逻辑学研究　2020 年第 2 期，14–28
文章编号：1674-3202(2020)-02-0014-15

基于构造性思想的直觉主义逻辑证明语义

程华清

摘　要：布劳威尔的直觉主义把数学理解为心智的构造性活动，只接受心智可构造的数学对象和数学证明。在直觉主义看来，判定一个命题为真必须要给出这个命题的构造性证明，对逻辑联结词及量词的理解也是基于构造性立场的。本文构建了直觉主义逻辑的证明语义，这是一种内涵语义，其特点是：遵循构造性思想、尽量贴近直观、避免使用集合概念，语义解释从具体命题、具体对象（个体）、具体性质和关系等出发，使具体命题成为"公式解释"和"直观有效"概念的基础。进而在这种语义下证明了直觉主义命题逻辑和谓词逻辑的可靠性。

关键词：直觉主义逻辑；构造性思想；证明语义

中图分类号：B81　　　　**文献标识码**：A

1　直觉主义的构造性思想

20 世纪初，对数学基础的研究导致了直觉主义学派（intuitionistic school）的诞生，其代表人物是布劳威尔（L. E. J. Brouwer）。在布劳威尔看来，数学是一种心智的构造性的活动，数学定理表达的是纯粹经验的事实，数学不能建立在公理化方法基础之上，直觉（直观）就是数学可靠性的基础。直觉主义学派的座右铭是"存在即被构造"，这体现在它只接受心智可构造的数学对象（对于所考虑的数学对象来说，我们能够通过一定的方法能行地得到它们）和心智可构造的数学证明（对于一个数学命题所表达的内容来说，我们能够通过一定的方法能行地验证它）。在心智可构造的要求下，直觉主义学派拒斥实无穷而采纳潜无穷观。比如：在实无穷立场下，全体正整数能够构成一个作为独立对象的集合，它是一个完成了的整体；而在心智可构造的要求下，依赖于原始直觉，先构建正整数 1，再根据布劳威尔所提出的二一原则（two-oneness）（[1]，第 85 页），依次逐个地获得后继的正整数 $2, 3, \ldots$，按照直觉主义的语言，这意味着"创造一个实体，接着再创造一个实体"，由此可构造正整数的无穷序列 $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$，但这种建构过程是没有终止的，因此，正整数的无穷序列不能作为一个完成了的整体来看待。

收稿日期：2020-01-12
作者信息：程华清　　华东师范大学哲学系
Huaqing_Cheng@hotmail.com
致　　谢：本文的完成得益于导师冯棉教授的指导与帮助，在此深表感谢。

在布劳威尔对数学的独特理解下，数学是不依赖于语言的。如果使用语言的话，那么语言就仅仅是记录完成了的数学构造的一种工具，通过语言这个媒介，不同个体可以交流他们所记录的数学构造。正如海廷（A. Heyting）所言："直觉主义数学是一种心智的活动，正因如此，每种语言（包括形式语言）都只是交流的工具。原则上说，由于思想的可能性不能归约为预先设置的有限规则，因此我们不可能创建一个由公式组成的形式系统使之等价于直觉主义数学。"（[3]，第 311 页）逻辑作为在利用语言记录完成了的数学构造时所产生的形式规律，其有效性自然地依赖于数学的心智可构造性，数学便成为了逻辑的基础，而反之不然。

正是对数学的不同理解，使得直觉主义对"真"的理解有别于经典意义上的"真"。在经典意义上，对一个命题来说，它是非真即假的，一个命题的真独立于对它的证明；而在直觉主义看来，我们判定一个命题为真就必须要给出对它的构造性证明，否则就不能判定这个命题为真。直觉主义对基本的逻辑联结词（否定 $\neg$、合取 $\wedge$、析取 $\vee$ 和蕴涵 $\to$）以及全称量词 $\forall$ 和存在量词 $\exists$ 的解释也是基于构造性立场的。接下来，我们遵循直觉主义构造性思想，来构建直觉主义逻辑的证明语义。由于构造性证明是一种基于直观理解的内涵概念，这使得本文所构建的直觉主义逻辑证明语义是一种内涵语义。我们构建证明语义的基本思路是：语义解释从具体命题、具体的可构造对象（个体）、具体的性质和关系等出发，采用对公式 A 作解释 A_{I} 的方式，给出"直观有效"的定义；避免使用集合概念，尽量贴近直观。[1]

2　直觉主义命题逻辑的证明语义

定义 2.1 (原子命题和联结词的证明解释). [2]

① 对于一个原子命题 φ 来说，判定 φ 为真当且仅当给出 φ 的构造性证明。

② 对于一个否定命题 $\neg\varphi$（意为"并非 φ"）来说，判定 $\neg\varphi$ 为真当且仅当从任意假设的对 φ 的构造性证明都将导致谬误 [3]（这意味着 φ 没有构造性证明），这时我们亦称 $\neg\varphi$ 获得了构造性证明。

③ 对于一个合取命题 $\varphi\wedge\psi$（意为"φ 并且 ψ"）来说，判定 $\varphi\wedge\psi$ 为真当且仅当同时给出对 φ 的构造性证明和对 ψ 的构造性证明，这时我们亦称 $\varphi\wedge\psi$

[1] 在直觉主义逻辑中，对逻辑联结词、全称量词和存在量词的标准语义解释以布劳威尔、海廷和柯尔莫哥洛夫（A. N. Kolmogorov）的工作为基础，统称为 BHK 解释。BHK 解释说明了：对于一个数学复合命题（包括全称命题和存在命题）来说，对它的具体构造性证明通过以何种方式从它的直接子命题的具体构造性证明而得到（参见 [4]，第 9 页）。本文构建的证明语义则是在对 BHK 解释弱化后的基础上而建立的，体现在对否定词、蕴涵词、全称量词和存在量词的弱化解释。

