、 $A_{F_1,1}$ 、 $A_{F_1,2}$ 、 $F_1^{O_1}$ 、 f_S 、 f_{+2} 、 f_{+3} 、 A_{F_1,f_S} 、 $A_{F_1,f_{+2}}$ 、 $A_{F_1,f_{+3}}$ 、 P_{map} 、 F_2 、 $A_{F_1,F_1^{O_1},F_2}$ 、 $A_{F_1 \rightarrow F_2}$, 则称该公理系统为前 2 层的基于 N_3 的有穷开放分层系统, 记为 $Open2N_3$ 。

若一个公理系统包括且仅包括以下公理: U_{opc} 、 F_1 、 $F_1^{O_1}$ 、 P_{map} 、 F_2 、 $A_{F_1,F_1^{O_1},F_2}$ 、 $A_{F_1 \rightarrow F_2}$, 则称该公理系统为前 2 层有穷开放分层的基本公理系统, 记为 $BaseO_2$ 。

在这组公理中, 第 0 层第一阶段有穷的对象使用第 1 层开放算子获得的对象是有穷的, 但是对生成的对象使用的“有穷”谓词和第 0 层第一阶段对象使用的“有穷”谓词作出了区分。

可以注意到, 若不对有穷谓词作区分, 认为 F_1 与 F_2 相同, 则上述公理 $A_{F_1,F_1^{O_1},F_2}$ 可变形为:

$$A_{F_1 \in q F_2} : P_{map} F_1 F_1^{O_1} F_1$$

若采用该变形公理替换掉系统 $Open2N_3$ 中的公理 $A_{F_1,F_1^{O_1},F_2}$, 则可使用归纳法证明所得系统可以推出存在一组满足谓词 F_1 的潜无穷长的对象序列: 0、 $(f_S 0)$ 、 $(f_S (f_S 0))$ 、 $(f_S (f_S (f_S 0)))$ 、 $(f_S (f_S (f_S (f_S 0))))$ 、 $(f_S (f_S (f_S (f_S (f_S 0))))$ ……即在第 0 层第一阶段中, 函数 f_S 可以任意次迭代仍然保持所得对象满足第 0 层第一阶段有穷谓词。

本文在构建各阶段有穷和各层次开放的过程中将避免以上情形。在 $Open2N_3$ 中, 不假定 F_1 与 F_2 相同, 使用结构归纳法可证明: 不能得出形如 $(f_{+2} (f_S 2))$ 等对象满足谓词 F_2 。

继续上述构建系统过程, 当已获得若干第 0 层第一、二阶段有穷对象以及若干第 1 层第一阶段有穷的开放算子之后, 会有下一层的开放算子。通过第 0 层对象和第 1 层开放中的对象, 生成更多的对象, 即为第 2 层开放算子所产生的效果。

与第 1 层开放算子只有一种类型的情形不同, 第 2 层开放的算子有四种不同形式, 包括: 作用在第 0 层对象上获得第 1 层开放算子; 作用在第 1 层开放算子上获得第 1 层开放算子; 作用在第 0 层开放算子上获得第 0 层对象; 作用在第 1 层开放算子上获得第 0 层对象。根据前文所述, 在第 2 层第一阶段中各给定一个相应的函数:

$$\begin{aligned} f_+ : U_{opc} &\rightarrow (U_{opc} \rightarrow U_{opc}) & f_{(-)^2} : (U_{opc} \rightarrow U_{opc}) &\rightarrow (U_{opc} \rightarrow U_{opc}) \\ f_0 : U_{opc} &\rightarrow U_{opc} & f'_0 : (U_{opc} \rightarrow U_{opc}) &\rightarrow U_{opc} \end{aligned}$$

f_+ 为自然数的二元加法函数； $f_{(-)^2}$ 为二次的迭代函数； f_0 和 f'_0 分别为定义域为自然数和定义域为自然数上一元函数的两个常函数，其函数值均为自然数 0。

故在给定关于第 2 层开放算子的有穷谓词时，需要根据对象的类型规定不同的有穷谓词，故第 2 层开放算子的有穷谓词需要带有类型参数。

表示第 2 层开放上的第一阶段有穷的谓词记为：

$$F_1^{O_2} : (\forall A B : \mathbf{Type}), (A \rightarrow B) \rightarrow \mathbf{Prop}$$

$F_1^{O_2}$ 为三元谓词， A 和 B 为类型参数，谓词 $F_1^{O_2}$ 作用在类型 A 和 B 上，得到一个关于函数类型 $(A \rightarrow B)$ 的一元谓词。

不失一般性，当类型 A 和 B 可以通过上下文确定的时候， $(F_1^{O_2} A B f)$ 可简写为 $(F_1^{O_2} - - f)$ 。

对于上述四个不同类型的函数，分别用相应公理宣称其在第 2 层中是第一阶段有穷的。

$$\begin{aligned} A_{F_1, f_+} : F_1^{O_2} U_{opc} (U_{opc} \rightarrow U_{opc}) f_+ & \quad A_{F_1, f_{(-)^2}} : F_1^{O_2} - - f_{(-)^2} \\ A_{F_1, f_0} : F_1^{O_2} - - f_0 & \quad A_{F_1, f'_0} : F_1^{O_2} - - f'_0 \end{aligned}$$

第 2 层开放算子可用于生成更多的（下一阶段的）第 0 层对象及第 1 层开放算子，故对于这两层的对象，需要有进一步扩展后的（下一阶段的）有穷谓词，用以宣称生成的对象有穷。

第 0 层第三阶段有穷谓词记为 $F_3 : U_{opc} \rightarrow \mathbf{Prop}$ ；第 1 层开放上的第二阶段有穷谓词记为 $F_2^{O_1} : (U_{opc} \rightarrow U_{opc}) \rightarrow \mathbf{Prop}$ 。

当开放过程是扩充过程时，二者已有谓词之间的关系公理如下，两者均称为扩充公理：

$$A_{F_2 \rightarrow F_3} : \forall x, F_2 x \rightarrow F_3 x \quad A_{F_1 \rightarrow O_1 F_2} : \forall x, F_1^{O_1} x \rightarrow F_2^{O_1} x$$

谓词 F_3 和 $F_2^{O_1}$ 分别与谓词 F_2 和 $F_1^{O_1}$ 具有相同的类型。且 F_2 和 $F_1^{O_1}$ 可看作 F_3 和 $F_2^{O_1}$ 的子谓词¹²。

