逻辑学研究　2020 年第 4 期，12–30
文章编号：1674-3202(2020)-04-0012-19

结构主义是一种有效的数学哲学吗？

杨睿之

摘　要：本文试图论证数学结构主义不是一种有效的数学哲学。为此，文章首先给出“有效的数学哲学”与“数学中性的数学哲学”的区分。然后，文章简要回顾了一些主流的数学哲学立场，并分析它们在什么意义上是有效的数学哲学。接下来，文章试图经验地说明，结构主义在前述的这些意义上不是数学有效的数学哲学。最后，文章试图结合数学多元主义相关的一些集合论研究结果来论证结构主义要么是错的，要么是数学中性的。

关键词：数学哲学；结构主义；集合论

中图分类号：B81　　　　**文献标识码：**A

1　引言

上世纪八九十年代以来，随着夏皮罗（S. Shapiro）、赫尔曼（G. Hellman）以及帕森斯（C. Parsons）等人的推动，数学哲学的结构主义（Structuralism）一直是数学哲学公开发表中的热门议题。然而，本文试图质疑，数学结构主义以及围绕它的热烈辩论是否如之前的数学哲学议题那样深刻地影响了数学的发展，或者实实在在地促成了许多数学成果的发现。

数学结构主义起源于对集合论基础主义（set-theoretic foundationalist position）的批评。以一阶逻辑为代表的现代谓词逻辑起源于弗雷格（G. Frege）为数学寻找基础的努力。而策梅洛–弗兰克尔公理化集合论（Zermelo-Fraenkel set theory），在某种意义上，起源于弗雷格逻辑主义的灾难——罗素悖论。自那以后，公理化集合论被广泛接受为数学的基础。人们是在下述意义上称公理化集合论是数学的基础的。首先，几乎所有的数学概念都可以在集合论语言[1]中被定义。在这些定义之下，几乎所有的数学定理都可以被看作是集合论公理系统 ZFC 的内定理，并且涉及的数学对象都被定义成一个个集合。例如，自然数被定义为有穷冯 • 诺依曼序

收稿日期：2020-04-10
作者信息：杨睿之　　复旦大学哲学学院
yangruizhi@fudan.edu.cn
基金项目：本文受国家社会科学基金青年项目“内模型计划与当代集合论哲学研究”（17CZX052）资助。

[1] 只含有等词和一个用来表达属于关系的二元谓词符号 $\{\in\}$ 的一阶语言。

数（von Neumann ordinal）：$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$。由此，关于数学对象的本体论问题至少在字面上可以归约为关于集合的本体论问题。而正是后者引起了贝纳赛拉夫（P. Benecerraf）等数学哲学家的不满。

在 [2] 中，贝纳赛拉夫提出数学对象的认定难题（Benacerraf's identification problem），其主要论据就是自然数结构 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \leq, +, \cdot)$ 在集合论中可以被定义为不同的集合，但彼此作为结构是同构的。传统上，集合论学家往往采用有穷冯 • 诺依曼序数作为自然数结构的论域。但人们还可以在集合论宇宙中找到任意多与 $\mathfrak{N}$ 同构却有不同论域的结构，例如策梅洛序数（Zermelo ordinal）：$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$。由此，贝纳赛拉夫认为这是数学柏拉图主义，尤其是集合论基础主义者的一个根本性难题：数学对象无法在本体论意义上被认定为特定的集合。争对这一难题，贝纳赛拉夫提出的建议是，自然数这样的数学对象不应该被认定为集合，甚至根本就不是一个对象。相对地，他认为对数学来说真正重要的是所谓的*抽象结构*（abstract structure），以有穷冯 • 诺依曼序数或策梅洛序数为论域的自然数结构都是展现（exhibit）那个自然数抽象结构的具体结构。贝纳赛拉夫在该文中没有进一步讨论抽象结构的本体论问题，但确实明确指出他的观点不应该划入形式主义。这与后来结构主义内部非可取消论与可取消论的争论形成呼应。我们将在第 3 节中进一步讨论。

应该说，贝纳赛拉夫关于特定的自然数不应该被作为对象等同于特定的集合这一观点本身是没什么争议的。早期逻辑学家逐渐接受冯 • 诺依曼序数作为自然数更多是基于准确、方便等实用上的考虑。弗雷格在《算术基础》中将自然数 0 定义为所有与“不等于自身”这个概念等数的概念组成的类，而自然数 1 是所有与“等于 0”这个概念等数的概念组成的类。弗雷格的这个定义可能在本体论上是有严肃的考虑的。从现代集合论的观点来看，弗雷格定义的自然数作为集合过于庞大以至于其存在性会导致矛盾。现代集合论在处理过大的等价类时往往会采取被称作*斯科特技巧*（Scott's trick）的方法，取等价类中在冯 • 诺依曼层谱（von Neumann hierarchy）下最低层的代表组成的集合来代替整个等价类。这是一个纯技术的操作。应该没有集合论学家会严肃地认为等价类的这一替代会有什么特别的本体论意义。人们对于冯 • 诺依曼序数的偏好在一定程度上也是基于类似的考虑。除此以外，还有可以直接将集合论初始符号 $\in$ 来表示自然数上的小于关系以及更便于推广到超穷等方面的考量。因此，即使持柏拉图主义的集合论学家也未必真的认为自然数 1 作为实体就是且只能是集合 $\{0\}$。

事实上，作为数学哲学柏拉图主义者的代表的哥德尔（K. Gödel）心目中客观存在的抽象实体是“概念”等。然而，人们关于“概念”这样的抽象实体的认识是相当有限的。集合论可以看作是试图描绘概念世界的某些面向的一些努力。例如，集合论只关心概念的外延。哥德尔哲学的一个核心就是其对于概念理论的若干设

想（参见 [24]）。显然，哥德尔不是贝纳赛拉夫所描绘的那种平凡的集合论基础主义者。哥德尔这类关注基础问题的逻辑学家偏好集合论的理由可能是，集合论提供了比较严格又足够丰富的表达能力，能够让人们在一个宽广的视野下讨论看似跨领域的数学概念之间的关系，并产生对数学哲学讨论有影响的数学结果。例如，哥德尔与科恩（P. Cohen）关于连续统假设独立性的证明就是在集合论框架下给出的。哥德尔与科恩关于这个结果的哲学意义的不同解读成为区分当代数学柏拉图主义与形式主义的测试标准。

总之，结构主义者所想象的他们哲学立场上的对手似乎并不确切地存在。或者说，数学结构主义在哲学上似乎是一种无关痛痒的立场。这个观点或许还有待商榷。而本文所关心的是，数学结构主义作为一个具有相当影响力的数学哲学思潮在数学上是否也是一种基本无效的立场。