[2] 参见 [5]，第 48–49 页，本文做了补充和改动。

[3] 谬误作为初始概念，可以有多种表现形式，比如推出命题"$B\wedge\neg B$"这样的逻辑矛盾或推出如"$0=1$"这样的荒谬句。

获得了构造性证明。

④ 对于一个析取命题 $\varphi \vee \psi$（意为“φ 或者 ψ”）来说，判定 $\varphi \vee \psi$ 为真当且仅当给出对 φ 的构造性证明或给出对 ψ 的构造性证明[4]，这时我们亦称 $\varphi \vee \psi$ 获得了构造性证明。

⑤ 对于一个蕴涵命题 $\varphi \to \psi$（意为“如果 φ，那么 ψ”）来说，判定 $\varphi \to \psi$ 为真当且仅当从任意假设的对 φ 的构造性证明都能够得到对 ψ 的构造性证明，若 φ 是谬误，不能获得构造性证明，亦判定 $\varphi \to \psi$ 为真。这时我们都称 $\varphi \to \psi$ 获得了构造性证明。

依赖于上述证明解释，我们可以进一步构建直觉主义命题逻辑的证明语义。下面，先给出直觉主义命题逻辑的形式语言 $\mathcal{L}$。

形式语言 $\mathcal{L}$ 由以下两个部分构成：

(1) 初始符号：

① 潜无穷个命题变元：$p_1, p_2, \ldots$。

② 否定联结词 $\neg$、合取联结词 $\wedge$、析取联结词 $\vee$ 和蕴涵联结词 $\to$。

③ 左右括号：(、)。

(2) 形成规则（A, B 是任意公式）：

① 任意的命题变元 p_i 是公式。

② 如果 A 是公式，那么 $\neg A$ 是公式。

③ 如果 A, B 是公式，那么 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ 是公式。

对一个公式 A 来说，A 自身，以及作为 A 的组成部分的那些公式都被称为 A 的子公式。

定义 2.2. $\mathcal{L}$ 中的公式 A 的一个解释（记为 A_{I}）由以下方式获得：

① 将 A 中的每一个命题变元都解释为一个具体的（原子）命题，若 A 中含有不同的命题变元，那么不同的命题变元可以解释为不同的或相同的具体命题；

② 对联结词 $\neg$、$\wedge$、$\vee$ 和 $\to$ 作证明解释（见定义 2.1②–⑤）。

对定义 2.2 的说明：①公式 A 的一个解释 A_{I} 是一个确定的具体命题。②若 B 是 A 的子公式并且 A_{I} 是 A 的一个解释，那么在 A_{I} 的解释下，B 也获得了相应的解释（记为 B_{I}），即某一个确定的具体命题。③公式 A 的两个解释是否相同仅取决于对 A 中的每个命题变元所作的解释是否相同。

[4]另一种更强的对析取命题的证明解释是：判定 $\varphi \vee \psi$ 为真当且仅当可指明 φ、ψ 中的哪一个析取支是正确的，并且给出该析取支的构造性证明。（参见 [2]，第 224 页）

定义 2.3. 称一个 $\mathcal{L}$ 中的公式 A 是直观有效的当且仅当对于 A 的任何解释 A_{I}，A_{I} 都被判定为真，即总能给出对 A_{I} 的构造性证明。

定义 2.1 、定义 2.2 和定义 2.3 构成了直觉主义命题逻辑的证明语义。以下给出直觉主义命题逻辑公理系统 *IP*，它建立在形式语言 $\mathcal{L}$ 的基础上，再加上以下两部分构成（[5]，第 60–61 页）：

(1) *IP* 的公理（A, B, C 是任意公式）：

公理 *IP1*：$(A \to (B \to A))$

公理 *IP2*：$((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

公理 *IP3*：$(A \to (B \to (A \wedge B)))$

公理 *IP4*：$((A \wedge B) \to A)$

公理 *IP5*：$((A \wedge B) \to B)$

公理 *IP6*：$(A \to (A \vee B))$

公理 *IP7*：$(B \to (A \vee B))$

公理 *IP8*：$((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$

公理 *IP9*：$((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

公理 *IP10*：$(\neg A \to (A \to B))$

(2) 推理规则（A, B 是任意公式）：

分离规则 *MP*：由 A 和 $(A \to B)$ 可推出 B。

若 A 是 *IP* 的公理，或者是由公理出发运用 *MP* 规则推出的公式，则称 A 是 *IP* 中的一个（内）定理，记为 $\vdash^{IP} A$。

下面的工作是证明直觉主义命题逻辑系统 *IP* 的可靠性，证明由以下引理和定理构成。

引理 2.1. 系统 *IP* 的十条公理都是直观有效的。

公理 *IP1*. $(A \to (B \to A))$

证明. 先给定对公理 *IP1* 的任意的一个解释 $(A \to (B \to A))_{\mathrm{I}}$。假设 α 是对 A_{I} 的任意构造性证明，那么对任意假设的对 B_{I} 的构造性证明 β 来说，总能得到对 A_{I} 的构造性证明（即 α），根据定义 2.1⑤可知，$(B \to A)_{\mathrm{I}}$ 获得了构造性证明，进而获得对 $(A \to (B \to A))_{\mathrm{I}}$ 的构造性证明。再根据定义 2.3 可知，公理 *IP1* 是直观有效的。 □

公理 *IP2*. $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

证明. 先给定对公理 *IP2* 的任意的一个解释 $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))_{\mathrm{I}}$。假设 α 是对 $(A \to (B \to C))_{\mathrm{I}}$ 的任意构造性证明、β 是对 $(A \to B)_{\mathrm{I}}$