类似于公理 $A_{F_1, F_1^{O_1}, F_2}$ ，满足谓词 $F_2^{O_1}$ 的函数作用于满足谓词 F_2 的对象生成的对象满足谓词 F_3 ：

$$A_{F_2, F_2^{O_1}, F_3} : P_{map} F_2 F_2^{O_1} F_3$$

对应于四种不同类型的函数，分别给出关于谓词 $F_1^{O_2}$ 的四条公理，分别宣称

¹² P_1 为 P_2 的子谓词是指，任意满足 P_1 的项 a ，均满足 P_2 。

满足 $F_1^{O_2}$ 的不同论域和值域的谓词的“保持满足性”：

$$\begin{aligned} A_{F_2, F_1^{O_2}, F_3} &: P_{map} F_2 (F_1^{O_2} - -) F_3 \\ A_{F_2, F_1^{O_2}, F_2^{O_1}} &: P_{map} F_2 (F_1^{O_2} - -) F_2^{O_1} \\ A_{F_1^{O_1}, F_1^{O_2}, F_3} &: P_{map} F_1^{O_1} (F_1^{O_2} - -) F_3 \\ A_{F_1^{O_1}, F_1^{O_2}, F_2^{O_1}} &: P_{map} F_1^{O_1} (F_1^{O_2} - -) F_2^{O_1} \end{aligned}$$

其中, 谓词 $F_1^{O_2}$ 可作用的第四种类型与 $F_1^{O_1}$ 可作用的类型相同, 不失一般性, 当开放过程是扩充过程时, 可以认为 $F_1^{O_1}$ 是 $F_1^{O_2}$ 的特例, 即:

$$A_{F_1^{O_1}, F_1^{O_2}} : \forall x, F_1^{O_1} x \rightarrow F_1^{O_2} - - x$$

定义 18. 若一个公理系统包括且仅包括以下公理: $Open2\mathbb{N}_3$ 中所有公理、 f_+ 、 $f_{(-)^2}$ 、 f_0 、 f'_0 、 $F_1^{O_2}$ 、 A_{F_1, f_+} 、 $A_{F_1, f_{(-)^2}}$ 、 A_{F_1, f'_0} 、 F_3 、 $F_2^{O_1}$ 、 $A_{F_2 \rightarrow F_3}$ 、 $A_{F_1 \rightarrow^{O_1} F_2}$ 、 $A_{F_2, F_2^{O_1}, F_3}$ 、 $A_{F_2, F_1^{O_2}, F_3}$ 、 $A_{F_2, F_1^{O_2}, F_2^{O_1}}$ 、 $A_{F_1^{O_1}, F_1^{O_2}, F_3}$ 、 $A_{F_1^{O_1}, F_1^{O_2}, F_2^{O_1}}$ 、 $A_{F_1^{O_1}, F_1^{O_2}}$, 则称该公理系统为前 3 层的基于 $\mathbb{N}_3$ 的有穷开放分层系统, 记为 $Open3\mathbb{N}_3$ 。

若一个公理系统包括且仅包括以下公理: $Base\mathbb{O}_2$ 中所有公理、 $F_1^{O_2}$ 、 F_3 、 $F_2^{O_1}$ 、 $A_{F_2 \rightarrow F_3}$ 、 $A_{F_1 \rightarrow^{O_1} F_2}$ 、 $A_{F_2, F_2^{O_1}, F_3}$ 、 $A_{F_2, F_1^{O_2}, F_3}$ 、 $A_{F_2, F_1^{O_2}, F_2^{O_1}}$ 、 $A_{F_1^{O_1}, F_1^{O_2}, F_3}$ 、 $A_{F_1^{O_1}, F_1^{O_2}, F_2^{O_1}}$ 、 $A_{F_1^{O_1}, F_1^{O_2}}$, 则称该公理系统为前 3 层有穷开放分层的基本公理系统, 记为 $Base\mathbb{O}_3$ 。

使用公理系统 $Open3\mathbb{N}_3$, 对证明结构进行归纳, 可得出以下若干结果: $(f_+ 20)$ 、 $(f_{+2} (f_S 2))$ 、 $(f_{(-)^2} f_S (f_S 2))$ 均满足 F_3 , 即均是第 0 层第三阶段有穷的; $(f_{+2} (f_S 2))$ 不满足 F_2 , 不是第 0 层第二阶段有穷的; $(f_{(-)^2} f_S (f_0 2))$ 不满足 F_3 , 不是第 0 层第三阶段有穷的。

至此, 第 2 层开放以及第 2 层开放的有穷谓词的定义示例已给出, 同样的步骤可以一步一步推广到第 3 层开放、第 0 层第四阶段有穷、第 4 层开放等阶段和层次。

对于第 3 层开放的有穷谓词, 以及不同层的对象增加后对应的范围更广的谓词, 给出方式与前述层次的情形类似。

表示第 3 层开放的第一阶段有穷谓词记为 $F_1^{O_3} : (\forall A B : \mathbf{Type}), (A \rightarrow B) \rightarrow \mathbf{Prop}$, $F_1^{O_3}$ 为三元谓词, 其作用在两个类型 A 和 B 上, 得到一个关于函数类型 $(A \rightarrow B)$ 的一元谓词; 表示第 2 层开放的第二阶段有穷谓词记为 $F_2^{O_2} : (\forall A B : \mathbf{Type}), (A \rightarrow B) \rightarrow \mathbf{Prop}$; 表示第 0 层第四阶段有穷谓词记为 $F_4 : U_{opc} \rightarrow \mathbf{Prop}$; 表示第 1 层开放的第三阶段有穷谓词记为 $F_3^{O_1} : (U_{opc} \rightarrow U_{opc}) \rightarrow \mathbf{Prop}$ 。

需要注意, 和 $F_1^{O_2}$ 的情形一样, $F_1^{O_3}$ 中的参数类型 A 和 B 并不是任意的。第 2 层开放中, 算子是作用在第 0 层对象或第 1 层开放算子上, 生成第 0 层对象或第 1 层开放算子。第 3 层开放也同样, 第 3 层开放算子需要作用在第 0 层对象、第

1、2层开放算子上，并且只能生成第0层对象、第1、2层开放算子。故 A 和 B 必须为第0层对象、第1、2层开放算子所在的类型。

其中，谓词 $F_1^{O_3}$ 可作用的类型包含了 $F_1^{O_2}$ 可作用的类型，故当开放过程是扩充过程时，可以认为 $F_1^{O_2}$ 是 $F_1^{O_3}$ 的特例，即：

$$A_{F_1^{O_2}, F_1^{O_3}} : \forall A B x, F_1^{O_2} A B x \rightarrow F_1^{O_3} A B x$$