笔者在 [19] 中曾提出一种实用主义的数学哲学观，即通过衡量一种数学哲学立场对数学实践的影响（正面、负面或者有多正面）来评价其优劣。而本文所涉及的是一种更低的评价标准：一个数学哲学立场对数学实践是否有影响。更确切地，我们可以将各种数学哲学立场划分为*数学有效的哲学*（mathematically effective philosophy）以及*数学中性的哲学*（mathematically neutral philosophy）。在第 2 节中，我们将探讨一些主要的数学哲学立场何以是数学有效的。在第 3 节中，我们试图通过经验研究说明结构主义何以不是数学有效的哲学立场。最后，笔者将结合集合论多元主义有关的数学结果向结构主义发起挑战，试图使结构主义陷入两难：要么是错的，要么进一步被验证为是数学中性的。

2 数学有效的数学哲学

本节中，笔者将简单回顾自弗雷格逻辑主义以来一些主要的数学哲学立场如何与数学实践产生真实的互动，以展示它们何以至少是数学有效的数学哲学。

2.1 面向数学工作者的真实困惑

黑格尔（G. W. F. Hegel）曾以“密涅瓦的猫头鹰只在黄昏的时候起飞”为哲学的迟到辩护。而今，哲学的声誉甚至远不及它在黑格尔的时代。今天的哲学逐渐沦为一个个学术团体内部的智力游戏，不仅无法为现实问题提供参考意见（这或许是可辩护的），甚至发展出成套的技巧和说辞来回避人们的问题。笔者希望接下来的讨论能够让读者认同数学哲学自十九世纪末以来的许多工作至少在试图回应数学工作者真实的困惑。

现代逻辑起源于弗雷格为数学寻找基础的努力。为数学寻找基础的需求来源于无穷与极限在数学中的广泛应用以及由此带来的对严格性的怀疑和更高的要

求。许多数学结果可以被运用于工程、科学和其他场合，它们的成功运用反过来为这些数学结果提供了经验证据，甚至让数学获得了严格和普遍有效的声誉。但当数学更多地踏入无穷的领域，远离了来自经验世界的评价标准，数学工作者会面对来自两方面的困惑。一是，（这部分）数学工作的意义，即这些数学证明和结果意味着什么，它们是人类对未知世界探索的发现，抑或只是人类自己划定规则的游戏。二是，这些数学工作是否是可靠的。如果数学是发现，那么它的成果是否是可信的；如果数学是游戏，那么这个游戏规则本身是否是有漏洞的。这些疑问可能针对全部数学或者一部分数学工作，对这些问题的看法会直接影响数学工作者或潜在的数学工作者对智力资源的分配。

弗雷格的工作直接针对这两方面的困惑。首先，弗雷格希望能够将所有数学工作建立在严格的逻辑的基础之上。[2] 为此，弗雷格发明了谓词逻辑。今天，我们知道弗雷格试图作为数学基础的逻辑公理超出了狭义的一阶谓词逻辑，实质上是与集合论具有类似功能的一个二阶逻辑。这部分工作，如果成功了，至少向人们提供了一个统一的、原则性的方法来判断一个数学证明何以是成立的，满足了数学工作者关于严格性的基本需求。其次，弗雷格通过《论意义与指称》（Über Sinn und Bedeutung）等哲学工作将逻辑公理和数学命题与抽象世界的真联系起来，从而完成对第一个困惑的回应。

弗雷格的逻辑主义计划自始就面对挑战与反对。庞加莱（J. H. Poincaré）是弗雷格同时代较有影响的反对者。作为一名数学家与哲学爱好者，庞加莱的哲学论述虽然显得难以把握，却更直接地源于数学实践中的思考。他反对弗雷格将数学基础归为逻辑。明显受到康德的影响，庞加莱认为数学直觉为数学提供了认识论上的先天基础。庞加莱在几何学上采取了一种约定论（conventionalism）的立场，这明显是应对非欧几何带来的冲击。也因此，庞加莱关于数学直觉的理解相对康德有所调整。后者认为数学真的先天性来源于时间直觉和空间直觉。布劳威尔（L. E. J. Brouwer）的直觉主义和罗素（B. Russell）类型论中体现的直谓主义（predicativism）某种意义上都是对庞加莱想法的澄清与修正。

一般认为，罗素悖论（Russell's paradox）的发现标志着弗雷格的失败，尽管它对弗雷格逻辑主义立场来说并不是根本的挑战。（[22]）但悖论的出现及其揭示的潜在危险迫使数学工作者不得不更多地关注基础问题。[3] 以希尔伯特（D. Hilbert）为代表的形式主义在很大程度上正是回应了这些关切。面对哲学的追问，数学工

[2] 主要指弗雷格在《概念文字》（*Begriffsschrift*）、《算术基础》（*Die Grundlagen der Arithmetik*）以及《算术基本原理》（*Grundgesetze der Arithmetik*）等著作中的工作。我们不再把这类众所周知的经典文献列为引文。

[3] 这在一定程度上可以解释为什么包括逻辑学在内的数学基础工作在二十世纪前期在整个数学工作的版图中相比其他时期更引人注目。而数理逻辑在今天的式微或许是公理化集合论作为数学基础成功的表现。另一方面，一些曾经被认为是纯数学的工作会受到更严格地基础审查，甚至迫使作者给出基于哲学的辩护。例如，策梅洛关于选择公理的辩护。参见 [21]。

作者可以选择退守形式主义的避难所，宣称悬置一切本体论和认识论问题，数学工作只是在给定规则下的游戏。然而，数学工作者仍然不得不面对这些问题：数学的游戏规则到底是什么，这些规则是否可玩的。更准确地说，数学工作到底基于怎样一个形式化的公理系统，以及这个公理系统是否是一致的。因为，如果数学所基于的公理系统是不一致的话，那么所有数学工作都是平凡的了。基于这些几乎无法回避的最低需求，希尔伯特纲领（Hilbert's program）被提出。它要求：1. 找到一个公理系统（包括形式语言与可判定的公理）；2. 证明这个公理系统对数学是完全的，即任何数学命题都可以在这个公理系统中被证明或证否；3. 证明这个公理系统是一致的。而这些证明都应该在希尔伯特所谓的有穷数学（finitary mathematics）中得到。

哥德尔的两个不完全性定理，在其广泛被接受的解释下，几乎宣判了希尔伯特纲领注定失败。即，任何满足作为数学基础候选的基本要求的公理系统既不能是完全的，也无法证明自己的一致性。在哥德尔定理之后，仍然有努力试图局部地推进希尔伯特纲领。例如，根岑（G. K. E. Gentzen）对皮亚诺算术的一致性证明。其证明使用到超穷序数 ε_0 下的归纳原理。还有哥德尔本人基于一种“扩张了有穷主义限制的系统”**T** 的皮亚诺算术的相对一致性证明。[4] 关于这些工作是否可以被认为是希尔伯特纲领部分实现的争议揭示了希尔伯特形式主义在哲学上的主要缺陷：它试图避免谈论数学真，却诉诸一种特殊的有穷数学来证明数学公理的一致性为真。由此，希尔伯特形式主义将数学分成了承载特殊哲学承诺的一部分，和只作形式主义理解的其他部分。形式主义者必须对这个划分做出说明。