的任意构造性证明、γ 是对 A_{I} 的任意构造性证明。根据定义 2.1⑤可知，利用 β，从 γ 能够得到对 B_{I} 的构造性证明（记为 γ^{β}）；利用 α，从 γ 能够得到对 $(B \to C)_{\mathrm{I}}$ 的构造性证明（记为 γ^{α}）；利用 γ^{α}，从 γ^{β} 可以得到对 C_{I} 的构造性证明。于是 $(A \to C)_{\mathrm{I}}$ 获得了构造性证明，进而 $((A \to B) \to (A \to C))_{\mathrm{I}}$ 和 $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))_{\mathrm{I}}$ 也获得了构造性证明。再根据定义 2.3 可知，公理 *IP2* 是直观有效的。 □

公理 *IP3*. $(A \to (B \to (A \wedge B)))$

证明. 先给定对公理 *IP3* 的任意的一个解释 $(A \to (B \to (A \wedge B)))_{\mathrm{I}}$。假设 α 是对 A_{I} 的任意构造性证明，假设 β 是对 B_{I} 的任意构造性证明，根据定义 2.1③，$(A \wedge B)_{\mathrm{I}}$ 便获得了构造性证明。再根据定义 2.1⑤，$(B \to (A \wedge B))_{\mathrm{I}}$ 和 $(A \to (B \to (A \wedge B)))_{\mathrm{I}}$ 也获得了构造性证明。进而根据定义 2.3 可知，公理 *IP3* 是直观有效的。 □

公理 *IP4*. $((A \wedge B) \to A)$ 和**公理 *IP5*.** $((A \wedge B) \to B)$

使用定义 2.1③、定义 2.1⑤和定义 2.3 即证，从略。

公理 *IP6*. $(A \to (A \vee B))$ 和**公理 *IP7*.** $(B \to (A \vee B))$

使用定义 2.1④、定义 2.1⑤和定义 2.3 即证，从略。

公理 *IP8*. $((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$

证明. 先给定对公理 *IP8* 的任意的一个解释 $((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))_{\mathrm{I}}$。假设 α 是对 $(A \to C)_{\mathrm{I}}$ 的任意构造性证明、β 是对 $(B \to C)_{\mathrm{I}}$ 的任意构造性证明、γ 是对 $(A \vee B)_{\mathrm{I}}$ 的任意构造性证明。根据定义 2.1④，或者给出对 A_{I} 的构造性证明（记为 γ^{A}）或者给出对 B_{I} 的构造性证明（记为 γ^{B}）。根据定义 2.1⑤，利用 α，从 γ^{A} 能够得到对 C_{I} 的构造性证明；利用 β，从 γ^{B} 能够得到对 C_{I} 的构造性证明。这样，根据定义 2.1⑤可知，先后可获得 $((A \vee B) \to C)_{\mathrm{I}}$、$((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))_{\mathrm{I}}$ 和 $((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))_{\mathrm{I}}$ 的构造性证明。再根据定义 2.3 可知，公理 *IP8* 是直观有效的。 □

公理 *IP9*. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

证明. 先给定对公理 *IP9* 的任意的一个解释 $((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))_{\mathrm{I}}$。假设 α 是对 A_{I} 的任意构造性证明、β 是对 $(A \to B)_{\mathrm{I}}$ 的任意构造性证明、γ 是对 $(A \to \neg B)_{\mathrm{I}}$ 的任意构造性证明。根据定义 2.1⑤，利用 β，从 α 能够得到对 B_{I} 的构造性证明（记为 α^{β}）；利用 γ，从 α 能够得到对 $(\neg B)_{\mathrm{I}}$ 的构造性证明（记为 α^{γ}）。这样就导致了谬误。进而根据定义 2.1②，$(\neg A)_{\mathrm{I}}$ 获得了构造性证明；由定义 2.1

⑤，先后获得了 $((A \to \neg B) \to \neg A)_{\mathrm{I}}$ 和 $((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))_{\mathrm{I}}$ 的构造性证明。再根据定义 2.3 可知，公理 *IP9* 是直观有效的。 □

公理 *IP10*. $(\neg A \to (A \to B))$

证明. 先给定对公理 *IP10* 的任意的一个解释 $(\neg A \to (A \to B))_{\mathrm{I}}$。假设 α 是对 $(\neg A)_{\mathrm{I}}$ 的任意构造性证明、β 是对 A_{I} 的任意构造性证明。利用 α，从 β 将得到谬误，再根据定义 2.1⑤可知，$(A \to B)_{\mathrm{I}}$ 获得了构造性证明。进而 $(\neg A \to (A \to B))_{\mathrm{I}}$ 获得了构造性证明。再根据定义 2.3 可知，公理 *IP10* 是直观有效的。 □

引理 2.2. A, B 是任意的 $\mathcal{L}$ 的公式，如果 A 和 $(A \to B)$ 都是直观有效的，那么 B 也是直观有效的。

证明. 设 B_{I} 是公式 B 的任意给定的一个解释，将 B_{I} 扩展为公式 $(A \to B)$ 的解释 $(A \to B)_{\mathrm{I}}$，使得 B_{I} 是 $(A \to B)_{\mathrm{I}}$ 解释下获得的相应解释，于是在 $(A \to B)_{\mathrm{I}}$ 解释下可获得公式 A 的解释 A_{I}。已知 A 和 $(A \to B)$ 都是直观有效的，由定义 2.3 可知：A_{I} 和 $(A \to B)_{\mathrm{I}}$ 都被判定为真，再根据定义 2.1⑤可知：B_{I} 被判定为真，所以 B 也是直观有效的。 □

定理 2.3 (系统 *IP* 的可靠性定理)**.** 任给一 $\mathcal{L}$ 的公式 A，如果 $\vdash^{IP} A$，那么 A 是直观有效的。