同理， $F_2^{O_2}$ 可作用的类型包含了 $F_2^{O_1}$ 可作用的类型，且满足两者的对象是分别通过满足 $F_1^{O_3}$ 和满足 $F_1^{O_2}$ 的算子作用后所得的，故当开放过程是扩充过程时，可以认为 $F_2^{O_1}$ 是 $F_2^{O_2}$ 的特例，即：

$$A_{F_2^{O_1}, F_2^{O_2}} : \forall x, F_2^{O_1} x \rightarrow F_2^{O_2} x$$

当开放过程是扩充过程时，第三层开放的定义引入的谓词，与之前已有谓词之间的关系公理如下：

$$A_{F_3 \rightarrow F_4} : \forall x, F_3 x \rightarrow F_4 x \quad A_{F_2 \rightarrow O_1 F_3} : \forall x, F_2^{O_1} x \rightarrow F_3^{O_1} x$$

$$A_{F_1 \rightarrow O_2 F_2} : \forall A B x, F_1^{O_2} A B x \rightarrow F_2^{O_2} A B x$$

第3层开放的谓词的“保持满足性”的公理给出如下，共九条，此九条公理组成的公理系统记为 $K9N_3$ ：

$$\begin{aligned} & A_{F_3, F_1^{O_3}, F_4} : P_{map} F_3 (F_1^{O_3} -) F_4 \\ & A_{F_3, F_1^{O_3}, F_3^{O_1}} : P_{map} F_3 (F_1^{O_3} -) F_3^{O_1} \\ & A_{F_3, F_1^{O_3}, F_2^{O_2}} : \forall A B, P_{map} F_3 (F_1^{O_3} - (A \rightarrow B)) (F_2^{O_2} -) \\ & A_{F_1^{O_2}, F_1^{O_3}, F_4} : \forall A B, P_{map} (F_1^{O_2} A B) (F_1^{O_3} -) F_4 \\ & A_{F_1^{O_2}, F_1^{O_3}, F_3^{O_1}} : \forall A B, P_{map} (F_1^{O_2} A B) (F_1^{O_3} -) F_3^{O_1} \\ & A_{F_1^{O_2}, F_1^{O_3}, F_2^{O_2}} : \forall A B C D, P_{map} (F_1^{O_2} A B) (F_1^{O_3} -) (F_2^{O_2} C D) \\ & A_{F_2^{O_1}, F_1^{O_3}, F_4} : P_{map} F_2^{O_1} (F_1^{O_3} -) F_4 \\ & A_{F_2^{O_1}, F_1^{O_3}, F_3^{O_1}} : P_{map} F_2^{O_1} (F_1^{O_3} -) F_3^{O_1} \\ & A_{F_2^{O_1}, F_1^{O_3}, F_2^{O_2}} : \forall A B, P_{map} F_2^{O_1} (F_1^{O_3} - (A \rightarrow B)) (F_2^{O_2} -) \end{aligned}$$

已有层次中的对象在新谓词下，可给出的关于“保持满足性”的新公理如下，

共五条, 此五条公理组成的公理系统记为 $K5N_3$:

$$\begin{aligned}
 A_{F_3, F_3^{O_1}, F_4} &: P_{map} F_3 (F_3^{O_1} - -) F_4 \\
 A_{F_3, F_2^{O_2}, F_4} &: P_{map} F_3 (F_2^{O_2} - -) F_4 \\
 A_{F_3, F_2^{O_2}, F_3^{O_1}} &: P_{map} F_3 (F_2^{O_2} - -) F_3^{O_1} \\
 A_{F_2^{O_1}, F_2^{O_2}, F_4} &: P_{map} F_2^{O_1} (F_2^{O_2} - -) F_4 \\
 A_{F_2^{O_1}, F_2^{O_2}, F_3^{O_1}} &: P_{map} F_2^{O_1} (F_2^{O_2} - -) F_3^{O_1}
 \end{aligned}$$

定义 19. 若一个公理系统包括且仅包括以下公理: $Open3N_3$ 中所有公理、 $F_1^{O_3}$ 、 $F_2^{O_2}$ 、 F_4 、 $F_3^{O_1}$ 、 $A_{F_1^{O_2}, F_1^{O_3}}$ 、 $A_{F_2^{O_1}, F_2^{O_2}}$ 、 $A_{F_3 \rightarrow F_4}$ 、 $A_{F_2 \rightarrow O_1 F_3}$ 、 $A_{F_1 \rightarrow O_2 F_2}$ 、 $K9N_3$ 中所有公理、 $K5N_3$ 中所有公理, 则称该公理系统为基于 N_3 的有穷开放分层系统, 记为 $OpenN_3$ 。

若一个公理系统包括且仅包括以下公理: $BaseO_3$ 中所有公理、 $F_1^{O_3}$ 、 $F_2^{O_2}$ 、 F_4 、 $F_3^{O_1}$ 、 $A_{F_1^{O_2}, F_1^{O_3}}$ 、 $A_{F_2^{O_1}, F_2^{O_2}}$ 、 $A_{F_3 \rightarrow F_4}$ 、 $A_{F_2 \rightarrow O_1 F_3}$ 、 $A_{F_1 \rightarrow O_2 F_2}$ 、 $K9N_3$ 中所有公理、 $K5N_3$ 中所有公理, 则称该公理系统为前 4 层有穷开放分层的基本公理系统, 记为 $BaseO_4$ 。

可以注意到, 每一个新的层次中, 增加的有穷谓词和开放算子的形式都与已有的层次是相似的; 同时, 每个新的层次中的公理也与已有的公理具有相同的形式。故后续阶段以及更高层的算子、谓词、公理等, 均可以通过继续此步骤各开出。进一步, 可以从已有的示例中的层次出发, 推理得出更高层次中对象、谓词、公理的通项形式。本文将在下一节中给出这些形式的统一描述。

4 有穷开放类型系统

本节将对第三节中关于自然数开放类的类型论系统进行一般化推广; 构建描述有穷开放类的分层和分阶段属性的系统: 开放类型系统; 并构建用于描述只涉及若干层开放算子的有穷开放类的系统: 有穷开放分层系统。此外, 本节将证明第三节中构建的关于自然数开放类的系统是本节中的系统的子系统¹³; 并证明第三节和本节中的各个关于开放类的系统的一致性。

第 3 节中, 关于自然数开放类的案例仅涉及了第 0 层对象、第 1、2、3 层开放算子。其中给出的关于不同阶段不同层次的有穷谓词、以及有穷谓词之间关系的公理的角标均只涉及 0, 1, 2, 3, 4。对于更高层次和更后续的阶段, 有穷谓词和有穷谓词之间关系的公理可以通过前几阶段和前几层次的公理推广得到。本节将根

