

实在论视角下的大基数

寇亮

摘 要: 为集合论寻找新公理并为其提供辩护是集合论哲学的重要课题, 大基数公理是新公理的备选项之一。目前对大基数的辩护主要分为两种: 外在辩护和内在辩护。外在辩护从丰富性和实用性角度出发为大基数做辩护, 但它对大基数辩护的成效不足以令实在论者满意。接受高阶无穷的实在论者希望基于集合概念的本质为大基数做更充分的辩护, 即为大基数做内在辩护。本文从一种实在论的逻辑观出发, 讨论接受高阶无穷的实在论者为大基数做内在辩护的原因, 并尝试说明实在论视角下为大基数辩护的具体可能性。

关键词: 大基数; 内在辩护; 反映原理

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 引言

大基数¹是当代集合论研究中的一个重要领域。对大基数的研究开始于豪斯道夫 (F. Hausdorff) 对正则的极限基数的研究, 他发现这样的基数必须满足 $\kappa = \aleph_\kappa$, 因此是直观上相当“大”的基数; 又因为“ZFC+ 存在这样的基数”能证明 ZFC 一致, 故而其一致性强度比 ZFC 更强。²随着大基数理论的发展, 大基数根据一致性强度形成了一个含有一定秩序的谱系, 一些有较强一致性强度但并不断言特定基数存在的命题也被统称为大基数。³

为集合论寻找 ZFC 之外的新公理并为其辩护是哥德尔纲领的一部分, 而大基数恰好是哥德尔纲领在现代集合论中的重点考虑对象, 故而有时大基数也被称为大基数公理。哥德尔 (K. Gödel) 在其《什么是康托尔的连续统问题》一文中最早同时引入了内在辩护和外在辩护。公理能够获得外在辩护, 如果其具有数学上的成功性, 其中成功性指: “其成果的丰富性, 特别是‘能证实的’成果 (的丰富性),

收稿日期: 2023-03-01

作者信息: 寇亮 复旦大学哲学学院科学哲学与逻辑学系
lkou20@fudan.edu.cn

致 谢: 感谢匿名审稿人对本文提出的建议, 这些建议帮助极大。

¹一个序数 κ 是基数当且仅当 $|\kappa| = \kappa$ 。

²大基数有时并不指其为很“大”的一个基数, 而单指它的一致性强度很强, 例如 $0^\sharp$ 。我们说大基数 A 比 B 强, 若在 ZFC+A 中能证明 ZFC+B 一致。

³例如, 莱因哈特基数 (Reinhardt cardinals)。

即,不使用新公理能证的那些成果,却在新公理的帮助下能异常简洁且容易发现,还能把许多不同的证明压缩成一个”。([9],第521页)

与外在辩护对应的是同时引入的内在辩护。哥德尔认为,有一些公理是内在必要的(*intrinsically necessary*),我们要引入的新公理可以“仅仅展开了……集合概念的内容”([9],第518页)就得到辩护。更具体一点,哥德尔指出,我们应该寻找那些“断言‘……的集合’运算的更远迭代存在的新公理”,集合就是“那些从整数(或其它良定义的对象)通过迭代应用‘……的集合’运算得到的东西”。更具体地,哥德尔在未发表的《数学基础的现状》中指出,“假设集合的公理系统(ZF)达到了终点……是错误的。因为,在系统中所有出现的类可以被看作一个新的对象的域,且被用来作为一个新的起点,来创造出更高的类型(*type*)”。([8],第46-48页)

考尔纳(P.Koellner)在其《集合论基础——寻找新公理》中总结道,“简单地讲,对新公理的基于集合迭代观念的内在辩护指表明新公理只是展现了集合这个观念的内涵。相反,对集合的外在辩护则着眼于别的特征,诸如丰富成果或与其它公理的结构关系。”麦蒂(P.Maddy)在其《为公理辩护》中,将内在辩护总结为自明的、直观的,是“集合这个概念”的一部分,而外在辩护是有效的(*effective*),丰富的(*fruitful*)和富有成果的(*productive*)。

根据上文提到的哥德尔本人的陈述与考尔纳、麦蒂对内在辩护的粗略概括,不难发现,粗略地讲,所谓内在辩护,是基于集合这个概念本质的辩护;而外在辩护是基于数学结果丰富性的辩护,是一种出于当下数学实践实用性的辩护。这两种都是为潜在新公理的辩护。

至此,足以引出第一个问题:数学需要ZFC之外的新公理吗?为什么我们要寻找新公理?如果数学不需要ZFC之外的新公理,那么显然所有目前所有已知的独立性命题都已经处于“被解决了”的状态:答案就是,ZFC既不能证明它,也不能证否它。而若持有这样的观点,又难以回答为什么将ZFC作为数学证明的出发点,而不将PA作为出发点。若仅将随意选择的一族语句作为公理,记录下它们的逻辑后承,那么,为什么不将所有的符号串都记录下来(将一族矛盾的语句作为公理)?事实上,ZFC为何是不同于其它符号串的公理,即“数学是否需要一个标准的公理系统作为基础”也是一个难题。