证明. 根据引理 2.1 和引理 2.2，使用数学归纳法即证。 □

3　直觉主义谓词逻辑的证明语义

先构建直觉主义谓词逻辑的形式语言 $\mathcal{L}^*$。形式语言 $\mathcal{L}^*$ 由以下两部分构成：

(1) 初始符号：

① 潜无穷个个体变元：$x_1, x_2, \ldots$。

② 个体常元：$a_1, a_2, \ldots$ 。个体常元可以没有，也可以是有穷个或潜无穷个，个体常元可以被解释为特定的个体。

③ 谓词符号：$A_{1^1}, A_{1^2}, \ldots$（一元谓词符号）；$A_{2^1}, A_{2^2}, \ldots$（二元谓词符号）；$\ldots$；$A_{n^1}, A_{n^2}, \ldots$（n 元谓词符号）；$\ldots$。谓词符号至少有一个，可以是有穷个或潜无穷个，对于任意的正整数 m, n 来说，A_{m^n} 可以被解释为第 n 个 m 元谓词（一元谓词可以被解释为个体的性质，m 元谓词（$m \geq 2$）可以被解释为 m 个个体之间的关系）。

④ 否定联结词 $\neg$、合取联结词 $\wedge$、析取联结词 $\vee$、蕴涵联结词 $\to$、全称量词 $\forall$ 和存在量词 $\exists$。

⑤ 左右括号：(、)。

个体变元和个体常元被统称为“项”。用 $t, t_1, t_2, \ldots$ 表示任意的项。

(2) 形成规则（A, B 是任意公式）：

① 对于任意的 m 元谓词符号 A_{m^n} 和任意的项 $t_1, t_2, \ldots, t_m$，$A_{m^n}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ 是公式（被称为原子公式）。

② 如果 A 是公式，那么 $\neg A$ 是公式。

③ 如果 A, B 是公式，那么 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ 都是公式。

④ 如果 A 是公式，那么 $\forall x_i A$ 和 $\exists x_i A$（i 是任意正整数）都是公式。

接下来，我们给出一些关于 $\mathcal{L}^*$ 的语型定义（[5]，第 106–107 页、第 162 页）：

① 对于任一公式 A 来说，如果 A 中有子公式 $\forall x_i B$ 出现，那么称 B 是这个 $\forall x_i$ 的辖域；如果 A 中有子公式 $\exists x_i C$ 出现，那么称 C 是这个 $\exists x_i$ 的辖域。

② 对于任一有个体变元出现的公式 A 来说，如果其中一个体变元 x_i（i 是某个正整数）出现在 $\forall x_i$ 或 $\exists x_i$ 中，或者出现在 $\forall x_i$ 或 $\exists x_i$ 的辖域中，那么称 x_i 的这一次出现为约束的；否则，称 x_i 的这一次出现是自由的。如果 x_i 在 A 中至少有一次自由出现，那么称 x_i 是 A 中的自由变元。有自由变元的公式被称为开公式；没有自由变元的公式被称为闭公式。

对于公式 A 来说，无论个体变元 $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$（$i1, i2, \ldots, in$ 是 n 个正整数）是否在 A 中出现，都可以将 A 记为 $A(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$。

③ 对于公式 $A(x_i)$ 来说，用 $A(t)$ 表示：用项 t 替换 $A(x_i)$ 中 x_i 的每一次自由出现而获得的公式；如果 x_i 不是 A 中的自由变元，那么 $A(t)$ 就是 $A(x_i)$。

④ 若项 t 和个体变元 x_i 满足下列条件之一，就称项 t 对于公式 A 中的 x_i 是自由的：

1. x_i 在 A 中不出现或 x_i 在 A 中仅有约束出现；
2. x_i 在 A 中有自由出现，并且项 t 是个体常元；
3. x_i 中有自由出现，项 t 是某一个体变元 x_j，并且每当 x_i 在 A 中自由出现时，x_i 都不在 $\forall x_j$ 或 $\exists x_j$ 的辖域内。

以下，为了普遍性，我们把形式语言 $\mathcal{L}^*$ 的初始符号中的个体常元和谓词符号都选取为潜无穷个，在此基础上，我们建立直觉主义谓词逻辑的证明语义。[5]

定义 3.1. $\mathcal{L}^*$ 中的公式 A 的一个解释 A_{I} 由以下七个部分构成：

[5]采用定义 3.1 至定义 3.5 以及引理 3.1、引理 3.2 的方式来构建直觉主义谓词逻辑证明语义的思想，是冯棉教授提出的。

① 先确定一个论域（对象域），含有有限个对象（不能没有对象）或潜无穷个对象。论域是个体变元和个体常元的取值范围。

② 将 A 中的每一个个体变元都解释为论域中的任意的对象。

③ 对 A 中的每一个个体常元指定论域中的某一个对象（不同的个体常元可以指定论域中不同或相同的对象）。

④ 将 A 中的每一个一元谓词符号都解释为论域中对象的某种性质（不同的一元谓词可以解释为不同或相同的性质）。

⑤ 将 A 中每一个 $n(n \geq 2)$ 元谓词符号都解释为论域中 n 个对象之间的某种 n 元关系（不同的 n 元谓词符号可以解释为不同或相同的 n 元关系）。

⑥ 联结词 $\neg$ 意为"并非"、$\wedge$ 意为"并且"、$\vee$ 意为"或者"、$\rightarrow$ 意为"如果……，那么……"。

⑦ $\forall x_i$ 意为"对论域中的任意一个对象（都有……）"；$\exists x_i$ 意为"论域中至少有一个对象（有……）"。

对定义 3.1 的说明：①若 A 是一个闭公式，那么 A_{I} 是一个具体命题；若 A 不是闭公式，那么 A_{I} 不是一个具体的命题。②若 B 是 A 的子公式，那么由 A_{I} 可获得 B 的相应解释 B_{I}。

定义 3.2. A 是 $\mathcal{L}^*$ 的公式，A_{I} 是对 A 的一个解释，A 中共有 m 个（$m \geq 0$）不同的自由个体变元 $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}$，对它们分别指定 A_{I} 论域中的对象 $c_1, c_2, \ldots, c_m$（这些对象可以相同也可以不同），则称其为"A_{I} 解释下全部自由变元的一个赋值"，记为 $A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$。