¹³ 系统 $\mathcal{A}$ 是系统 $\mathcal{B}$ 的子系统是指: 系统 $\mathcal{A}$ 中所有可证的断定均是系统 $\mathcal{B}$ 中可证的。

据上文中的典型案例，整理构建出关于有穷对象和开放算子的分阶段和分层系统的一般结构。¹⁴

本节的系统中论域记号为 $U_{opt} : \mathbf{Type}$ ，为了阐述各阶段和各层的有穷谓词的使用范围，引入以下一元谓词系列及公理。

给定一组一元谓词 $D_i : \mathbf{Type} \rightarrow \mathbf{Prop}$ ，角标 $i \in \mathbb{N}$ ， $\mathbb{N}$ 为自然数集，谓词 $D_i : \mathbf{Type} \rightarrow \mathbf{Prop}$ 称为开放层次谓词。

关于谓词 $D_i : \mathbf{Type} \rightarrow \mathbf{Prop}$ 给出一组公理：

$$A_{D_i, \rightarrow} : \forall A B, D_i A \rightarrow D_i B \rightarrow D_{i+1} (A \rightarrow B)$$

$$A_{D_0, U_{opt}} : D_0 U_{opt} \quad A_{D_i, ex} : \forall A B, D_i (A \rightarrow B) \rightarrow D_{i+1} (A \rightarrow B)$$

这些公理称为层次函数公理，规定了开放层次谓词与函数类型和类型 U_{opt} 之间的联系。

第 j 层开放对象的第 i 阶段有穷谓词记为 $F_i^{O_j} : (\forall A B : \mathbf{Type}), (A \rightarrow B) \rightarrow \mathbf{Prop}$ ，角标 $i, j \in \mathbb{N}^+$ ，其中 $\mathbb{N}^+$ 为正整数集；第 0 层第 i 阶段有穷谓词记为 $F_i : U_{opt} \rightarrow \mathbf{Prop}$ ，角标 $i \in \mathbb{N}^+$ 。

U_{opt} 、 P_{map} 、 D_k ， $k \in \mathbb{N}$ 、 $F_i^{O_j}$ 、 F_i ， $i, j \in \mathbb{N}^+$ 合称论域类公理。

给定关于谓词 $F_i^{O_j}$ 的公理：

$$A_{i,j,cons} : \forall A B f, F_i^{O_j} A B f \rightarrow D_j (A \rightarrow B)$$

公理 $A_{i,j,cons}$ 称为开放层次符合公理，该公理保证了不同层次的开放算子上的不同阶段有穷谓词必须使用在满足对应开放层次谓词的类型上。

层次函数公理以及开放层次符合公理合称为合理性公理。

公理 $A_{F_i,+}$ 以及公理 $A_{F_i^{O_j},+}$ ， $i, j \in \mathbb{N}^+$ 称为阶段扩张公理：

$$A_{F_i,+} : \forall x, F_i x \rightarrow F_{i+1} x$$

$$A_{F_i^{O_j},+} : \forall A B f, F_i^{O_j} A B f \rightarrow F_{i+1}^{O_j} A B f$$

该组公理表示：满足某个阶段有穷谓词的项也会满足更后续阶段的有穷谓词。

公理 $A_{F_i^{O_j}, F_i^{O_{j+1}}}$ ， $i, j \in \mathbb{N}^+$ 称为开放层次增加公理：

$$A_{F_i^{O_j}, F_i^{O_{j+1}}} : \forall A B f, F_i^{O_j} A B f \rightarrow F_i^{O_{j+1}} A B f$$

该组公理表示：阶段相同的低层的开放算子是高一层的开放算子的特例。

¹⁴本节中的类型定义使用了自然数作为角标，但使用自然数角标不是“必须”的。在实际构造过程中，可以用其他类型代替自然数作为角标给出上述的各种定义。此处选用自然数的定义仅仅是因为其记号较为方便，并且相关定义使用自然数作为参数更容易理解。

公理 A_{i,j,k,l,F^O} 、 $A_{i,j,k,F \rightarrow F^O}$ 、 $A_{i,j,k,F^O \rightarrow F}$ 及 $A_{k,l,F}$ 称为开放类型应用公理, 其中 $i, j, k, l \in \mathbb{N}^+$, 且 $i \geq j > k, l$:

$$\begin{aligned} A_{i,j,k,l,F^O} &: \forall A B C D, P_{map} (F_{i-k}^{O_k} A B) (F_{i+1-j}^{O_j} -) (F_{i+1-l}^{O_l} C D) \\ A_{i,j,k,F \rightarrow F^O} &: \forall C D, P_{map} F_i (F_{i+1-j}^{O_j} - (C \rightarrow D)) (F_{i+1-k}^{O_k} C D) \\ A_{i,j,k,F^O \rightarrow F} &: \forall A B, P_{map} (F_{i-k}^{O_k} A B) (F_{i+1-j}^{O_j} (A \rightarrow B) -) F_{i+1} \\ A_{k,l,F} &: P_{map} F_{k+l-1} (F_k^{O_l} -) F_{k+l} \end{aligned}$$

该组公理描述了特定层次和阶段的算子作用在特定层次和阶段的对象上获得的新对象会在何阶段何层次。

论域类公理、合理性公理、阶段扩张公理、开放层次增加公理以及开放类型应用公理合称为开放类型公理; 论域类公理、合理性公理、开放类型应用公理合称为非扩张的开放类型公理。

定义 20. 一个公理系统被称为 (非扩张的) 有穷开放分层的基本公理系统, 如果该系统包含且仅包含所有 (非扩张的) 开放类型公理。有穷开放分层的基本公理系统记为 $Base\mathbb{O}$; 非扩张的有穷开放分层的基本公理系统记为 $nexBase\mathbb{O}$ 。

定理 1. 公理系统 $Base\mathbb{O}_2$ 、 $Base\mathbb{O}_3$ 、 $Base\mathbb{O}_4$ 为公理系统 $Base\mathbb{O}$ 的子系统。¹⁵

证明. 对照可知, 公理系统 $Base\mathbb{O}_2$ 、 $Base\mathbb{O}_3$ 、 $Base\mathbb{O}_4$ 中的各阶段和各层次的有穷谓词、及谓词之间关系公理的角标情形均为公理系统 $Base\mathbb{O}$ 中公理的特例。故定理得证。□