形式主义的这一困难对柏拉图主义者来说是不存在的。弗雷格与希尔伯特（尽管二者都试图为全部经典数学辩护）的分歧在于，弗雷格作为实在论者认为数学命题关于抽象世界的叙述是否为真才是关键的，一组真命题自然是一致的。哥德尔的柏拉图主义与弗雷格在精神上是一致的，却面对来自数学的不同的挑战——独立性现象。哥德尔证明诸如 ZFC 这样的公理系统如果是一致的，那么是不完全的。进一步，哥德尔与科恩的结果表明存在自然的数学命题（如连续统假设），它们无法被 ZFC 等集合论公理系统证明或证否。这是关于业已被数学工作者接受的数学基础——集合论公理系统的一个结果，它召唤着一个哲学的说明。围绕连续统假设的独立性结果，其发现者哥德尔与科恩的观点就区分为柏拉图主义与基于公理集合论的形式主义。前者认为独立性结果无非揭示了以现有公理系统为代表的人们关于数学世界的认识是不完全的，因此需要并且可以更进一步地理解数学世界，其表现就是为数学寻找到新的公理来判定独立于现有公理系统的命题。而科恩认为，相对 ZFC 的独立性结果就是连续统假设等问题的最终解决。其前提是，全部的数学就是在 ZFC 下做证明。

[4] 关于根岑结果及其哲学辩护可以参考 [17]，关于哥德尔的工作可以参考 [25]。

随着科恩发明的技巧的广泛应用，现代集合论产生了大量独立性命题。集合论学家倾向于把这些结果表述为，这些独立命题分别在不同的集合论宇宙中成立。随着积累，人们在各种集合论宇宙中工作的这些经验愈来愈强健，这对柏拉图主义者带来了新的挑战。后者认为存在客观的集合论宇宙，而公理集合论就是对那个客观世界（尚不完全）的描述。因此，任何集合论命题终有一个真假。人们的经验与这种又被称作集合论单一宇宙观（Universe view）的柏拉图主义立场似乎形成了一定的冲突。集合论的多宇宙观正是应这种困惑而产生的新的哲学立场。（[26]）

以上，我们简单回顾了逻辑主义、直觉主义、形式主义、柏拉图主义与新进的集合论多宇宙观等数学哲学思想如何起源于数学研究中实际产生的困惑。

2.2　数学哲学观点产生的数学后果

笔者在 [19] 中结合若干案例讨论了数学哲学观点影响数学实践的几种途径。包括基于哲学立场提出的数学研究纲领，如哥德尔纲领；从哲学立场出发做出的数学猜想并导致最后的数学发现，如基于实在论立场寻找利用大基数公理证明投影实数集（projective set）的正则性质；以及哲学立场对一些数学研究造成的障碍，如罗素的构造主义倾向使之没有进一步推广他的分支类型论到超穷阶，而后者正是哥德尔后来定义的可构成集。本节中，笔者仅就 [19] 中的论述做些补充。

与多数数学柏拉图主义者或形式主义者试图捍卫数学工作者现有的做法或捍卫“数学自治”不同，一些数学哲学立场试图宣称某些数学工作是合法的，而另一些是不合法的，从而试图改造或规范数学工作的样态。它们被称作数学的修正主义（revisionism）。直觉主义是其中的代表。庞加莱基于其哲学上的考量，反对康托的实无穷理论，反对非直谓的定义。布劳威尔基于直觉主义的立场反对排中律以及基于排中律的反证法不加限制的使用。尽管在事后看来，修正主义没能广泛地影响数学工作者的工作方式，但这些哲学立场无疑是试图实际影响数学研究的。直觉主义以及更广泛的构造主义的继承者们，如海廷（A. Heyting）、特鲁尔斯特拉（A. S. Troelstra）等人的一项重要工作就是将直觉主义等哲学立场所认可的数学以公理化或其他形式化的方式严格地刻画出来。在此基础之上，人们可以严格地验证哪些经典数学的工作是可以在诸如直觉主义数学中被接受的，哪些必须被放弃。例如，源于自然主义立场的有穷主义者试图论证，在经验科学中用到的涉及无穷的数学都可以在有穷主义数学中找到相应的结果。（[20]）当代递归论的一个方向，反推数学（reverse mathematics）在一定意义上就是这类工作的延续，至今已经产生了丰富的结果。许多命题间细致的差别在一个更强的公理系统（如 ZF）下是无法看到的，它们在这些公理系统下是可证等价的。而在一个较弱的系统中，人们就可以清楚地看到它们之间的强弱关系。因此，包括直觉主义在内的各种构造主义在以下两个意义上都是有数学后果的：(1) 这些哲学立场蕴含了对数学

工作方式的限制；(2) 这些哲学主张试图引用数学结果澄清其立场或为自身辩护，并由此催生了一类数学研究，产生了丰富的数学成果。

2.3 测试问题

判断一种数学哲学立场是否是数学有效的一个充分的标准是，它能否提出相应的测试问题（test problem）。此外，能否提出测试问题也是一个哲学上的想法是否成熟的标志之一。所谓测试问题是一个或一组具体的（在提出时的）数学开问题，这些问题可能的答案指向对目标哲学观点的佐证、证否或其反面的佐证、证否。

例如，希尔伯特为贯彻其形式主义的立场提出的希尔伯特纲领。希尔伯特纲领本身可以被看作是一组相对明确的数学问题。它要求给出一个形式化的公理系统，希望这是一个完全的公理系统，即任何数学命题要么可以该系统中被证明，要么可以被证否；更关键的是要证明该系统是一致的，并且一致性证明只能在有穷数学中给出。客观地说，希尔伯特纲领作为测试问题仍然留有些许不精确的地方。它要求完全性却无法明确全部数学的范围，它要求一致性证明在有穷数学中被给出，但也没有明确有穷数学的定义。后来的故事前文已提及，哥德尔的两个不完全性定理在很强的意义上宣告了希尔伯特纲领是不可能实现的。任何扩张了基本算术能力的形式化公理系统如果是一致的，就不是完全的，（并且如果能表示基本的逻辑句法事实）也无法证明自己的一致性。因此，在一般的理解下，无论是要求涵盖所有数学（至少得包括基本的一阶算术）还是要求基于有穷数学（至少带完整一阶算术归纳的皮亚诺算术很难被认可是有穷数学）的一致性证明都难以实现。尽管希尔伯特纲领的模糊之处使得希尔伯特式的形式主义在哥德尔定理之后仍有一定的生存空间，但哥德尔不完全性定理作为纯数学的结果几乎终结了希尔伯特纲领，这一事实至少说明希尔伯特形式主义提出了有效的测试问题。