对定义 3.2 的说明：$A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 是具体命题，若 A 中没有自由变元（即 $m = 0$），那么 $A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 就是 A_{I}。

定义 3.3. A 是 $\mathcal{L}^*$ 的公式，A_{I} 是 A 的一个解释，令 $\varphi' = A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$（$m \geq 0$）是"$A_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值"，它是一个具体命题，以下是"φ' 被判定为真"的递归定义：

① 若 A 是原子公式，则 φ' 是原子命题，φ' 被判定为真当且仅当给出 φ' 的构造性证明。（形式同定义 2.1①）

② 若 A 是 $\neg B$，则 φ' 是否定命题 $\neg\varphi$，同定义 2.1②。

③ 若 A 是 $(B \wedge C)$，则 φ' 是合取命题 $\varphi \wedge \psi$，同定义 2.1③。

④ 若 A 是 $(B \vee C)$，则 φ' 是析取命题 $\varphi \vee \psi$，同定义 2.1④。

⑤ 若 A 是 $(B \rightarrow C)$，则 φ' 是蕴涵命题 $\varphi \rightarrow \psi$，同定义 2.1⑤。

⑥ 若 A 是 $\forall x_i B$，则 φ' 是全称命题 $\forall x_i \varphi$，有两种情况：

(i) B 中没有 x_i 的自由出现，则 A 与 B 有同样的自由个体变元，这时 $\varphi = B_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$（它是“$B_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”），则 φ' 被判定为真当且仅当 φ 被判定为真，这时亦称 φ' 获得了构造性证明。

(ii) B 中有 x_i 的自由出现，则 φ' 被判定为真当且仅当对 A_{I} 论域中的任何一个对象 c，都可以找到 $B_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m, c)$（它是“$B_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”，其中 x_i 指定对象 c）的构造性证明，这时我们亦称 φ' 获得了构造性证明。

⑦ 若 A 是 $\exists x_i B$，则 φ' 是存在命题 $\exists x_i \varphi$，有两种情况：

(i) B 中没有 x_i 的自由出现，表述方式同⑥(i)。

(ii) B 中有 x_i 的自由出现，则 φ' 被判定为真当且仅当能够找到 A_{I} 论域中的某一对象 c，并给出 $B_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m, c)$（它是“$B_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”，其中 x_i 指定对象 c）的构造性证明，这时亦称 φ' 获得了构造性证明。

定义 3.4. A 是 $\mathcal{L}^*$ 的任意公式，A_{I} 是对 A 的一个解释，则 A_{I} 被判定为真当且仅当对于任意一个“A_{I} 解释下全部自由变元的赋值”$A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$（$m \geq 0$），都可以获得对 $A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 的构造性证明，这时我们亦称 A_{I} 获得了构造性证明。

由定义 3.3 和定义 3.4 立即获得以下的引理 3.1，它也可以视为“A_{I} 被判定为真”的递归定义：

引理 3.1. A 是 $\mathcal{L}^*$ 的公式，A_{I} 是对 A 的一个解释，则有：

① 如果 A 是原子公式 $A_{r^n}(t_1, t_2, \ldots, t_r)$，则 A_{I} 被判定为真当且仅当对于任意一个“A_{I} 解释下全部自由变元的赋值”$A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$（$m \leq r$），都可获得对 $A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 的构造性证明。

② 如果 A 是公式 $\neg B$，那么 A_{I} 被判定为真当且仅当对于任意一个“A_{I} 解释下全部自由变元的赋值”$A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m) = \neg B_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$，其中 $B_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 是“B_{I} 解释下全部自由变元的赋值”，从任意假设的对 $B_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 的构造性证明都将导致谬误。

③ 如果 A 是公式 $(B \wedge C)$，那么 A_{I} 被判定为真当且仅当对于任意一个“A_{I} 解释下全部自由变元的赋值”$A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m) = (B_{\mathrm{I}}(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ik}) \wedge C_{\mathrm{I}}(c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{js}))$，其中 $B_{\mathrm{I}}(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ik})$ 是相应的“B_{I} 解释下全部自由变元的赋值”，$C_{\mathrm{I}}(c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{js})$ 是相应的“C_{I} 解释下全部自由变元的赋值”，能同时给出对 $(B_{\mathrm{I}}(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ik})$ 的构造性证明和对 $C_{\mathrm{I}}(c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{js})$ 的构造性证明。

④ 公式 A 是 $(B \vee C)$，那么 A_{I} 被判定为真当且仅当对于任意一个“A_{I} 解释下全部自由变元的赋值”$A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m) = (B_{\mathrm{I}}(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ik}) \vee C_{\mathrm{I}}(c_{j1},$

$c_{j2},\ldots,c_{js}))$，其中 $B_{\mathrm{I}}(c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{ik})$ 是相应的“B_{I} 解释下全部自由变元的赋值”，$C_{\mathrm{I}}(c_{j1},c_{j2},\ldots,c_{js})$ 是相应的“C_{I} 解释下全部自由变元的赋值”，能给出对 $(B_{\mathrm{I}}(c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{ik})$ 的构造性证明或者给出对 $C_{\mathrm{I}}(c_{j1},c_{j2},\ldots,c_{js})$ 的构造性证明。