定理 2. 公理系统 $Base\mathbb{O}$ 是一致的。

证明. 当不给定任意满足谓词 $F_i^{O_j}$ 、 F_i , $i, j \in \mathbb{N}^+$ 的项时, 层次符合公理、有穷层次增加公理、开放层次增加公理以及开放类型应用公理均无法推理得到更多结果。故公理系统 $Base\mathbb{O}$ 的一致性可以规约到仅由层次函数公理组成的公理系统的一致性。

递归定义包含三个引入规则的二元谓词 $D_{ind} : \mathbf{Type} \rightarrow \mathbf{nat} \rightarrow \mathbf{Prop}$, 其中 $\mathbf{nat}$

¹⁵需注意, $Base\mathbb{O}_2$ 、 $Base\mathbb{O}_3$ 、 $Base\mathbb{O}_4$ 中的谓词 $F_i^{O_1}$, $i \in \mathbb{N}^+$ 不带类型参数, 而 $Base\mathbb{O}$ 中的谓词 $F_i^{O_1}$ 带了类型参数, 且参数值均为 U_{opt} 。另一方面, 系统 $Base\mathbb{O}_2$ 、 $Base\mathbb{O}_3$ 、 $Base\mathbb{O}_4$ 中对象类的论域为 U_{opc} , 而系统 $Base\mathbb{O}$ 中为 U_{opt} 。但是不失一般性, 可将 U_{opc} 替换为 U_{opt} ; 将 $Base\mathbb{O}_2$ 、 $Base\mathbb{O}_3$ 、 $Base\mathbb{O}_4$ 中的 $F_i^{O_1}$ 替换为 $(F_i^{O_1} U_{opt} U_{opt})$, 并在替换后的意义下, 称 $Base\mathbb{O}_2$ 、 $Base\mathbb{O}_3$ 、 $Base\mathbb{O}_4$ 为公理系统 $Base\mathbb{O}$ 的子系统。后文中出现 U_{opc} 和 U_{opt} 混用、 $F_i^{O_1}$ 和 $(F_i^{O_1} U_{opt} U_{opt})$ 混用的情形时均按此处方式处理即可。

为类型论中递归定义的自然数类型:

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash D_{ind0} : D_{ind} U_{opt} 0} D_{ind}\text{-INTRO}_1 \\ \frac{\Gamma \vdash l : D_{ind} A \ n \quad \Gamma \vdash r : D_{ind} B \ n}{\Gamma \vdash D_{indap} A \ B \ n \ l \ r : D_{ind} (A \rightarrow B) (S \ n)} D_{ind}\text{-INTRO}_2 \\ \frac{\Gamma \vdash t : D_{ind} (A \rightarrow B) \ n}{\Gamma \vdash D_{ind+} A \ B \ n \ t : D_{ind} (A \rightarrow B) (S \ n)} D_{ind}\text{-INTRO}_3. \end{array}$$

对任意类型 A 及自然数类型中的自然数 i , 定义 $D_i A$ 为 $D_{ind} A \ i$ 。则根据 D_{ind} 的引入规则, 有公理 $A_{D_0, U_{opt}}$ 、 $A_{D_i, \rightarrow}$ 、 $A_{D_i, ex}$ 可证。由马丁洛夫类型论的一致性¹⁶可知, 公理系统 $Base\mathbb{O}$ 是一致的。□

推论 1. 公理系统 $nexBase\mathbb{O}$ 是一致的。

推论 2. 公理系统 $Base\mathbb{O}_2$ 、 $Base\mathbb{O}_3$ 、 $Base\mathbb{O}_4$ 是一致的。

在类型论语言中, 可定义关于类型的 (更高层类型宇宙中的) 谓词, 用于指称一个类型 “有穷” 或 “无穷”。

定义 21. 记关于类型的 “有穷” 谓词为 F_{Type} , 满足 F_{Type} 的类型通过如下方式递归给出:

- (1) 空类型、单元类型满足 F_{Type} ;
- (2) 对任意类型类型 A 、 B , 若类型 A 、 B 满足 F_{Type} , 则 $sum \ A \ B$ 满足 F_{Type} , 其中 $sum \ A \ B$ 为类型 A 和 B 的余积类型;¹⁷
- (3) 对任意类型 A 、 B 及函数 $f : A \rightarrow B$, 若类型 A 满足 F_{Type} , 且函数 f 为满射¹⁸, 则类型 B 满足 F_{Type} 。

引理 1. 对任意类型 A 、 B , 若类型 A 、 B 满足 F_{Type} , 则 $prod \ A \ B$ 满足 F_{Type} , 其中 $prod \ A \ B$ 为类型 A 和 B 的积类型。¹⁹

证明. 对类型 A 、 B 满足 F_{Type} 的证明结构进行归纳即可证明 $prod \ A \ B$ 满足 F_{Type} 。□

定义 22. 记关于类型的 “无穷” 谓词为 I_{nf} , 满足 I_{nf} 的类型通过如下方式递归给出:

- (1) 自然数类型 nat 满足 I_{nf} ;

¹⁶ 马丁洛夫类型论的一致性可以参见 [6] 中附录部分。

¹⁷ 余积类型的定义可参见 [6] 中附录部分。

¹⁸ 函数 f 为满射, 指命题 $\forall x, \exists y, (f \ y = x)$ 可证。其中, 类型 $\exists y, (f \ y = x)$ 为 Σ -类型, 类型 $(f \ y = x)$ 是等同类型。 Σ -类型的定义可参见 [6] 中附录部分。

¹⁹ 积类型的定义可参见 [6] 中附录部分。

(2) 对任意类型 A 及函数 $f: A \rightarrow \mathbf{nat}$, 若函数 f 为满射, 则类型 A 满足 I_{nf} 。

定义 23. 对任意类型 A , 若 A 满足 $F_{\mathbf{Type}}$, 则称 A 有穷; 若 A 满足 I_{nf} , 则称 A 无穷。

定义 24. 对于任意类型 A 、 B 、任意 A 上的谓词 $P: A \rightarrow \mathbf{Prop}$, 对于任意函数 $f: B \rightarrow A$, 若 $\forall x, (P x \rightarrow \exists y, (f y = x))$ 可证, 且类型 B 有穷, 则称谓词 P 的外延有穷;

对于任意类型 A 、任意 A 上的谓词 $P: A \rightarrow \mathbf{Prop}$, 对于任意函数 $f: A \rightarrow \mathbf{nat}$, 若 $\forall x, \exists y, (P y \wedge (f y = x))$ 可证, 则称谓词 P 的外延无穷。