类似的赞许也可以被给与弗雷格的逻辑主义。逻辑主义要求为经典数学提供逻辑的基础。类似希尔伯特纲领，逻辑主义关于逻辑的或分析的界定尚未达到我们对一个数学概念的严格性标准。我们也提到罗素悖论的发现是对弗雷格逻辑主义的重要打击，而后续包括公理化集合论在内的数理逻辑的发展使得逻辑主义逐渐被冷落。罗素悖论让人们意识到弗雷格的所谓逻辑基础也是需要被怀疑的，后续的数理逻辑发展，让人们能够清晰地区分狭义的（一阶）逻辑公理与算术公理、类型论或集合论公理。逻辑主义的主要挑战变成为如何论证，例如部分集合论公理也应被纳入逻辑或分析真的范畴。无论弗雷格的逻辑主义的最终命运如何，其兴衰明显受具体数学工作的影响，这一事实说明弗雷格的逻辑主义至少是足够成熟且数学有效的数学哲学立场。

关于测试问题更晚近的例子来自于武丁（W. H. Woodin）的终极 L（Ultimate L）计划。武丁继承哥德尔纲领，希望为数学寻找新的公理以判定连续统假设等独

立于已有集合论公理系统的数学命题。终极 L 计划也是试图为大基数公理提供辩护的内模型计划的终极版本。武丁发现，一旦构造出兼容超紧基数（supercompact cardinal）的内模型，那么所有已知通过初等嵌入构造的大基数性质[5]都与该内模型兼容。由此，内模型计划终极问题就是寻找与超紧基数兼容的类似 L 内模型，又称作终极 L。武丁在终极 L 的构造甚至是否存在等问题尚未可知的情况下，试图分析了 $V=$ 终极 L 公理的可能候选及其推论（如广义连续统假设），并刻画了终极 L 猜想。[6] 终极 L 猜想是一则明确的数学命题。它的得证意味着内模型计划的完成以及一系列独立的数学问题因为被大基数公理和 $V=$ 终极 L 蕴含而得到证明。而终极 L 猜想的证否意味着一则反内模型定理，那将迫使人们不得不重新审视包括大基数公理在内对集合宇宙的理解。因此，终极 L 猜想是一则对于包括承认大基数公理等在内的一套集合实在论思想的测试问题。武丁在 2014 年著名的邮件辩论中对弗里德曼（Sy Friedman）的超宇宙（hyperuniverse）计划提出的挑战便是给出类似终极 L 猜想这样的测试问题（[5]）。

3　对结构主义有效性的质疑

本节中，笔者试图论证数学结构主义不是有效的数学哲学。上一节中，笔者已经展示了一种数学哲学立场如何与实际数学工作产生互动，从而能够被认可为有效的数学哲学。本节意在从几个主要的方向来说明数学结构主义在这些方面都尚未与数学实践形成上述意义上的互动。这是一项非常困难的任务。首先，这是一则全称判断，无法通过例证，或必须穷尽一类相关情况才能得出有限的结论。其次，笔者既非构造主义者，亦非许多构造主义者所推崇的，例如范畴论等数学研究领域的专家。笔者所知相对于该论证的要求明显欠缺。因此，读者应该将本节的内容视作对结构主义者发起的一个挑战。笔者乐见更多关于数学结构主义如何切实影响数学研究实践的有关讨论。

3.1　结构主义是否影响了集合论的发展

正如引言中提到的，数学结构主义是作为集合论基础主义的竞争立场而被提出的。且不论数学结构主义所描绘的极端的集合论基础主义的支持者是否真实存在，以哥德尔为代表的数学柏拉图主义，以及由柏拉图主义衍生出来的诸多集合论哲学立场，甚至包括集合论形式主义之间的争论的确推动了集合论的发展。以直觉主义为代表的构造主义，试图限制经典数学使用的部分方法，同时发展出成套的构造主义数学系统，并产生了有趣的成果。数学结构主义对于集合论的发展

[5]不包括那些已知与选择公理冲突的无选择大基数（choiceless large cardinal）。

[6]目前为止，在正式发表的文献中，[18] 包含了终极 L 猜想最详细的刻画。中文介绍文献可参考 [23]。

是否存在类似的影响？

首先，结构主义批评集合论基础主义者将数学对象定义为具体的集合。例如，自然数不应就被看作就是有穷冯·诺依曼序数。那么结构主义是否如直觉主义一样，明确提出哪些数学研究或集合论的研究方法是不合法的，或者对逻辑公理或数学公理提出他们的见解？笔者认为，数学结构主义不仅未给出这样的限制，甚至从未企图给出这样的限制。多数结构主义者与直觉主义者不同，是持反修正主义立场的。毋宁说，结构主义对数学结构的强调基于结构主义者对数学实践的观察。的确，在数学实践中，同构关系或许是除等同关系外最强的且最重要的等价关系。数学工作者也的确不怎么关心同构关系下的非不变量（invariant）。贝纳赛拉夫正是观察到了这点，提出策梅洛序数就数论学家所关注的不变量而言与冯·诺依曼序数没什么不同。可以说，这是一个数学哲学家所能做出的尽可能安全的，甚至显得平凡的关于数学的非数学论述。从当代结构主义主要代表人物夏皮罗关于数学哲学角色的分类和自白中（[16]，第 21–35 页），我们也可以看出，现代数学结构主义与几乎同期兴起的分析哲学的自然主义思潮相呼应，将数学哲学的主要工作定位为对数学工作的解释和描述。

也因此，结构主义者似乎放弃了对集合论研究中产生的实际困惑的回应。与其他数学工作不同，集合论研究无疑更多地牵涉哲学问题。就结构主义所关心的问题而言，集合论研究的对象，按照一般的理解，是集合论宇宙 $(V, \in)$。但与数论的标准模型 $(\mathbb{N}, \leq, +, \cdot)$ 不同，我们关于集合论宇宙的知识非常有限。现代集合论通过司寇伦壳（Skolem hull）、超积、内模型和力迫法等工具，构造出各种各样 ZF 或 ZFC 的模型。其中，有些模型是可数的，有些构造是保持一阶性质的，更多的构造则会改变一阶性质。这里似乎有大量与结构相关的问题，但结构主义者要么回避了这些问题，要么没有给出相比其他集合论哲学更精细的分析。例如，作为一种结构主义的普特南的*如果那么主义*（if-then-ism）。它将一则数学命题，如“$2+3=5$”解释为：对任意结构 $\mathfrak{M}$，如果 $\mathfrak{M}$ 是皮亚诺公理的模型，那么

$$2^{\mathfrak{M}} +^{\mathfrak{M}} 3^{\mathfrak{M}} = 5^{\mathfrak{M}}。$$ [7]

按照一阶逻辑完全性与可靠性定理提供的字面解释，这等价于 PA $\vdash 2+3=5$。如果那么主义由此退化为朴素的形式主义。这种立场对于上述来源于集合论实践的困惑能够提供的见解也就不会比集合论的形式主义更多。