另一个问题是:若外在辩护和内在辩护是某些集合论学家相信大基数一致性、甚至相信它存在⁴的理由,那么似乎内在辩护并非对任意哲学观有着相同的说服力。因为,“内在辩护”的提法似乎对非实在论者而言是荒谬的:由于集合宇宙并不是客观存在的,因此我们甚至不知道如何讨论集合概念的本质。

上面由大基数公理的辩护所引出的两个问题,本质上都与如何理解公理有关,

⁴如前文所述,有些大基数断言某个集合存在,而有些大基数仅仅是一个一致性强度较强的断言。

因而是与数学和哲学均密切相关的问题。本文试图从一种特别的实在论视角回答上述两个问题。第一个问题,需要阐释这种实在论视角下如何看待集合论研究的本质;第二个问题,需要阐释这种实在论视角下如何看待大基数内在辩护的可行性。

2 数学中的实在论与反实在论

传统上,经典的数学哲学依据不同的哲学主张被分为逻辑主义、形式主义、直觉主义,一言以蔽之,它们主要讨论以什么样的方法来处理元数学问题。⁵因此,它们主要聚焦于数学基础问题。20世纪50年代左右,伴随着公理化集合论的发展和数学危机的解除,数学家们逐步开始远离数学基础的讨论。由此,传统的哲学问题逐步在数学哲学讨论中崭露头角。比如,传统哲学中最经久不衰的关于存在的讨论在数学哲学中再次复兴。([20],第13页)即,对数学而言,真正存在的只有具体的殊相,还是共相也是独立于人意识的存在?这大约对应着数学哲学的存在论问题:数学对象是什么?它们是独立于人心之外的存在吗?由这个问题又引发了知识论的讨论,即数学知识是如何获得的?

一些哲学家坚持数学对象是人心之外独立存在的抽象对象。显然,数学对象不与任何殊相对应,因此这大约对应着承认共相存在。这种观点被称为数学实在论或数学柏拉图主义。另一些哲学家则认为,数学对象并不是这些抽象对象,这样的观点被称为反实在论或反柏拉图主义。在巴拉古尔(M. Balaguer)的著作《数学中的实在论与反实在论》中,他这样刻画实在论与反实在论:([2],第5页)

1. 数学中的实在论指:

- (a) 存在诸如数这样非时空的、独立于我们的数学对象;
- (b) 数学理论是在描述这样的对象。

2. 数学中的反实在论指:

- (a) 不存在抽象对象;
- (b) 数学理论需要其它解释。

但是,实在论与反实在论对概括当代数学哲学中的不同观点仍显不足。例如,林内波(Ø. Linnebo)在[14]中将柏拉图主义划分出对象实在论和真值实在论;麦蒂(P. Maddy)甚至曾将“柏拉图主义”一词用于描述将数学还原为物理对象的物理主义。([15])柏拉图主义内,对数学对象的辩护也截然不同。比如,蒯因(W. V. Quine)和普特南(H. Putnam)提出的不可或缺论证被视为对实在论的一大支持,这也意味着这种实在论事实上只接受所谓对科学有用的数学对象。反实在论

⁵典型的元数学问题包括:数学合理性来源的问题、算术的一致性问题、一个数学系统的完全性问题等等。

所指涉的内容则更加广泛：它涵盖了从自然主义到物理主义等等不同层次的哲学观点。

在 [26] 以及 [33] 中，王浩曾采纳哥德尔的建议，以所接纳数学对象由弱到强的线性关系分析各个数学哲学的学派：

……在这个大跳跃⁶后，一些熟知的问题，如潜无穷与实无穷、构造与描述、直谓与非直谓定义、可数与不可数集合、强无穷性公理等等，才以现在的形式出现……

一旦……承认了无穷多的数，我们就立即面临着希尔伯特的有穷主义、布劳威尔的直觉主义和古典数论之间争论的根本内容。下一步的扩张是……考察任意（不可数多的）数集……再考虑这些集合的集合，它们的集合，等等，则导致任意集合。这个简略的概括，大约说明了不同领域之间人们熟知的现有分歧的主要特色。（[33]，第 275 页）

这样的划分按照所接受无穷的强弱来进行，因而对这些不同强度的无穷对象的接受程度构成了数学哲学观的一个自然分层。例如，若只接受极为狭窄的有穷对象，并认为其本质是对真实存在的物理对象的抽象，那么这大约对应着一种严格有穷主义的数学哲学；若接受自然数到实数之间的数学对象则可能对应着直觉主义数学哲学以及蒯因的实在论；而若接受高阶无穷对象，即大基数的数学哲学，则对应着一种强实在论。对不同程度无穷对象的接受与否还对应着可接受的数学系统强弱，例如严格的有穷主义可能仅接受原始递归算术的部分片段，蒯因的实在论至少能接受二阶算术，而强实在论不仅接受 ZFC，也接受大基数公理。