⑤ 如果 A 是公式 $(B\to C)$，那么 A_{I} 被判定为真当且仅当对于任意一个“A_{I} 解释下全部自由变元的赋值”$A_{\mathrm{I}}(c_1,c_2,\ldots,c_m)=(B_{\mathrm{I}}(c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{ik})\to C_{\mathrm{I}}(c_{j1},c_{j2},\ldots,c_{js}))$，其中 $B_{\mathrm{I}}(c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{ik})$ 是相应的“B_{I} 解释下全部自由变元的赋值”,$C_{\mathrm{I}}(c_{j1},c_{j2},\ldots,c_{js})$ 是相应的“C_{I} 解释下全部自由变元的赋值”,从任意假设的对 $B_{\mathrm{I}}(c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{ik})$ 的构造性证明都能够得到 $C_{\mathrm{I}}(c_{j1},c_{j2},\ldots,c_{js})$ 的构造性证明；如果任何 $B_{\mathrm{I}}(c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{ik})$ 都是谬误，不能获得构造性证明，亦判定 A_{I} 为真。

⑥ 如果公式 A 是 $\forall x_iB$，有两种情况：

(i) B 中没有 x_i 的自由出现，则 A_{I} 被判定为真当且仅当对于任意一个“A_{I} 解释下全部自由变元的赋值”$A_{\mathrm{I}}(c_1,c_2,\ldots,c_m)$,都可以获得对 $B_{\mathrm{I}}(c_1,c_2,\ldots,c_m)$（它是“$B_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”）的构造性证明。

(ii) B 中有 x_i 的自由出现，则 A_{I} 被判定为真当且仅当对于任意一个“A_{I} 解释下全部自由变元的赋值”$A_{\mathrm{I}}(c_1,c_2,\ldots,c_m)$，对 A_{I} 论域中的任何一个对象 c，都可以找到 $B_{\mathrm{I}}(c_1,c_2,\ldots,c_m,c)$（它是“$B_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”，其中 x_i 指定对象 c）的构造性证明。

⑦ 如果 A 是公式 $\exists x_iB$，有两种情况：

(i) B 中没有 x_i 的自由出现，表述方式同⑥(i)。

(ii) B 中有 x_i 的自由出现，则 A_{I} 被判定为真当且仅当对于任意一个“A_{I} 解释下全部自由变元的赋值”$A_{\mathrm{I}}(c_1,c_2,\ldots,c_m)$，都能够找到 A_{I} 论域中的某一对象 c，并给出 $B_{\mathrm{I}}(c_1,c_2,\ldots,c_m,c)$（它是“$B_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”，其中 x_i 指定对象 c）的构造性证明。

定义 3.5. 称 $\mathcal{L}^*$ 的一个公式 A 是直观有效的当且仅当对 A 的任何解释 A_{I}，A_{I} 都被判定为真，即总能给出对 A_{I} 的构造性证明。

由定义 3.4 和定义 3.5 立即获得以下的引理 3.2：

引理 3.2. $\mathcal{L}^*$ 的一个公式 A 是直观有效的当且仅当对 A 的任何解释 A_{I} 的任意一个“A_{I} 解释下全部自由变元的赋值”$A_{\mathrm{I}}(c_1,c_2,\ldots,c_m)$（$m\geq 0$），都可以获得对 $A_{\mathrm{I}}(c_1,c_2,\ldots,c_m)$ 的构造性证明。

定义 3.1 至定义 3.5 和引理 3.1、引理 3.2 构成了直觉主义谓词逻辑的证明语义，以下给出直觉主义谓词逻辑公理系统 *IQ*，它建立在形式语言 $\mathcal{L}^*$ 的基础上，再

加上以下两部分构成：[6]

(1) *IQ* 的公理：首先，把 *IP1* 到 *IP10* 中形式语言 L 的任意公式 A、B、C 解释成形式语言 $\mathcal{L}^*$ 的任意公式，所得到的十条公理 *IQ1* 到 *IQ10* 即为 *IQ* 的前十条公理。除此之外，增加如下涉及量词的公理（A, B 是任意公式，i 是任一正整数）：
公理 *IQ11*：$(\forall x_i(A \to B) \to (\forall x_i A \to \forall x_i B))$
公理 *IQ12*：$(\forall x_i(A \to B) \to (\exists x_i A \to \exists x_i B))$
公理 *IQ13*：$(A \to \forall x_i A)$，其中个体变元 x_i 在 A 中不自由出现
公理 *IQ14*：$(\exists x_i A \to A)$，其中个体变元 x_i 在 A 中不自由出现
公理 *IQ15*：$(\forall x_i A(x_i) \to A(t))$，其中项 t 对于 A 中的个体变元 x_i 是自由的，$A(t)$ 是用 t 替换 $A(x_i)$ 中 x_i 的每一次自由出现而获得的公式。
公理 *IQ16*：$(A(t) \to \exists x_i A(x_i))$，其中项 t 对于 A 中的个体变元 x_i 是自由的，$A(t)$ 是用 t 替换 $A(x_i)$ 中 x_i 的每一次自由出现而获得的公式。

(2) 推理规则（A, B 是任意公式，i 是任意正整数）：
分离规则 *MP*：由 A 和 $(A \to B)$ 可推出 B。
概括规则 *Gen*：从 A 可推出 $\forall x_i A$。

若 A 是 *IQ* 的公理，或者是由公理出发运用 *MP* 规则或 *Gen* 规则推出的公式，则称 A 是 *IQ* 中的一个（内）定理，记为 $\vdash^{IQ} A_n$。

下面的工作是证明直觉主义谓词逻辑系统 *IQ* 的可靠性，证明由以下引理和定理构成。

引理 3.3. *系统 IQ 的 16 条公理都是直观有效的。*

首先，*IQ1* 到 *IQ10* 的证明方法参照引理 2.1，并使用定义 3.3 至定义 3.5 或引理 3.1、引理 3.2，从略，这里仅给出对 *IQ11* 到 *IQ16* 的证明。