那么，结构主义是否会基于其哲学立场提出或推动一些数学研究规划，或提出相应的测试问题以激励某些方面的数学研究呢？蒯因（W. V. Quine）在 1937 年提出了被称作新基础（New Foundations，简记为 NF）的公理集合论以更好地刻画罗素的类型论。（[14]）虽然 NF 没能成为集合论研究的主流，但至今仍然有零星

[7] 参见 [15]。

的相关研究，其中主要的目标是它与主流公理系统的一致性强度关系。[8] 我们是否能期望结构主义至少能提供类似的研究课题？一些结构主义者的确试图更严格地刻画它们的理论，这似乎为引出真实的数学问题提供了契机。其中较有影响的是夏皮罗的结构理论（theory of structure，参见 [16]，第 93–95 页）。

夏皮罗理解的结构并非数理逻辑中定义的特定形式语言的某个特定的解释。夏皮罗将数理逻辑中定义的结构（包括一个具体的集合作为论域和论域上的关系与函数）称作系统（system），而夏皮罗的结构是对那些互相同构的系统的抽象。读者或许可以将结构理解为，例如冯・诺依曼序数和策梅洛序数背后共同的东西，抑或从外延上来看是所有同构于 $(\mathbb{N}, \leq, +, \cdot)$ 的（一阶语言的）结构组成的类。[9] 为了进一步阐明关于结构这个概念，夏皮罗试图利用公理化的方式来定义结构。这与人们用集合论公理来隐定义集合这个概念是类似的想法。夏皮罗的结构理论包含下面几组公理。

无穷公理（Infinity）	至少存在一个结构，有无穷多个位置（places）。
减公理（Subtraction）	如果有一个结构 S，其中有一个关系 R，那么存在一个结构 S'，除了没有关系 R，其余与 S 同构；类似地，也可以减掉一个函数。
子类公理（Subclass）	如果 S 是一个结构，c 是 S 的位置的子类（subclass of places of S），那么存在一个结构与包含 c 的系统同构，但是没有任何关系与函数。
加公理（Addition）	如果 S 是一个结构，R 是 S 中位置上的任意关系，那么存在一个结构 S' 同构于一个由 S 中的位置、S 上的函数和关系以及 R 组成的系统。类似地，我们也可以添加一个函数。
幂集结构公理（Powerstructure）	令 S 是结构，s 是 S 中位置的集合，那么存在结构 T 以及一个二元关系 R 使得对每个 s 的子集 s'，存在 T 中的一个位置 x 使得 $\forall z\,(z \in s' \leftrightarrow Rzx)$。
协调性公理（Coherence）	如果 Φ 是任何二阶语言中的协调的公式，那么存在一个结构满足 Φ。
替换公理（Replacement）	令 S 是一个结构，f 是一个函数，并且对任意 S 中的位置 x，fx 是某个结构中的位置，我们称这个结构为 S_x。那么存在一个结构 T，它的大小至少是所有这些 S_x 的位置的并的大小。即存在函数 g，使得对每个 S_x 中的每个位置 z，存在 T 中的位置 y，有 $gy = z$。
反映公理模式（Reflection）	对任何结构理论语言（一阶或二阶）公式 Φ，下述命题是公理。如果 Φ，那么存在一个结构 S，它满足其他结构理论的公理以及 Φ。

如果以形式化公理系统的标准来要求夏皮罗的结构理论，会有许多令人疑惑的地方。例如，替换公理中的跨结构的函数 f 的所指令人生疑。按结构主义的立场，函数只能是某个结构上的函数。因而，看似跨结构的函数 f 实际上是某个结构上的函数。那么下述命题（在诸如子类公理等其他公理存在的情况下）与替换

[8] 一些相对晚近的 NF 研究可以参考 https://math.boisestate.edu/~holmes/holmes/nf.html。

[9] 按照夏皮罗对结构的描述，这个比喻并不准确。夏皮罗的结构上有诸多位置（places），这些位置也可以被看作是对象。由此，一个作为诸系统的抽象的结构本身也可以被看作是一个系统，并且还与例示（exemplify）这个结构的诸系统同构。这一细节在下面子类公理的表述中显得尤为关键。

公理等价：给定结构 S，如果每个 S 中的位置 x 也是某个结构 S_x 中的位置，那么存在一个结构 T，T 中位置与诸 S_x 中位置的“不交并等势”。这样做的好处是避免提及看似跨结构的函数 f。还如，反映公理模式中提到的（一阶或二阶的）结构理论语言到底是如何定义的，其中结构和结构中的位置是以不同阶的变元，或二种类（two-sorted）变元抑或同一种变元通过它们出现在某个类似 $\in$ 的二元谓词符号后的不同位置，如 $\in xy$，来区分的？更多的批评指向协调性公理。其中的“协调性”显然缺乏进一步的界定。夏皮罗本人也意识到，为了保证得到所需的标准模型（范畴性），协调性公理必须能够涵盖二阶公式；而由于二阶逻辑不满足完全性，基于有穷证明概念的一致性不足以推出模型的存在性，因而这里的协调性必须比一致性更强；而直接采用可满足性则会使协调性公理成为同语反复。对此，夏皮罗的回答是：“我把‘协调性’当作一个初始的、直观概念，不被归约为任何形式的东西，所以我不冒险给出一个严格的定义”（[16]，第 135 页）。夏皮罗关于“协调性”的这一立场，例示了他对整个结构理论的期待。即结构理论无法被看作是任何形式化的关于结构世界的刻画。如此，我们也就无法期待结构主义者提出类似“结构理论是否一致”这样的形式化了的测试问题。

夏皮罗把自己关于“协调性”的立场比作丘奇论题（Church's thesis）。这仍然是不恰当的，因为丘奇论题有着明确的对于能行可计算性概念的候选的形式化刻画——图灵可计算性。或许更恰当的比照对象是布劳威尔关于直觉主义数学的描述。布劳威尔也反对任何将直觉主义数学形式化的努力。尽管如此，海廷等人仍然尝试将直觉主义数学形式化，并由此得到丰富的数学成果。那么，夏皮罗的结构理论是否有可能引导出类似的发展？首先，夏皮罗在关于结构理论的介绍中反复强调，结构理论是“二阶策梅洛-弗兰克尔集合论的重做（reworking）”。例如，夏皮罗宣称，上述公理中到幂集结构公理为止的公理集的标准模型是 $V_{\omega+\omega}$，添加替换公理后的标准模型是 V_κ（κ 是一个不可达基数），再添加反映公理后标准模型中会出现基数为不可达基数的结构，等等。事实上，夏皮罗的结构理论几乎无法独立于背后预设的集合论。例如，幂集结构公理用到“每个 s 的子集”这样的表述，而这个表达式的涵义依赖于对幂集 $P(s)$ 的集合论理解。我们知道，在现代集合论中，对无穷集合 s，幂集 $P(s)$ 的涵义是不明确的。因此，幂集结构公理的具体涵义依赖于背后预设的集合论对幂集的解释（例如，是否所有子集都是可构成的）。笔者认为，夏皮罗的结构理论甚至无法被视为 ZF 集合论的重做，而是基于集合论，即在集合论语言中，对结构世界的一个刻画。这与在集合论中刻画自然数或实数概念是一样的。因此，对结构理论的研究反过来促进集合论研究的机会至少不会多于数论或分析反过来促进集合论研究的机会。[10]