正如第一节谈到的那样，为接受高阶无穷对象，哥德尔建议考虑内在辩护和外在辩护两种辩护策略，为大基数公理做辩护。这是一种基于接受高阶无穷的实在论⁷所提出的策略，因为反实在论者或者连 ZFC 强度的数学系统也不能接受，或者认为为大基数公理寻找内在辩护是荒谬的。⁸对他们而言，根本没有一个确定的“集合概念的本质”，或者说，谈论作为抽象对象的”集合“的本质是荒谬的。

内在辩护的另一个难点是所谓贝纳塞拉夫问题，这是由贝纳塞拉夫（P. Benacerraf）于 [3] 一文提出的、针对实在论的疑难，其原始论证包含了“因果关系”这一条件。对因果关系的更进一步的解释不在本文试图讨论的范围内，我们讨论弱版本的贝纳塞拉夫问题，其论证大致如下：

1. 对 X 而言，为获得 S 的知识，需要解释我们对 S 的认识机制；
2. 数学对象是时空之外的对象；

⁶此处指有穷的数到无穷的数之间的跳跃。见 [33]，第 272–274 页。

⁷后文中提到的实在论一词，将特指接受高阶无穷的实在论。

⁸例如，对形式主义而言，那些无矛盾的公理系统的所能推出的结论比系统本身更有意义，对于数学实践而言，ZFC 更受到数学家的广泛认可，因而是一个地位不同寻常的公理系统。可参考 [23]。

3. 人是生活在时空中的；
4. 时空中的人如何认识时空之外的数学对象，这个认识机制是不明的；
5. 因此，若数学知识是抽象数学对象的知识，那么我们不可能获得这些数学对象的知识。

由本节分析可以发现，为大基数公理辩护是一项实在论者提出的任务。特别地，为大基数公理提供内在辩护是仅对实在论者有意义的一项任务，但它的难点有二：其一，说明为什么“集合概念的本质”对实在论者为大基数提供辩护而言有突出的意义，其二，部分处理贝纳塞拉夫问题。这也对应着第一节末尾所提出的两个问题。我们将在下面几节处理这两个问题。

3 实在论视角下的集合论

本节我们将试图说明，实在论视角下，对“集合概念本质”的探究对大基数的辩护而言是有意义的，并且这种意义并非仅由于实在论者将“集合”这种抽象对象毫无根据地统统看作实际存在的数学对象，而是源自于一种独特的实在论意义下的逻辑观。这需要解释这种实在论视角下的集合论研究和通常对集合论的理解有何不同。要解释实在论视角下的集合论研究，一个自然的困难是解释集合论研究与哲学研究之间的关系，因为通常的观点认为，集合论是纯粹数学的一部分，它是价值无涉或哲学无涉的。数学哲学对集合论的兴趣，仅仅源自所有的数学都可以还原为集合论。我们选择从逻辑、哲学、集合论三者的关系作为切入点。

集合论为什么是逻辑学的一部分？逻辑学又为什么会和哲学有联系？这是两个令人困惑的问题。按照流行的对逻辑学的理解，人们⁹或者将逻辑理解成纯粹的、空洞的、没有任何内容的形式：

逻辑之所以是形式的，是因为它的语言是由纯粹的符号构成的，在未经解释以前，它的词项不实际地指称任何对象，因此它的语句也没有真假……在任何解释下都真的这类语句以及语句间的这类关系被称为‘逻辑形式’，它们被认为是逻辑学的主题，逻辑在这个意义上是形式的。（[30]，第49页）

人们熟知的对逻辑的题材的刻画，起头便是赞同逻辑真理包含而且只包含有效的命题，有效的意思是说，不管那些概念和课题在现实世界里是怎样的，这些命题都真。逻辑概念或逻辑常项因此便是有效的命题中出现的那些基本的或不可替代的概念。（[33]，第19页）

或者将逻辑作为某些哲学思考的工具，例如使用时态逻辑来刻画对时间相关的推理，从而在逻辑框架下讨论一些哲学命题；又如普兰丁格（[19]）利用模态逻辑

⁹包括绝大部分近现代哲学家（例如康德），以及绝大部分没有接受任何逻辑学教育的普通人。

辑系统进行神学论证,等等。从前者的观点看,集合论和逻辑的唯一关系是它使用了一阶语言,因此,显然集合论不是逻辑;从后者的观点看,集合论不是在刻画任何哲学家关心的诸如“时间”、“认知”这样的概念,因此不是逻辑。总而言之,这两种逻辑观下,我们很难看出为什么集合论被称为逻辑的一部分。

从上述逻辑观出发,逻辑与哲学的关系使得哲学变得有些岌岌可危。古希腊时代,哲学家和智者被截然分开,而这种逻辑观下的哲学工作似乎更接近智者学派对诡辩术的操弄:若逻辑是一种纯粹哲学无涉的工具,那么我们可以利用逻辑得到几乎任意形态的哲学结论。例如,任意刻画一种关于时态的逻辑,都可利用此种“时态”观点下的逻辑推论来“证明”一些哲学观点;我们可以寻找各种理由,利用一套精心挑选的符号系统,为一些哲学观点做辩护。