当一个类型满足谓词 I_{nf} 时, 也称该类型为一个潜无穷类型; 外延无穷的谓词, 也称为外延潜无穷的谓词。

此外, 在类型论中, 可定义一个类型上的谓词在何情况下被称为外延确定。

定义 25. 对于任意类型 A , 任意 A 上的谓词 $P: A \rightarrow \mathbf{Prop}$, 若 $\forall x, (P x \vee \neg(P x))$ 可证, 则称谓词 P 是外延确定的。

定义 26. 一个公理系统称为基础开放类型系统, 若其包含: 公理系统 $Base\mathbb{O}$ 中所有公理; 用于给定每一层的初始阶段中对象的公理, 以及相应的宣称给定的对象满足该层次初始阶段有穷谓词的公理。

如果一个基础开放类型系统是一致的, 则称为开放类型系统。

定义 27. 一个公理系统称为非扩张的基础开放类型系统, 若其包含: 公理系统 $nexBase\mathbb{O}$ 中所有公理; 用于给定每一层的初始阶段中对象的公理, 以及相应的宣称给定的对象满足该层次初始阶段有穷谓词的公理。

如果一个非扩张的基础开放类型系统是一致的, 则称为非扩张的开放类型系统。

推论 3. 公理系统 $Open2\mathbb{N}_3 \cup Base\mathbb{O}$ 、 $Open3\mathbb{N}_3 \cup Base\mathbb{O}$ 、 $Open\mathbb{N}_3 \cup Base\mathbb{O}$ 为开放类型系统。²⁰

进一步, 可以有如下定义:

定义 28. 对于自然数 n 和 (非扩张的) 开放类型系统 S 。若 S 中的公理 A 满足: 公理涉及的所有谓词 D_k 、 $F_i^{O_j}$ 、 F_l 中的角标 i, j, k, l 均满足命题 $l \leq n \wedge (i + j) \leq n \wedge k < n$, 则称公理 A 属于 S 的前 n 层 (非扩张的) 开放类型公理。

定义 29. 对任意自然数 n , 若 (非扩张的) 开放类型系统 S 的一个子系统 S' 满足: S' 包含且仅包含 S 的所有前 n 层 (非扩张的) 开放类型公理, 则称 S' 为 S 的前 n 层 (非扩张的) 开放类型系统。

²⁰此处 $A \cup B$ 指公理集为公理系统 A 和 B 中的公理集的并的公理系统。

定义 30. 称一个系统 S' 为（非扩张的）有穷开放类型系统，如果 S' 满足：存在自然数 n 和（非扩张的）开放类型系统 S 使得， S' 为系统 S 的前 n 层（非扩张的）开放类型系统，且 S' 中每一层的初始阶段有穷谓词的外延有穷。

推论 4. 有穷开放类型系统是一致的。

定义 31. 一个开放类由一个作为论域的类型 U 和一个类型 U 上谓词的有穷长的序列组成。一个开放类称为有穷开放类，若组成该开放类的每个谓词均外延有穷，且均不是外延确定的。

具体到一个自然数类型的（扩张的）开放类，若该开放类的组成部分的其中一个谓词 P 存在一个具体的自然数 n 作为上界²¹，那么根据定义 25，可证出这个谓词是外延确定的。故此情形下的自然数开放类不是一个有穷开放类。

定义 32. 若 S 为一个（非扩张的）开放类型系统，则 S 中的论域类型 U_{opt} 和第 0 层的有穷谓词 F_i ， $i \in \mathbb{N}$ 组成了一个开放类，记该开放类为 T_S ，称开放类型系统 S 描述了开放类 T_S 。

定义 33. 对于任意（非扩张的）开放类型系统 S ，可用定义归纳类型的方式给出谓词 F_i 以及 $F_i^{O_j}$ ， $i, j \in \mathbb{N}^+$ 对应的另一组谓词 P_i 以及 $P_i^{O_j}$ ， $i, j \in \mathbb{N}^+$ 。其中各个作为谓词的归纳类型的形成规则可由如下方式表示。²²

- (1) 归纳类型 P_1 的形成规则为：对任意 $x : U_{opt}$ ，由 $F_1 x$ 形成 $P_1 x$ ；
- (2) 归纳类型 $P_1^{O_j}$ 的形成规则为：对任意 f ，由 $F_1^{O_j} - - x$ 形成 $P_1^{O_j} - - x$ ；
- (3) 归纳类型 P_i ， $i \in \mathbb{N}^+ \wedge i > 1$ 的形成规则为：对任意开放类型系统中以“ $\rightarrow F_i x$ ”结尾的公理，将公理中的谓词 F_x 、 $F_y^{O_z}$ 对应替换为 P_x 、 $P_y^{O_z}$ 得到一个新公理，然后根据所得公理的形式给出 $P_i x$ 的形成规则；²³
- (4) 归纳类型 $P_i^{O_j}$ ， $i, j \in \mathbb{N}^+ \wedge i > 1$ 的形成规则的规定方式与情况 (3) 类似，通过结尾为“ $\rightarrow F_i^{O_j} - - f$ ”的公理给出 $P_i^{O_j} - - f$ 的形成规则。²⁴

S 中的论域类型 U_{opt} 和谓词 P_i ， $i \in \mathbb{N}$ 也组成了一个开放类，记该开放类为 T_S^I ，称开放类型系统 S 归纳地描述了开放类 T_S^I 。

引理 2. 对任意开放类型系统 S ，系统 S 归纳地描述了开放类 T_S^I 。在系统 S 中添加定义 33 中关于归纳类型 P_i, P_i^j ， $i, j \in \mathbb{N}^+$ 的规则后得到的公理系统记为 S^* 。在系统 S^* 中，对任意 $k, l \in \mathbb{N}^+$ ，有 $\forall x, F_k x \rightarrow P_k x$ 且 $\forall f, F_k^l - - f \rightarrow P_k^l - - f$ 。

²¹ 此处需注意，关于上界的描述需要预设有关于自然数上的序的定义。

²² 由于篇幅原因，此处归纳类型所包含的推理规则不再详细给出。具体的推理规则的方法可以参考 [6] 中附录里的关于归纳类型的章节。

²³ 如根据公理 $AF_{10,+}$ ，可得形成规则包含：对任意 x ，通过 $P_{10} x$ 形成 $P_{11} x$ 的规则；如根据公理 $A_{4,7,F}$ ，可得形成规则包含：对任意 x, f ，通过 $P_{10} x$ 和 $P_4^{O_7} f$ 形成 $P_{11}(fx)$ 的规则。

²⁴ 由于公理的分层和分阶段结构，可知以 $F_i x$ 和 $F_i^{O_j} - - f$ 结尾的公理是有穷的，所以关于 P_i 和 $P_i^{O_j}$ 的归纳定义是合理的。