[10]显然，夏皮罗本人没有期待结构理论能否反过来启发集合论的工作。结构理论中的反映公理与集合论中的反映原理功能相似，可能具有一定的大基数强度，但对其具体强度的分析依赖于对诸如结构理论语言更严格的刻画。

3.2 结构主义对范畴论发展的影响？

范畴结构主义（categorical structuralism）是近二十年来兴起的结构主义流派。奥德（S. Awodey）是其主要推动者。（[1]）正如我们已经看到的，无论贝纳赛拉夫还是夏皮罗对结构主义与集合论基础主义的区别或对结构概念的刻画几乎是基于集合论语言的。范畴结构主义则认为范畴论（category theory）才是最适合结构主义者的数学框架。其主要理由是，在结构主义者看来，数学关心的只是结构性质（structural property）。

> 由于所有范畴性质都是结构性质，因而给定范畴中的给定对象，即作为那个范畴中的对象，可能具有的性质就只能是结构的了。（[1]）

因此，范畴论是比集合论或其他基础理论更适合的框架。这显然是一种限制性的论述，与直觉主义者试图限制数学的合法范围类似。

范畴论始于艾伦伯格（S. Eilenberg ）和麦克兰恩（S. Mac Lane ）上世纪四十年代的工作（[4]）。他们刻画的范畴论框架是为了推广他们在 [3] 中有关代数拓扑的工作。范畴论背后的想法是，数学研究的对象是结构，而理解结构就要理解保持结构的各种态射（morphism）。塔斯基语义所刻画的结构（给定语言的解释）的缺点在于，讨论相互有态射的这些结构往往是同一个或一类语言的结构。而范畴论的一个优势是便于谈论不同语言、甚至不同类型的结构，如代数结构与拓扑结构之间的联系。

早在上世纪六十年代劳威尔（B. Lawvere）就试图推动范畴论取代集合论作为数学的基础。由于范畴论公理总是针对某个范畴的，作为数学基础候选的范畴理论有若干个，其中比较有代表性的是对集合范畴的公理化——ETCS（the Elementary Theory of the Category of Sets，[12]）。显然，范畴论理论都能被解释到集合论中。对试图推动范畴论作为数学基础的数学家来说，首先需要证明的是相应的范畴论在解释力上不弱于 ZFC 等集合论公理系统，这对多数范畴论候选理论来说都是可以做到的。而认为范畴论作为数学基础优于集合论的主要论据是，例如 ETCS 不用关心集合的内部结构（internal structure），如实数集中具体有哪些元素，而可以专注于，诸如实数集与有理数集之间的关系。

应该说，无论是来自哲学的数学结构主义还是来自数学的范畴论关于结构主义优于集合论基础主义或范畴论由于集合论的论点基本是一致的。但历史上，两者的确是各自独立发生的（[13]）。范畴论诞生于现代数学结构主义兴起之前，试图用范畴论取代集合论作为数学基础的想法几乎与数学结构主义同时出现。可以说，范畴论学家对于诸如 ETCS 等替代理论的研究源于其试图推广范畴论以取代集合论作为数学基础的动机，而这一动机在事实上和原则上都独立于数学结构主

或许未来有可能启发一些有关研究。

义。或许可以说，就对集合论基础主义的批评而言一些数学结构主义者和一些范畴论学家形成了合谋，数学结构主义为范畴论的宣传和推广提供了支持。但笔者并没有发现结构主义实际推动范畴论本身发展的具体例证。

此外，或许恰恰是那些在范畴论鼓吹者看来的冗余信息（如集合内部结构）使得集合论可以被用来澄清、比较各种数学哲学立场。而范畴论能否提供这样一个话语系统，不仅仅适合结构主义，还能用来讨论不同的数学哲学立场？如果答案是否定的，便可部分解释为什么结构主义的哲学讨论难以在范畴论中启发更多的新问题，从而促进后者的发展。

3.3 结构主义的细分立场是否产生数学后果

即使在支持集合论作为数学基础的集合论学家内部，也存在哲学立场的显著分歧。诸如，集合论的实在论者、集合论的形式主义者和近年来兴起的多宇宙观立场。甚至实在论者内部的争论亦十分激烈。集合实在论者往往继承了哥德尔关于为集合论寻找新公理的想法，但他们关于集合论宇宙的理解非常不同，这直接表现为他们力推的新公理的候选各不相同。例如，弗里德曼考虑到一阶语言的限制，希望考察由所有 ZFC 可数传递模型构成的超宇宙，并且依据极大化原则等有待严格化的标准从中挑选更令人喜欢的模型，以此来决定 V 的一阶真。武丁则强调着眼于 V 的全局性质，为此他不惜放弃了早些时候基于多宇宙真理观的 Ω-逻辑计划（后者被证明具有局部性），并启动了寻找大基数的终极内模型的计划。这些基于集合论哲学上的考量推动了包括大基数与内模型、力迫公理以及内模型假设（Inner Model Hypothesis）的研究，可以说构成了当代集合论发展动力的主要来源。结构主义内部同样存在诸多分歧，这些分歧之间的碰撞是否也能促进相关的数学研究？

首先，结构主义内部有可消去（eliminative）结构主义与不可消去（non-eliminative）结构主义之分。不可消去结构主义者，如贝纳赛拉夫和夏皮罗把结构或抽象结构视作独立的存在，它们是数学研究的对象。而可消去结构主义认为结构只是一种说话方式，在对数学命题意义的解释中是可消去的。例如，前文提到的如果那么主义。显然，不可消去结构主义者更接近于实在论，而可消去结构主义更接近唯名论。

按照实在论–唯名论的维度，我们可以简单地分类结构主义。首先是结构主义者构想的集合论基础主义，这种立场认为自然数这样的数学对象存在，它们是特定的集合，而数学命题就是关于这些数学对象，也即特定的集合的谓述。其次是不可消去结构主义，他们认为存在抽象的数学结构，抽象结构中有位置，抽象结构被具体的系统例示，抽象结构的位置被系统中的对象填充，而数学命题应该被理解为关于这些抽象结构的谓述。特别地，夏皮罗认为抽象结构中的位置也能被

看作是对象，因此抽象结构也是例示自己的具体的系统。在可消去结构主义中又根据反实在论的程度分成若干类型。比较温和的不承认抽象结构的存在，但认可例示抽象结构的系统的存在，对他们来说数学命题是关于一个或一类系统的谓述。更极端的可消去结构主义也不认可具体系统的存在，尤其是自然界不存在的无穷系统。正如如果那么主义所展示的，极端的可消去结构主义几乎退化为朴素的形式主义。在前两种可消去形式主义之间较有影响的还有赫尔曼的模态结构主义。