因此,即便集合论可被在学科分类上勉强被划归逻辑,集合论的结果和其它逻辑工具的结果没有什么不同,都仅被用来为某些特定的哲学观点做辩护——有时甚至会出现对同一定理的不同解读。这样看来,利用不同的工具讨论同一问题下的不同观点似乎就是哲学的课题,哲学当然也就成了与真理无关的学科,成为了诸多看似合理的理论辩论的赛场。也正因为如此,王浩才会对哲学做出如下的评论:

我之所以对哲学里歧见纷呈一事耿耿于怀,无疑与这种背景大有关联。且看:多数数理逻辑专家专注于同一题目的不同部分,而哲学家们却在回答同一个问题时,做出相互抵牾的结论。([33],第26页)

与这种工具论的逻辑观非常相似一种论调是:数学的全部作用就是其在诸科学领域的应用。这种论调显然表明,逻辑学或数学这种学科本身没有任何价值,而这显然不符合历史上两门学科的真实境况:

对经验主义者而言,逻辑的作用是我们做推理。它不是去陈述命题,而是从一些命题过渡到另一些命题。对理论思想者而言,承担这样的推理(或蕴含)的命题也有其自身的兴趣。([33],第347页)

不仅如此,这种逻辑观显然也无法解释为什么逻辑学在历史上与哲学关系如此紧密,这种紧密程度远超同样可以作为工具的其他具体科学:亚里士多德的形而上学正是基于《前分析篇》之中的逻辑学;黑格尔的逻辑学是他形而上学的中心;哥德尔等同时研究逻辑学和哲学等等。

本文的目标不是讨论哪一种逻辑观更为合理,但我们不得不指出,从另一种逻辑观,我们能轻松地理解为什么集合论是逻辑。这种逻辑观认为,逻辑学的研究目标是发现逻辑空间之中的客观规律,就像物理学的研究为了找出物理空间之中的客观规律一样。这种规律是概念本身和概念之间关系的规律,就像物理规律描述的是物理对象本身和物理对象之间关系的规律。这种视角下,一种独特的实在

论可持有这样的观点：所谓实在论者，正是认为存在着这样非时空对象以及它们的规律的人。显然，哥德尔正是持有这样的逻辑观，也正是这样的实在论者。他依据这样的逻辑观将集合论自然地划归为逻辑学的一部分：

数学客体被给予我们，不像物理客体那样直接。它们是介于理想世界和经验世界之间的某种东西，是极限的情形，是抽象的。客体在空间之中或接近空间。集合是时空客体的极限情形……集合是准时空性的。([33]，第 328 页)

毫无疑问，逻辑学的研究对象是形式的东西。但这并不意味着逻辑研究的对象毫无内容、脱离对象的，而是意味着客观性和普遍性：

逻辑是形式的东西的理论。它包括集合论和概念论。初等（或谓词）逻辑、非初等逻辑和集合论之间的区别是主观的区别。主观的区别依赖于心灵特殊的情形。形式的东西与心灵无关……初等逻辑是有穷心灵的逻辑。你若有了无穷的心灵，你便有了集合论。([33]，第 347 页)

这种逻辑观下，逻辑不仅只是工具，逻辑学本身更接近一门描述性的科学——尽管它所描述的规律并非从感觉观察中直接获得。按照哥德尔：

哲学的目的不是从无中证明一切，而是把所有清晰可见的东西——包括概念的关系——都假定为被给予的，就像形状和颜色，它们来自感觉但无法从感觉中导出。实证主义者企图从无中证明一切……结果，观察便起着过大的作用。([33]，第 402 页)

与此同时，我们还可以解释逻辑与哲学为何有着超乎任何具体科学的亲密性。逻辑是我们思想时所必须接受的内容，这并不是因为它是某种人为约定的规则或者工具，而因为它是最一般的关于概念的知识，因而事实上是我们思考任何具体概念的框架。它是所有信念之中最坚实、最具有普遍性的信念，因此对于依赖理性进行概念演绎的哲学而言，逻辑当然是其最为基础、最为纯粹的一个部分，而非仅仅只是工具。王浩就曾断言：

关于逻辑和哲学的关系，说得不那么抽象一点则可采取如下的观点：哲学作为世界观，其目的乃是捕捉和描画我们的内部资源的一般的和综合的框架，借助于内部资源，我们接受、消化和解释我们关于世界和关于我们自身的所有思想。照这样的想法，逻辑组成了哲学的一个主要部分，甚至可以等同于所谓的纯哲学。([33]，第 22 页)

因此，逻辑学的诸多结果和这些结果之间的关系本就是哲学论证的一部分，自然谈不上是一种工具。因此顺理成章地，逻辑之中的结果、各结果之间的比较、可

能结果的取舍自然也就是哲学论证之中最为有力的证据¹⁰。例如,如果数学哲学需要回答数学是否依赖于人的心灵,那么我们的一个可靠的方法便是依据集合论的结果,比较诸多的可能情况,以此判断是否集合宇宙依赖人的心灵。从这个意义上看,逻辑、集合论、哲学三者才能真正是一体的。