公理 *IQ11*. $(\forall x_i(A \to B) \to (\forall x_i A \to \forall x_i B))$

证明. 给定对公理 *IQ11* 的任意的一个解释 $(\forall x_i(A \to B) \to (\forall x_i A \to \forall x_i B))_{\mathrm{I}}$，再给定任意一个“$(\forall x_i(A \to B) \to (\forall x_i A \to \forall x_i B))_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的赋值”$(\forall x_i(A \to B) \to (\forall x_i A \to \forall x_i B))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m) = (\varphi \to (\psi \to \eta))$，其中 $\varphi = (\forall x_i(A \to B))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 是相应的“$(\forall x_i(A \to B))_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的赋值”，$\psi = ((\forall x_i A)_{\mathrm{I}}(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ik})$ 是相应的“$(\forall x_i A)_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的赋值”，$\eta = (\forall x_i B)_{\mathrm{I}}(c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{js}))$ 是相应的“$(\forall x_i B)_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的赋值”。假设 α 和 β 分别是 φ 和 ψ 的构造性证明，以下证 η 可获得构造性证明。分两种情况讨论：

[6][5]，第 169–170 页，表述有所改动。

(1) $(A \to B)$ 中没有 x_i 的自由出现（这时 A 和 B 中也没有 x_i 的自由出现），根据定义 3.3⑥(i)，利用 α 和 β 能够分别得到 $\theta = (A \to B)_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$（它是“$(A \to B)_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”）和 $\delta = A_{\mathrm{I}}(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ik})$（它是“$A_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”）的构造性证明，而 $\theta = (\delta \to \lambda)$，其中 $\lambda = B_{\mathrm{I}}(c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{js})$（它是“$B_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”），再根据定义 3.3⑤，能够获得 λ 的构造性证明，进而根据定义 3.3⑥(i)，η 获得了构造性证明。

(2) $(A \to B)$ 中有 x_i 的自由出现，根据定义 3.3⑥(ii)，对论域中的任一对象 c，利用 α 能够得到 $\theta = (A \to B)_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m, c)$（它是“$(A \to B)_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”，其中 x_i 指定对象 c）的构造性证明，又有两种可能性：

(i) 当 A 中有 x_i 的自由出现时，利用 β 能够得到 $\delta = A_{\mathrm{I}}(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ik}, c)$（它是“$A_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”，其中 x_i 指定对象 c）的构造性证明，而 $\theta = (\delta \to \lambda)$，其中 $\lambda = B_{\mathrm{I}}(c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{js})$（若 B 中没有 x_i 的自由出现）或 $\lambda = B_{\mathrm{I}}(c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{js}, c)$（它是“$B_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值”，其中 x_i 指定对象 c，而 B 中有 x_i 的自由出现），再根据定义 3.3⑤，能够获得 λ 的构造性证明，进而根据定义 3.3⑥，η 获得了构造性证明。

(ii) 当 A 中没有 x_i 的自由出现时，利用 β 能够得到 $\delta = A_{\mathrm{I}}(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ik})$ 的构造性证明，而 $\theta = (\delta \to \lambda)$，其中 $\lambda = B_{\mathrm{I}}(c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{js}, c)$，再根据定义 3.3⑤，能够获得 λ 的构造性证明，进而根据定义 3.3⑥(ii)，η 获得了构造性证明。

最后，利用 α 和 β，从 (1)(2) 出发，根据定义 3.3⑤可知 $(\varphi \to (\psi \to \eta))$ 获得了构造性证明，再由引理 3.2 推知公理 *IQ11* 是直观有效的。 □

公理 *IQ12*. $(\forall x_i(A \to B) \to (\exists x_i A \to \exists x_i B))$

参照公理 *IQ11* 的证明方法，并使用定义 3.3⑤、定义 3.3⑦和引理 3.2，从略。

公理 *IQ13*. $(A \to \forall x_i A)$，其中个体变元 x_i 在 A 中不自由出现。

证明. 给定对公理 *IQ13* 任意的一个解释 $(A \to \forall x_i A)_{\mathrm{I}}$，再给定任意一个“$(A \to \forall x_i A)_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的赋值”$(A \to \forall x_i A)_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m) = (\varphi \to \psi)$，其中 $\varphi = A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 是相应的“A_{I} 解释下全部自由变元的赋值”，$\psi = (\forall x_i A)_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 是相应的“$(\forall x_i A)_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的赋值”。假设 α 是 φ 的任意构造性证明，根据定义 3.3⑥(i)，ψ 获得了构造性证明，再根据定义 3.3⑤，$(\varphi \to \psi)$ 获得了构造性证明，进而根据引理 3.2，公理 *IQ13* 是直观有效的。 □

公理 *IQ14*. $(\exists x_i A \to A)$，其中个体变元 x_i 在 A 中不自由出现。

参照公理 *IQ13* 的证明方法，并使用定义 3.3⑤、定义 3.3⑦(i) 和引理 3.2，从略。

公理 *IQ15*. $(\forall x_i A(x_i) \to A(t))$，其中项 t 对于 A 中的个体变元 x_i 是自由的。

证明. 给定对公理 *IQ15* 任意的一个解释 $(\forall x_i A(x_i) \to A(t))_{\mathrm{I}}$，再给定任意一个"$(\forall x_i A(x_i) \to A(t))_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的赋值" $(\forall x_i A(x_i) \to A(t))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m) = (\varphi \to \psi)$。假设 α 是 φ 的构造性证明，以下证 ψ 可获得构造性证明，分三种情况讨论：

(1) x_i 不在 A 中自由出现，$A(t)$ 是 $A(x_i)$（即 A）。这时 $\varphi = (\forall x_i A)_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 是相应的"$(\forall x_i A(x_i))_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的赋值"，$\psi = A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 是相应的"$A(t)_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的赋值"。从 α 出发，根据定义 3.3⑥(i)，ψ 获得了构造性证明。