模态结构主义将算术命题 φ 解释为：存在自然数系统 S 是逻辑可能的；同时，逻辑必然地，在任何自然数系统 S 上，φ 成立。模态结构主义的这个解释是为了避免不承认抽象结构存在但承认具体系统存在的温和的可消去结构主义的困难：如果不存在某个数学结构的例示系统（例如物理世界中不存在自然数结构的例示系统），那么关于这个系统的任何谓述都空洞地成立。显然，模态逻辑主义解释的关键是其中模态词“逻辑可能”与“逻辑必然”的涵义。显然，模态结构主义者不会将“逻辑可能”解释为 ZFC 可证存在或其存在与 ZFC 一致。类似夏皮罗在结构理论中对协调性概念的处理，模态结构主义者也将这些模态词列为初始概念。赫尔曼在 [10] 和 [11] 中分别给出了对算术、分析和集合论的基于模态结构主义的形式化语义。通过该形式化语义间接解释他对其中涉及的模态词的理解。然而，类似夏皮罗的结构理论，赫尔曼的这些工作几乎没有在数学界产生任何影响。

近年来，在有关数学结构主义的发表中又出现进一步细分的不同立场。相对结构主义（relativist structuralism）试图迎合数学家们的朴素想法：实用主义地选取例示结构的数学系统，由于这些系统彼此同构，这些选择不会产生任何问题。概念结构主义（concept structuralism）强调对于现代公理化数学来说，重要的不是数学对象或数学结构，而是诸如“自然数系”这样的概念。各种抽象主义的结构主义（abstractionist structuralism）或直接将结构等同于例示这些结构的系统组成的模同构的等价类，或是声称结构是通过抽象掉具体系统中对象的特殊属性只保留结构属性得到的东西。这些细分立场大多是基于前述立场通过哲学术语的细微调整得到的。笔者同样未能发现上述细分立场之间的辩论能够像集合论哲学诸立场之间的辩论那样，频繁引用相关数学结果，并且能够促进有关数学问题的研究或提出具体的测试问题。

4　集合论多元论对结构主义的挑战

在本节中，笔者试图结合包括集合论多宇宙观和潜在主义（potentialism）在内的集合论多元论（pluralism）的一些结果，向数学结构主义发起挑战，试图论证：结构主义要么已经被一些数学结果证明是错的或至少是部分错的，要么不接受对这些数学结果的解释，因而进一步被证实是数学中性的。

对结构主义者来说，数学结构最重要的属性是范畴性。无论对数学结构作怎样的解释，一个数学结构的各个例示或一个数学结构概念下的各个标准结构之间必须是同构的。如此，当我们谈论一个数学结构，如“自然数系”时，才能有明确的所指。也正因为此，结构主义者对由一阶语言表达力的局限而导致的非标准模型的存在十分警觉，往往运用如二阶算术或二阶集合论公理来定义有关结构。

哈姆肯斯（Joel D. Hamkins）在 [8] 中基于当前集合论研究呈现出的图景提出了一种被称作多宇宙观的集合论哲学。[11] 其中特别挑战了二阶理论确保范畴性的通常认知。例如，皮亚诺关于二阶算术公理[12] 蕴含只有模同构唯一模型的论证依赖于关于自然数子集的理解。而基于不同的集合概念的各种集合论宇宙中通过二阶算术公理定义的自然数系未必是互相同构的。

为进一步澄清他的多宇宙观，哈姆肯斯提出了所谓复宇宙公理（Mulitverse axioms）。其中的良基幻象公理（Well-Foundedness Mirage）表述为：对每个集合论宇宙 V 都存在另一个集合论宇宙 V'，在 V' 看来 V 不是良基的。特别地，V 中定义的在 V 看来唯一的自然数系（选择冯 • 诺依曼序数抑或策梅洛序数作为例示，在这类结果中并不重要）在 V' 看来可以是非标准的。或者更具体地，在 V' 看来，V 中定义的自然数系可能满足 $\neg\,\mathrm{Con(PA)}$。哈姆肯斯和吉特曼（V. Gitman）在 [6] 中证明了这些复宇宙公理至少是一致的。因此，结构主义者要坚持认为二阶算术公理能保证自然数结构的范畴性，就必须否定集合论多宇宙观，也即要预设背后有唯一的集合概念或唯一的真正的集合论宇宙。这种被称作单一宇宙观的集合论哲学立场蕴含数学真本质上是关于这个唯一的集合论宇宙的正确描述。这显然与结构主义的立场冲突。要避免这一尴尬的情况，结构主义者必须提出其他的理由以拒绝对上述数学结果看起来最自然的解释。

对结构主义者来说，另一个看似平凡成立的重要预设是，结构决定了结构真。换句话说，两个同构的结构应该满足同样的一阶、二阶语句。哈姆肯斯与笔者证明了 [7]，在多宇宙观的视角下，给定结构的真谓词并不是绝对的。可以存在两个集合论模型，它们中定义的自然数结构同构，然而，它们中定义的算术真却不被这个同构保持。这一结果可以轻易地推广。例如，两个集合论宇宙定义了相同的自然数和实数，但却有不同的投影真（projective truth）；或两者具有某个相同的前段 V_δ，但其中所定义的 V_δ 的真却不相同。再一次，结构主义者要么必须在集合论单一宇宙观和多宇宙观之间做出选择（无论怎样选择都意味着对结构主义至少部分立场的否定），要么给出其他的理由拒绝这些数学结果至少表面上的意义。

此外，一些结构主义细分立场对结构的特殊理解也面临类似的挑战。前文中提到的赫尔曼对集合论真给出了模态结构主义的解释。其中，“逻辑可能”“逻辑

[11] 中文介绍可以参考 [26]。

[12] 引入二阶归纳原理：$\forall X\subset\mathbb{N}\,(0\in X\to\forall x\in\mathbb{N}(x\in X\to x+1\in X)\to\forall x\in\mathbb{N}(x\in X))$。

必然”作为初始概念出现。然而从赫尔曼对“逻辑可能地存在一个集合论模型”或“逻辑必然地对所有集合论模型”的解释中可以看出他似乎持有一种特别的集合潜在主义。赫尔曼对“逻辑可能地存在一个集合论模型”的解释（[11]）大致可以被翻译为，存在一个在标准的冯・诺依曼层谱中的现有集合论结构 V_σ 的尾节扩张 V_δ。这是一种非常受限的特别的潜在主义图景。哈姆肯斯和林内贝（Øystein Linnebo）在 [9] 中刻画了多种集合论潜在主义。包括与赫尔曼的上述潜在主义立场几乎一样的（冯・诺依曼）秩潜在主义（rank potentialism），允许不相容的尾节扩张的顶扩张潜在主义（top-extensional potentialism），专注于可数传递模型（允许横向、纵向扩张）的可数传递潜在主义（CTM potentialism）以及力迫潜在主义（forcing potentialism）等。针对不同的潜在主义图景，他们分析了其中的模态有效式。例如，**S4.3** 中可证公式都是秩潜在主义解释下的模态有效式，而秩潜在主义解释下的模态有效式都是 **S5** 中可证的；顶扩张潜在主义解释下模态有效式则正好是 **S4** 可证公式。这些结果提示，模态结构主义必须明确选择一种潜在主义的图景，因为这会切实地影响数学命题的语义。赫尔曼当时可能并没有意识到这些区别。他无意中选择了受限较多的秩潜在主义，或许是出于结构主义者对范畴性的执着。显然，在诸多潜在主义的图景中，秩潜在主义是最接近于集合论单一宇宙观的。赫尔曼要么放弃这一选择，要么必须为这个接近集合实在论的选择辩护。当然，他仍然可以提出其他理由试图消解上述数学结果的意义。