4 实在论视角下的大基数问题

在这样的逻辑观和实在论视角下,集合概念是一个需要被探索的非时空中的概念,我们对它探索的结果决定着它唯一地存在或是不唯一地存在或是根本不存在。如果对集合概念的探索说明它的确存在,那么,它显然是独立于我们的心灵存在的抽象对象,且集合论的目标就是探索关于集合概念的基本规律。由此,大基数之合理性问题所需要的,并非构造一系列理论从而为大基数做辩护¹¹,而是观察集合概念的本质,探索大基数是否是它的一部分。因此,对大基数的辩护等同于对大基数的内在辩护,或等同于探索集合概念的本质。这实际对应了一个关于集合概念的猜想:

存在一个独立于我们心灵的集合宇宙 V , 在其中有大基数。

并且,这只是对集合宇宙结构的诸多基于直观的猜想中的一个。这些猜想的正确与否,需要集合论内部的理由作为支撑,也就需要我们考察哪些定理支持或反对这个猜想。从寻找这些理由的框架、过程来看,我们并非在寻找一般意义下的辩护(justification),而更像在进行一场一般科学研究之中的科学实验——尽管我们的研究并不是经验性的。因此,我们在寻找的是证据(evidence),或者在寻求对我们假设的解释(explanation)。

直观上,我们相信那个独立于心灵的集合宇宙应该足够丰富、应该是不可简单定义的、其中应该有大基数……那么,我们要如何寻找这些信念的证据?显然,根据我们前文对逻辑和哲学关系的解释,证据不在集合论之外,证据就在、也只能在集合论之内。集合论的定理和定理之间的相互联系正在告诉我们集合宇宙是什么样的。

然而,集合论的定理并不能直接“证明”集合的宇宙之中存在大基数。不能直接“证明”集合的宇宙之中是否存在大基数有多种原因:

¹⁰必须指出,将逻辑作为工具和将逻辑学的结果作为证据有着本质的不同。因为,将逻辑作为工具时,我们或者依据特殊的逻辑系统,或者依据逻辑规则进行推理。当依据特殊的逻辑系统时,我们只能依据逻辑学之外的理由(通常这样的理由基于感觉经验)支持这个系统;当依据逻辑规则进行推理时,若从无出发,我们只能得到全体重言式。而将逻辑学的结果,例如集合论的结果作为证据时,我们的所有依据都来自于逻辑内部。可见后文的展开说明。

¹¹例如,从对主流数学的实用性出发为大基数做辩护。又例如莱因哈特在[22]中那样,构造一系列不自然的反映原则为大基数之合理性做辩护。

1. 显然, 我们的证明不是无前提的, 而是基于 ZFC 的;
2. 在 ZFC 中不能证明存在大基数, 否则违背哥德尔第二不完全性;
3. 尽管由于哥德尔第二不完全性定理, ZFC 无法证明自身的一致性, 但 ZFC 仍被广泛接受为数学基础。

上述的第一条和第二条说明了现有的框架——ZFC——必然不可能证明集合宇宙之中存在大基数, 第三条说明了这个框架的打破面临极大的挑战。集合的宇宙之中是否存在大基数, 这不像一般的物理学命题那样容易通过数学计算来预测, 更无法通过一般科学实验之中的经验观察来检验: 地球是否是圆的? 我们飞上太空观察即可。面对这些困难, 如何论证集合的宇宙之中存在大基数?

基本的方法当然还是基于 ZFC, 因为至少主流的数学实践接受 ZFC 的所有结论, 并且, 任何一个实在论者都会认可 ZFC 是关于集合概念的基本事实——尽管它还不足以以定理的形式直接告诉我们集合概念的本质。因此, 我们可以比较诸多的 ZFC 的模型, 判断哪个更加接近集合宇宙。¹²不仅如此, 当我们比较 A、B、C 三个 ZFC 的模型时, 如果有理由说明 A 模型更接近集合的宇宙, 那么, A 的结构会告诉我们更多的、更本质的信息。借助这些信息, 我们可以知道更多的集合宇宙的正确信息——尽管哥德尔定理告诉我们, 基于任何公理框架, 我们都永远不能知道全部。

5 实在论者如何可能为大基数辩护

正如上一节所言, 我们现在需要比较 ZFC 的诸多模型, 探索 V 的本质, 即看哪一个更加接近真实的集合宇宙; 或者比较 ZFC 的诸多模型, 看是否根本没有这个真实的宇宙。现在的困难在于, 我们如何知道哪个 ZFC 的模型更接近集合的宇宙? 特别是, 我们既无法通过经验观察得知集合宇宙的样貌, 也无法直接通过 ZFC 证明集合宇宙究竟包含什么。这种情况下, 什么样的集合论结果可以作为证据?