(2) x_i 在 A 中有自由出现并且 t 是某一个体常元 a_s，$A(t)$ 是 $A(a_s)$。这时 $\varphi = (\forall x_i A(x_i))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m), \psi = (A(a_s))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$，设 $(\forall x_i A(x_i) \to A(t))_{\mathrm{I}}$ 解释下对 a_s 指定的论域中的对象是 c，根据定义 3.3⑥(ii)，通过 α 能够得到 $(A(x_i))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m, c)$（它是"$(A(x_i))_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值"，其中 x_i 指定对象 c）的构造性证明，而 $(A(x_i))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m, c) = \psi$，于是 ψ 获得了构造性证明。

(3) x_i 在 A 中有自由出现，t 是某一个体变元 x_j，并且每当 x_i 在 A 中自由出现时，x_i 都不在 $\forall x_j$ 或 $\exists x_j$ 的辖域内，$A(t)$ 是 $A(x_j)$。设 $(\forall x_i A(x_i) \to A(t))_{\mathrm{I}}$ 解释下对 x_j 指定的论域中的对象是 c_i（它是 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ 中的某一个对象），这时 $\varphi = (\forall x_i A(x_i))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_m)$（若 $\forall x_i A(x_i)$ 中没有 x_j 的自由出现）或 $\varphi = (\forall x_i A(x_i))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$（其中 x_j 指定对象 c_i，而 $\forall x_i A(x_i)$ 中有 x_j 的自由出现），$\psi = (A(x_j))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$（它是"$(A(x_j))_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的赋值"，其中 x_j 指定对象 c_i），根据定义 3.3⑥(ii)，通过 α 能够得到 $(A(x_i))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$（它是"$(A(x_i))_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值"，其中 x_i 指定对象 c_i）的构造性证明，而 $(A(x_i))_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m) = \psi$，于是 ψ 获得了构造性证明。

最后，利用 α, 从 (1)(2)(3) 出发，根据定义 3.3⑤可知 $(\varphi \to \psi)$ 获得了构造性证明，再由引理 3.2 推知公理 *IQ15* 是直观有效的。 □

公理 *IQ16*. $(A(t) \to \exists x_i A(x_i))$，其中项 t 对于 A 中的个体变元 x_i 是自由的。

参照公理 *IQ15* 的证明方法，并使用定义 3.3⑤、定义 3.3⑦和引理 3.2，从略。

引理 3.4. A，B 是任意的 $\mathcal{L}^*$ 的公式，如果 A 和 $(A \to B)$ 都是直观有效的，那么 B 也是直观有效的。

证明方法参照引理 2.2，并使用定义 3.3 至定义 3.5 或引理 3.1、引理 3.2，从略。

引理 3.5. A 是 $\mathcal{L}^*$ 中任意公式，若 A 是直观有效的，则 $\forall x_i A$ 也是直观有效的。

证明. 给定 $\forall x_i A$ 的任意一个解释 $(\forall x_i A)_{\mathrm{I}}$，再给定任意一个"$(\forall x_i A)_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的赋值" $(\forall x_i A)_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m) = \varphi$。分两种情况讨论：

(1) 当 x_i 在 A 中没有自由出现时，$\psi = A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 是相应的"A_{I} 解释下全部自由变元的赋值"，已知 A 是直观有效的，由引理 3.2 知 ψ 可获得构造性证明，再由定义 3.3⑥(i)，φ 可获得构造性证明，进而由引理 3.2 知 $\forall x_i A$ 是直观有效的。

(2) 当 x_i 是 A 中的自由变元时，设 c 是 A_{I} 论域中的任意一个对象，已知 A 是直观有效的，由引理 3.2 知 $A_{\mathrm{I}}(c_1, c_2, \ldots, c_m, c)$（它是"$A_{\mathrm{I}}$ 解释下全部自由变元的一个赋值"，其中 x_i 指定对象 c）都能够获得构造性证明，再根据引理 3.1⑥(ii)，φ 可获得构造性证明，进而根据引理 3.2 知 $\forall x_i A$ 是直观有效的。

□

定理 3.6 (系统 *IQ* 的可靠性定理). 任给一 $\mathcal{L}^*$ 的 A，如果 $\vdash^{IQ} A$，那么 A 是直观有效的。

证明. 根据引理 3.3、引理 3.4 和引理 3.5，使用数学归纳法即证。 □

参考文献

[1] L. E. J. Brouwer, 1913, "Intuitionism and formalism", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **20(2)**: 81–96.

[2] L. Goble (ed.), 2001, *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Oxford: Blackwell Publishers.

[3] A. Heyting, 1998, "The formal rules of intuitionistic logic", in P. Mancosu (ed.), *From Brouwer to Hilbert—The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, pp. 311–327, Oxford: Oxford University Press.

[4] A. S. Troelstra and D. van Dalen, 1988, *Constructivism in Mathematics—An Introduction*, **vol. 1**, Amsterdam: Elsevier Science Publishers.

[5] 冯棉，经典逻辑与直觉主义逻辑，1989 年，上海：上海人民出版社。

（责任编辑：袁之）

Proof Semantics Based on Mental Construction for Intuitionistic Logic

Huaqing Cheng

Abstract

In Brouwer's intuitionism, he regards mathematics as activities of mental construction. In his opinion, one only admits mathematical objects and proofs which can be constructed in our mind. From an intuitionistic point of view, when we assert that a proposition is true, we have to offer a constructive proof for this proposition. Therefore, the meaning of basic propositional connectives and quantifiers is based on construction. This paper builds proof semantics for intuitionistic logic. The proof semantics are a kind of intentional semantics. The features of the proof semantics include following constructivism, trying to preserve our intuitions, avoiding using the conception of sets to construct our semantics. In proof semantics we give semantical interpretations on the basis of concrete propositions, concrete objects (individuals) and concrete properties and relations and so on. Furthermore, the conceptions of "interpretations for formulas" and "intuitive validity" are defined based on concrete propositions. We give proofs for soundness theorems of intuitionistic propositional and predicate logics based on our semantics.

Huaqing Cheng Department of Philosophy, East China Normal University
Huaqing_Cheng@hotmail.com