5　结论

夏皮罗将元数学哲学立场的两个极端称作哲学第一原则（philosophy-first）和哲学最后原则（philosophy-last-if-at-all）。对持有哲学第一原则立场的人来说，数学实践应该接受数学哲学的指导；而对持有哲学最后原则立场的人来说，数学哲学必须观察数学实践的发展，并随时准备根据新的数学发现改变或修正自己的立场。无论持有哪种立场，都不会期望一种既不会影响数学发展又不受数学发展影响的数学中性的数学哲学。夏皮罗和大多数结构主义者都将自己的元数学哲学立场定位在上述两个极端之间。显然，他们所期望的数学哲学也不是数学中性的，而是既能对数学实践提出恰当的批评，又符合数学发展的实际情况。假设本文第 3 节关于结构主义是数学中性的经验观察成立，结构主义的支持者可能会这样解释：这说明结构主义对数学和数学实践本质的描述是正确的，并且当代数学的发展也符合结构主义所描绘的数学的理想形态。然而，源于数学实践关于数学的困惑仍然存在，它们大多不仅仅是数学问题。关心数学基础的人仍然在争论连续统假设是否有一个客观的解，若有，会有怎样的解。数学结构主义者似乎对这些问题漠不关心。另一方面，一些来自集合论研究的结果已经直接指向结构主义者对于数学

结构的朴素认知中所存在问题。如果结构主义者不能对这些直接挑战做出有针对性的回应，那么会更难令人相信数学结构主义仍然是与现实中的数学研究有关的数学哲学立场。

参考文献

[1] S. Awodey, 1996, "Structure in mathematics and logic: A categorical perspective", *Philosophia Mathematica*, **4(3)**: 209–237.

[2] P. Benacerraf, 1965, "What numbers could not be", *The Philosophical Review*, **74(1)**: 47–73.

[3] S. Eilenberg and S. Mac Lane, 1942, "Group extensions and homology", *Annals of Mathematics*, **43(4)**: 757–831.

[4] S. Eilenberg and S. Mac Lane, 1945, "General theory of natural equivalences", *Transactions of the American Mathematical Society*, **58(4)**: 231–294.

[5] S. Feferman, W. H. Woodin and S.-D. Friedman, 2014, "The great debate: Set theory—The search for new axiom", http://logic.harvard.edu/blog/?cat=2.

[6] V. Gitman and J. D. Hamkins, 2010, "A natural model of the multiverse axioms", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **51(4)**: 475–484.

[7] D. Hamkins and R. Yang, 2014, "Satisfaction is not absolute", https://arxiv.org/abs/1312.0670.

[8] J. D. Hamkins, 2012, "The set theoretic multiverse", *The Review of Symbolic Logic*, **5(3)**: 416–449.

[9] J. D. Hamkins and Ø. Linnebo, 2019, "The modal logic of set-theoretic potentialism and the potentialist maximality principles", To be appear in *The Review of Symbolic Logic*, https://doi.org/10.1017/S1755020318000242.

[10] G. Hellman, 1989, *Mathematics without Numbers*, Oxford: Oxford University Press.

[11] G. Hellman, 1990, "Toward a modal-structural interpretation of set theory", *Synthese*, **84(3)**: 409–443.

[12] F. W. Lawvere, 1964, "An elementary theory of the category of sets", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **52(6)**: 1506–1511.

[13] F. W. Lawvere, 2005, "An elementary theory of the category of sets", *Reprints in Theory and Applications of Categories,* No. 11, http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/11/tr11abs.html.

[14] W. V. Quine, 1937, "New foundations for mathematical logic", *American Mathematical Monthly*, **44(2)**: 70–80.

[15] E. Reck and G. Schiemer, 2020, "Structuralism in the philosophy of mathematics", in E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Metaphysics Research Lab, Stanford University, https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/structuralism-mathematics/.

[16] S. Shapiro, 1997, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford: Oxford University Press.

[17] G. Takeuti, 1987, *Proof Theory* (2nd Edition), Amsterdam: North-Holland.

[18] W. H. Woodin, 2017, "In search of ultimate-L: The 19th Midrasha mathematical lectures", *The Bulletin of Symbolic Logic*, **23(1)**: 1–109.

[19] R. Yang, 2012, "A pragmatistic view on philosophy of mathematics", *Studies in Logic*, **5(1)**: 68–95.

[20] F. Ye, 2011, *Strict Finitism and the Logic of Mathematical Applications*, Amsterdam: Springer.

[21] E. Zermelo, 1967, "A new proof of the possibility of a well-ordering (1908)", *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, pp. 183–198, Cambridge: Harvard University Press.

[22] 郝兆宽，"论分析性——来自哥德尔的启示"，*哲学研究*，2014 年第 12 期，第 101–106 页。

[23] 郝兆宽、杨跃，"柏拉图主义与集合论终极宇宙"，*逻辑学研究*，2017 年第 4 期，第 87–98 页。

[24] 王浩（著）；邢滔滔、郝兆宽、汪蔚（译），*逻辑之旅：从哥德尔到哲学*，2009 年，杭州：浙江大学出版社。

[25] 杨睿之，"哥德尔在构造主义数学方面的工作"，*逻辑学研究*，2014 年第 3 期，第 12–29 页。

[26] 杨睿之，"集合论多宇宙观述评"，*自然辩证法研究*，2015 年第 9 期，第 99–103 页。

（责任编辑：袁之）

Is Structuralism an Effective Philosophy of Mathematics?

Ruizhi Yang

Abstract

In this article, the author tries to argue that mathematical structuralism is not an effective philosophy of mathematics. Toward this purpose, first, the author proposed a taxonomy of the philosophies of mathematics: effective philosophy of mathematics and mathematics neutral philosophy of mathematics. It is followed by a brief review of main stream philosophy of mathematics in the history and showing that how these are qualified as effective philosophy. Accordingly, the author tried to show empirically that structuralism, however, is not as qualified as these predecessors. Finally, equipped with new results inspired by the study of mathematical pluralism, the author tried to push structuralism into a dilemma: either it is wrong, or mathematical neutral.

Ruizhi Yang School of Philosophy, Fudan University
yangruizhi@fudan.edu.cn