一种可能的做法是模仿具体的经验科学: 每一门具体科学中猜想的验证, 大致过程包含提出假设和寻找蕴含这个假设成立的经验证据两个步骤。例如, 我们假设月球存在且其表面凹凸不平, 而我们可以寻找到许多经验事实证明这一点: 在天气条件适宜时, 肉眼可观察到月亮, 并且可以观察到它表面有黑点; 在太空中可以拍摄到月球照片, 并且的确其表面凹凸不平; 甚至可以直接宇航员登月, 近距离观察月球, 证实其表面有大量坑洞……这些都是月球存在这一假设成立的证据。

¹²注意, 这样的方法是合理论证方法的一个证据是, 我们可能得出与“存在唯一的、不依赖于心灵的集合宇宙”这个假设框架相反的结论。例如, 我们也许会发现没有哪一个 ZFC 的模型是足够独特的。即, 我们的任何猜想都具有可证伪性。再例如, 我们可能会发现, 没有任何证据表明集合宇宙具有某种深刻的规律, 因而集合概念的本质就是它不可能真实存在。

近代科学之中,相对论即是一个很好的例子。爱因斯坦发现,仅根据光速不变原理和等效原理,即可推翻牛顿的绝对时间观,并且这一推理从直观上看异常简单。光速不变原理仅仅来自于简单的一个观察:麦克斯韦的理论证实光是一种波,那么如果我们能和光并驾齐驱,按照牛顿时空观,光线在我们看起来应该是完全静止的。这就意味着在运动者看来,光是凝固的波,而这似乎有问题,而在麦克斯韦的理论中,光线总以同样的速度运动,不论我们以何种速度运动。因此,麦克斯韦的理论和牛顿的理论相互矛盾。在假设光速不变原理的前提下,抛开爱因斯坦的数学推导,只需直观上考虑:我们驾车以光速行驶,此时回头看背后的钟表会发生什么?爱因斯坦立刻意识到,钟表看起来会是静止的,但自己的表却正常运转,因此与牛顿的静止时空观不同,时间并不是绝对的,在宇宙不同的地方,时间的速率不同。考虑驾车以光速追逐光线,会发生下面的矛盾:我们与光跑了个并驾齐驱;但我们会觉得怎么都追不上这一束光。这种矛盾的原因也可以用时间速率不同做出解释:由于速度达到光速,时间对于我们减慢了。

问题在于,是牛顿的理论对,还是光速不变原理对?有多个证据支持光速不变原理:

1. 牛顿理论若要与麦克斯韦方程协调,则必须假设以太的存在(可见[5, 6, 10]; 迈克耳孙-莫雷实验和各种现代的精确版本实验支持地球不存在相对于以太的运动。
2. 如果光速确实是自然界的常数,那么通常的解决方案就是洛伦兹变换,而麦克斯韦方程恰好的确遵循洛伦兹变换([21], 第210-213页; [16])。
3. 洛伦兹变换下,有两种方式可以解释迈克耳孙-莫雷实验,一种是洛伦兹收缩([24]),一种是爱因斯坦的相对论。前者无法验证,而相对论却有实验观测作为证据。例如,携带原子钟的实验证明,运动越快,时间就越慢。
4. 在牛顿的绝对时空理论下,引力不能很好地被纳入洛伦兹变换中,但广义相对论可以很好地将引力纳入其中。¹³

不仅如此,在等效原理下,还可以推理出光必须在引力的作用下弯曲:考虑在加速向上的火箭上打开手电筒,由于火箭向上加速而光束下落,引力必须会使光弯曲(可见[7],第34章)。也有多个证据支持这一点:日食期间星光的弯曲、红移现象以及水星的近日点。在拥有诸多证据的等效原理和光速不变原理下,牛顿时空观被彻底颠覆。

不难发现,爱因斯坦理论是在多种证据下被逐步接受,而非依据空想而被接受。其基本模式十分简单:观察到一些现象、做出一些假设、利用观测到的现象进行验证。对集合宇宙的结构而言也是如此。我们用一些定理作为“数学现象”辅

¹³爱因斯坦1915年的演讲和论文引入了引力场方程,其论文为德文写作。本文参考的材料为[18]。

助我们验证关于集合概念的假设。例如，我们有直观告诉我们： V 应该足够丰富，其中存在大基数。

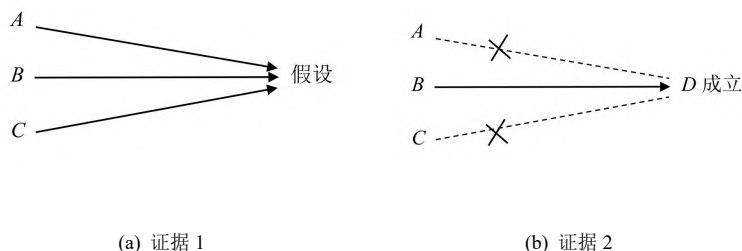


图 1: 集合宇宙结构的证据

那么，为寻找这一假设的证据，我们寻找一些蕴含大基数存在的命题，或者接近大基数存在的命题。如果能在集合论中证明这些命题，那么当然它们就是大基数存在的证据。如图1(a)所示。这种方法的一个良好示范即是终极 L 猜想、HOD 猜想¹⁴和 $V = \text{HOD}$ 的关系。