证明. 对 k 进行归纳可证 $\forall x, F_k x \rightarrow P_k x$; 依次对 k 和 l 进行归纳可证 $\forall f, F_k^l - - f \rightarrow P_k^l - - f$. 其中: 初始步的情形由定义 33 中的 (1) 和 (2) 可得; 归纳步的情形可通过定义 33 中的 (3) 和 (4) 得到。□

定理 3. 一个 (非扩张的) 有穷开放类型系统归纳地描述了一个有穷开放类。

证明. 若 S 为 (非扩张的) 有穷开放类型系统, 根据定义, S 中每一层的初始阶段有穷谓词均是外延有穷的。故存在相应的有穷类型及满射函数。注意到, 对于任意谓词 P_i 或 $P_i^{O_j}$, $i, j \in \mathbb{N} \wedge i > 1$, 谓词的生成规则的数量是有穷条的。故可对生成规则的结构使用归纳法。根据归纳假设, 生成规则中涉及到的谓词均已证明是外延有穷的, 即均存在各自对应的有穷类型和满射。进而, 根据生成规则的结构, 可以通过引理 1 和定义 21 构造相应的有穷类型和满射, 从而证明需证的谓词外延有穷。即 S 归纳描述的开放类中的作为组成元素的谓词是外延有穷的。

另外, 对任意 $i \in \mathbb{N}$, 因系统 S 中不含有以 “ $\rightarrow \neg(F_i x)$ ” 形式结尾的公理, 故系统得不出关于任意对象 x 的命题 $\neg(F_i x)$ 的证明, 所以根据引理 2 可知 S^* 得不出关于任意对象 x 的命题 $\neg(P_i x)$ 的证明。又因为对证明结构使用归纳法可知, 存在对象 y 的相关的命题 $P_i y$ 不可证。故 $P_i y \vee \neg(P_i y)$ 亦不可证。所以 S 归纳描述的开放类中的作为组成元素的谓词均不是外延确定的。

综上, S 归纳描述的开放类是一个有穷开放类。□

需注意, 我们可以根据是否满足谓词 F_{Type} 和 I_{nf} 而确定是否称一个类型是有穷的或者无穷的。但我们不能称一个开放类是有穷的还是无穷的, 因为开放类是由一个类型以及一序列的谓词组成的, 开放类本身不是类型。对于开放类, 我们只能对它的论域和各个谓词宣称有穷或者无穷。而 “有穷开放类” 一词是一个专有名词, 不能等同为 “有穷的开放类”。

另一方面, 前文在构建开放类型系统时, 谓词 $F_i^{O_j}$ 、 F_i , $i, j \in \mathbb{N}^+$ 用于表示有穷谓词。可以进一步, 更一般化地, 把谓词 $F_i^{O_j}$ 、 F_i , $i, j \in \mathbb{N}^+$ 用作表示阶段谓词。即开放类型系统除了可用于描述有穷对象的开放过程及随开放过程变化形成的开放类之外, 也可用于一般而言的对象。

本节最后将给出两个例子, 说明开放类型系统的一些特点。

例 1. 考虑前 2 层开放类型公理, 可得到以下只涉及有穷对象和第一层开放算子的公理:

$$\begin{aligned} A_{D_0, U_{opt}} : D_0 U_{opt} & \quad A_{D_0, \rightarrow} : \forall A B, D_0 A \rightarrow D_0 B \rightarrow D_1 (A \rightarrow B) \\ A_{F_1, +} : \forall x, F_1 x \rightarrow F_2 x & \quad A_{1, F} : P_{map} F_1 (F_1^{O_1} - -) F_2 \end{aligned}$$

给定初始阶段对象和算子及其相关公理如下：

$$\begin{array}{ll} f : U_{opt} \rightarrow U_{opt} & q : U_{opt} \\ A_{F_1^{O_1}, f} : F_1^{O_1} - - f & A_{F_1, q} : F_1 q \end{array}$$

对上述公理组成的公理系统中证明的证明结构使用归纳法可知，可证的关于有穷对象和开放算子的相关命题有且仅有： $(F_1 q)$ 、 $(F_1^{O_1} f)$ 、 $(F_2 q)$ 、 $(F_2 (f q))$ 。

其次，使用归纳法可知：当增加公理 $A_{F_1, -} : \forall x, F_2 x \rightarrow F_1 x$ 后， f 迭代任意次作用在 q 上所得的项均满足 F_1 ，即： $(F_2 ((f)^i q))$ ， $i \in \mathbb{N}$ 。

进一步可知，若类型 $U_{opt} \rightarrow U_{opt}$ 中的 f 是非等同映射的单射²⁵，则可由自然数类型的推理规则证得谓词 F_1 的外延潜无穷。即是说，若接受前文所提到的潜无穷和实无穷观点中所接受的“不区分有穷分层”的公理 $A_{F_1, -}$ ，则可以生成潜无穷多的满足有穷谓词 F_1 的对象，进而可以得到潜无穷多个有穷对象。只有回避掉公理 $A_{F_1, -}$ ，才能避免此情形。

从上述例子可以看出，对有穷和开放的分阶段和分层的分析有助于澄清潜无穷观点和有穷开放主义观点之间的区别。该例子中系统作为有穷开放类型系统，根据定理 3 可知其描述了一个关于自然数的有穷开放类。但若引入潜无穷观点并对公理进行改动，则会导致不再能保证其描述了有穷开放类（这是因为第 0 层的所有阶段有穷谓词不再能保证是外延有穷的）。

例 2. 考虑公理系统 Fb ，令公理系统 Fb 包含 $Base\mathbb{O}$ 中所有公理，以及如下关于初始阶段对象和算子的公理：

$$\begin{array}{llll} f_0 : U_{opt} \rightarrow U_{opt} & f_1 : U_{opt} \rightarrow U_{opt} & 0 : U_{opt} & 1 : U_{opt} \\ A_{F_1^{O_1}, f_0} : F_1^{O_1} - - f_0 & & A_{F_1, 0} : F_1 0 & \\ A_{F_1^{O_1}, f_1} : F_1^{O_1} - - f_1 & & A_{F_1, 1} : F_1 1 & \\ h : U_{opt} \rightarrow (U_{opt} \rightarrow U_{opt}) & & A_{F_1^{O_2}, h} : F_1^{O_2} - - h & \\ g : (U_{opt} \rightarrow U_{opt}) \rightarrow (U_{opt} \rightarrow U_{opt}) & & A_{F_1^{O_2}, g} : F_1^{O_2} - - g & \end{array}$$