所谓 HOD，指的是遗传序数可定义集的类。武丁发现，在一定的大基数假设下，其满足二歧性 ([28])：

定理 5.1. 设 κ 是可扩张基数。则：

1. 对任意 V 中的奇异基数 γ ， γ 在 HOD 中也是奇异基数，并且 $(\gamma^+)^{\text{HOD}} = \gamma^+$ ；
2. 所有大于 κ 的正则基数都是 ω -强可测基数。

也就是说，在一定强度的大基数假设下，HOD 或者非常接近 V ，或者在 κ 以上离 V 很远。并且假设存在可扩张基数，则 HOD 中必然存在可测基数。据此，武丁提出了 **HOD 猜想**： $\{\delta \mid \delta \text{ 是正则基数但不是 } \omega\text{-可测基数}\}$ 是一个真类，即 HOD 的确十分接近 V 。此外，武丁发现，HOD 猜想有下列等价形式 ([31]，第 127 页)：

定理 5.2. 设 κ 是可扩张基数，则下列等价：

1. HOD 猜想成立；
2. HOD 是 κ 是超紧基数的弱扩张模型。

因此，如果 HOD 接近 V ，武丁证明，HOD 是 κ 的弱扩张模型。故而，在一定的大基数假设下，HOD 是一个包含了所有大基数的典范内模型。HOD 到底有多接近 V 呢？它到底是否呈现了集合概念的本质？基于此，武丁又提出了**终极 L 猜想**：假设 κ 是可扩张基数，武丁猜想，存在模型 N 满足 ([28])：

¹⁴这是两个由集合论学家武丁 (W. H. Woodin) 提出的关于集合宇宙本质的猜想。

1. N 是 κ 是超紧基数的模型;
2. $N \subseteq \text{HOD}$;
3. $N \models$ 存在 Woodin 基数的真类。

因此, 如果 HOD 猜想和终极 L 猜想成立, 那么 $V = \text{HOD}$, 并且 HOD 是超紧基数的弱扩张模型。这表明, 存在一个使得力迫失效的、包含所有大基数的典范模型, 并且它就是真实的集合宇宙。并且, 终极 L 猜想是一个算术命题, 它必然有一个确定无疑的真值。因此, 上述两个猜想是 $V = \text{HOD}$ 这个信念的证据¹⁵。故而, 它们也是大基数存在的证据。

经验科学中还有另一种寻找证据的方法。图1(b)试图表明, 有许多现象是除了某种特定的理论外无法解释的。即除了特定理论外, 再也找不到别的对证据的合理解释: 如果出现了结果 B , 那么除了 A , 再也没有其他合理的解释。这种证据的形式亦类似于经验科学之中的实验。例如, 我们想知道某种药物是不是有疗效, 通常的方法是进行双盲实验, 即确保药物引起了身体的好转, 而不是其它原因造成了好转。换言之, A 会造成结果 B , 同时再没有其它条件会造成 B 。

爱因斯坦的相对论中也有类似的情况, 即除了假设成立, 再也找不到其它的合理解释(可参考 [32]; [29], 第 54–76 页):

1. 为什么必须承认速度越快时间会越慢? 因为, 即便没有实验支持的前提下, 在绝对时间观中, 无法解释为什么我们和光束并驾齐驱, 却在我们自己看起来, 我们根本无法追上光速这样的矛盾; 即便使用调和牛顿理论和麦克斯韦理论的以太, 也无法解释这样简单的矛盾; 相反, 只有相对时间观, 才能统一两个现象。
2. 为什么必须承认光速不变原理? 因为, 即便没有实验支持的前提下, 如果我们可以与光速相对静止, 那么无法解释为什么光是一种波, 因为那样一来, 光会是凝固的波; 如果承认以太, 那么无法回答为什么光作为一种波可以在真空中传播, 因为真空意味着没有任何东西可以震动; 相反, 如果承认光速不变原理, 我们与光并驾齐驱, 而在我们看起来由于时间静止, 我们无法追上光, 因此光不再是凝固的波。

事实上, 这样的情况在数学中常常发生。描述集合论对可决定性公理 (AD) 的研究即为一例。由于 AD 与选择公理相矛盾, 集合论学家一度试图证明 AD 是错的。一个思路是证明较简单的实数子集: 波莱尔集上 AD 就是错的, 但最终集合论学家发现无法构造出这样的反例。以马丁 (D. Martin) 对这个问题的探索为

¹⁵ 说一个“猜想”是一个“信念”的证据听起来很奇怪, 有点像某个假说是另一个假说的证据, 似乎是循环。但终极 L 猜想不是一个随意的猜想, 是有诸多数学结果做支撑的一个猜想。并且这个猜想的反面有诸多定理暗示有可能不成立。同时, 最近的一篇文章 ([1]) 显示, 这个猜想还可能是不成立的, 因此具有可证伪性。本文限于篇幅, 对这个问题不再展开。