其中， f_0 是值为 0 的常函数； f_1 是值为 1 的常函数；对任意项 $x : U_{opt}$ 及任意函数 $f : U_{opt} \rightarrow U_{opt}$ ， $((g f) x)$ 的值为 $x + (f 0)$ ；对任意项 $x, y : U_{opt}$ ， $((h x) y)$ 的值为 x 。²⁶

²⁵ 由于系统中没有对于 U_{opt} 作出限制的公理， f 是非等同映射的单射的情形是在保持系统一致的情形下成立的。

²⁶ 二元函数 + 仅用于解释 h 和 g 所表示的函数，二元函数 + 本身不在系统 Fb 内。

可知, 函数 h 作用在数 n 上会得到值为 n 的常函数; 函数 g 作用在值为 n 的常函数上, 会得到 $+n$ 函数; 函数 g 作用在 $+n$ 函数上, 也会得到 $+n$ 函数。

逐层分析可得到如下结论:

- (1) 满足 F_1 的数仅有 $0, 1$, 满足 $F_1^{O_1}$ 的函数仅有值为 $0, 1$ 的常函数, 进而满足 F_2 的数仅有 $0, 1$;
- (2) 由 (1) 可得, 满足 $F_2^{O_1}$ 的函数仅有值为 $0, 1$ 的常函数、以及 $+0, +1$ 函数, 进而满足 F_3 的数仅有 $0, 1, 2$;
- (3) 由 (2) 可得, 满足 $F_3^{O_1}$ 的函数仅有值为 $0, 1, 2$ 的常函数、以及 $+0, +1$ 函数, 进而满足 F_4 的数仅有 $0, 1, 2, 3$;
- (4) 由 (3) 可得, 满足 $F_4^{O_1}$ 的函数仅有值为 $0, 1, 2, 3$ 的常函数、以及 $+0, +1, +2$ 函数, 进而满足 F_5 的数仅有 $0, 1, 2, 3, 4, 5$;
- (5) 由 (4) 可得, 满足 $F_5^{O_1}$ 的函数仅有值为 $0, 1, \dots, 5$ 的常函数、以及 $+0, +1, +2, +3$ 函数, 进而满足 F_6 的数仅有 $0, 1, \dots, 8$;
- (6) 由 (5) 可得, 满足 $F_6^{O_1}$ 的函数仅有值为 $0, 1, \dots, 8$ 的常函数、以及 $+0, +1, \dots, +5$ 函数, 进而满足 F_7 的数仅有 $0, 1, \dots, 13$;
- (7) 依次类推……

使用归纳法可以证明, 满足 F_i 的数的数量 ($i \in \mathbb{N}^+$), 形成了一个斐波拉契数列 (Fibonacci sequence)。

论域相同的类可以因不同的谓词序列而组成不同的开放类。从上述例子可以看出, 给出一些特别的初始阶段对象, 可以获得具有特别的特点的自然数开放类。对于初始对象的给定方式和所得开放类的特点之间的关系研究, 是未来工作推进的一个重要方向。

5 结语

我们在有穷开放过程及其产物有穷开放类的直观图景的基础上, 采用类型论方法构建了描述有穷开放类的分阶段和分层的系统。

首先, 本文给出了该形式系统描述自然数开放类时的示例。在该系统中, 描述了有穷对象和开放算子的分阶段属性和分层属性, 亦描述了开放类的各阶段和各层次的对象、开放算子、有穷谓词之间的包含、推导和函数应用关系。

其次, 本文使用该系统对有穷开放立场和潜无穷立场进行了区分: 有穷开放立场下的开放类型系统对于递归公理和递归生成自然数的过程采取较为谨慎的态度。本文通过有穷谓词分层避免了可以无限制地通过迭代函数递归生成对象的情形。在有穷开放分层系统中, 递归生成对象或自然数的过程并不能无限制地进行下去。

最后,我们证明了文中的若干开放类型系统(如系统 $Base\mathbb{O}_2$ 、 $Base\mathbb{O}_3$ 、 $Base\mathbb{O}_4$ 与系统 $Base\mathbb{O}$) 之间的包含关系。并证明了文中构建得到的系统的一致性。

在下一步的工作中,我们将对开放类型系统中部分公理进行调整,以研究各种调整后生成的变形系统的不同性质,以及它们与各种算数系统之间的联系,进而探讨有穷开放主义哲学观下的自然数理论与各种算数系统之间的异同。如调整系统中对于递归生成对象和自然数的过程的限制,可能会关联到一些和计算复杂性领域或数论领域相关的结论。

如所周知,在形式系统中描述带有不确定性的对象是一件非常困难的事情。本文的工作是对描述具有这种不确定性的有穷开放类的初步尝试,定会有不完善之处。我们希望在未来的工作中,进一步完善和发展现有结果。

参考文献

- [1] L. Brouwer *et al.*, 1913, “Intuitionism and formalism”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **20**(2): 81–96.
- [2] L. E. J. Brouwer, 1975, “Historical background, principles and methods of intuitionism”, *Philosophy and Foundations of Mathematics*, pp. 508–515, Amsterdam: Elsevier.
- [3] A. Heyting, 1966, *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam: Elsevier.
- [4] M. H. Sørensen and P. Urzyczyn, 2006, *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*, Amsterdam: Elsevier.
- [5] W. P. van Stigt, 1982, “Brouwer’s Cambridge lectures on intuitionism”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **14**(4): 356–357.
- [6] Univalent Foundations Program, 2013, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, Princeton: Institute for Advanced Study.
- [7] P. Wadler, 2015, “Propositions as types”, *Communications of the ACM*, **58**(12): 75–84.

(责任编辑: 执子)

A Type Theory System about Finite Open-Ended Process

Xiaolong Liang Shier Ju[✉]

Abstract

Extensible classes are ubiquitous in nature, human society, and cognition. They exist in two forms: a potential infinite sequence, or a finite open-ended class. The latter is a class whose members are extensible. Such an extending or open-ended process cannot go on infinitely. The end of the process cannot be decided. Furthermore, the open-ended process has different levels and stages. Its generated members and its operators which are used to generate the members belong to different levels and stages. This paper describes the finite open-ended process and its products by using the method of type theory. This paper also gives an Open-Ended Type System for describing the hierarchical and phased properties of finite open-ended classes.

Xiaolong Liang Institute of Logic and Cognition, Sun Yat-sen University
LiangHillon@gmail.com

Shier Ju[✉] Institute of Logic and Cognition, Sun Yat-sen University
hssjse@mail.sysu.edu.cn