例：马丁本人证明了 AD 与锥体概念之间的联系¹⁶：

定理 5.3. [锥体引理] 假设 AD 成立。如果 A 是一个图灵度的集合，那么或者 A 中含有一个锥体，或 A 的补中含有一个锥体。

类似地，可表明若波莱尔决定性成立，那么波莱尔的度集满足上述二歧性。因此，在证明这个定理的时候（1968 年）¹⁷，马丁坚信这个定理可用于证明 AD 可导出矛盾，因此 AD 是错的。比如，马丁试图表明波莱尔决定性是错的。作为一个熟悉递归论的数学家，他尝试了他所知的所有图灵度的集合，但这些图灵度的集合总是要么就含有锥体，要么补集含锥体。至此，他开始相信波莱尔集上的 AD 成立，因为除了它成立外，再找不到理由表明为什么无法举出任何反例。

集合宇宙中也有类似的情况。例如，目前为止，我们没有发现大基数会带来任何可能的矛盾。相反，一些十分有用的工具的一致性与大基数的一致性强度有巧妙的对应。例如，如果 ZFC+ 超紧基数是一致的，那么 ZFC+ 马丁极大原则也是一致的。因此，大基数很可能就是一致的。大基数一致的唯一解释只能是大基数存在——即便我们有诸多的真实集合宇宙，也应该每个世界都里都存在着大基数。除此之外，我们无法对大基数的一致性给出更好的解释。

6 可能的反驳

一种可能的反对是，HOD 猜想和终极 L 猜想都预设了某种大基数的存在，用它们作为证据来表明大基数存在，是一种循环论证。另一种可能的反驳是，存在可测基数，则 $V \neq L$ ，那么，为什么 L 中不包含可测基数不能作为可测基数不存在的证据呢？我们对上述反驳进行一个初步的解释。

首先，较小的大基数无需假设较强的大基数即可得到辩护，不难找出一些较小的大基数的证据。例如，ZFC 中有反映定理：

定理 6.1. [反映定理 ([13], 第 136 页)] 给定任意公式 $\phi_1, \dots, \phi_n$,

$$ZF \vdash \forall \alpha \exists \beta > \alpha (\phi_1, \dots, \phi_n \text{ 对 } V_\beta \text{ 绝对}).$$

我们能在 ZFC 中证明的反映定理只是 RP1 (first order reflection principle, 简称 RP1)，即只允许使用集合而非类。若我们不限定 ϕ 是一个一阶公式，则有：

$$\forall \alpha \exists \beta > \alpha \forall \bar{x} \in V_\beta (\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \phi^{V_\beta}(\bar{x})) \quad (\text{RP2})$$

¹⁶ 令 $\leq$ 为图灵归约，若 d 是一个图灵度，将 $\{d' \mid d \leq d'\}$ 称为 d 的锥体 (cone)。一个图灵度的集合是锥体当且仅当它是某个图灵度的锥体。该定理可见 [4]，第 223–224 页。

¹⁷ 此时波莱尔决定性还没有被证明（1975 年才被证明）。这两个定理均出自马丁。

RP2 (higher order reflection principle, 简称 RP2) 形式的反映原理可被视为相对合理的较小大基数存在的证据¹⁸, 因为它需要的假设很少, 而这个假设有反映定理作为证据。因此, 与 L 相容的较小的大基数的确有证据。

想为更大的大基数做辩护, 则首先要考虑是否 $V = L$ 成立。从直观上看, $V = L$ 显然不成立, 因为 L 中只放入了上一层中可定义子集。进一步地, 没有任何数学家认真地认为 $V = L$ 是一个事实, 尽管 L 是一个非常典范的模型。更决定性的证据是, 我们可以找到一些证据表明超出 L 的大基数——例如 Woodin 基数——的确很可能存在, 而 V 的确等于 L 则除了清晰分层上的好处外, 无法找到别的证据。

我们考虑 Woodin 基数的例子。实数的可定义子集可分出一个复杂度的层谱: 在某个波兰空间 X 上, 从开集出发, 借助交并补运算和连续函数的投影, 可以逐步产生波莱尔集、解析集和投影集……。集合论学家关心的是, 这些实数的可定义子集是否都有良好的性质。借助描述集合论中常讨论几种实数的正则性质: 拜尔性质、勒贝格可测性、完美集性质, 我们可以讨论是否实数的子集都有良好的性质, 并且可以观察在哪一步出现了困难。对最简单的拜尔集、解析集, 可以知道它们具有拜尔性质、是勒贝格可测的、都具有完美集性质。但是在投影集这一层, 投影集是否具有这些良好的性质被发现独立于 ZFC。描述集合论学家从博弈论中提取经验, 考虑投影集上的可决定性, 即投影可决定性 (PD): 所有投影集都是可决定的。集合论学家发现, PD 恰好能解决投影集上所有的独立性问题。不仅如此, 巧合的是, ZFC+PD 恰好是一个对二阶算术经验完全的理论, 即所有二阶算术的命题都可以借助 ZFC+PD 确定真值。

此外, PD 还有两个深层的特点。其一, ZFC+PD 对二阶算术的经验完全性, 与一阶算术的情况存在着对应。有独立于 PA 的一阶算术命题, 但不存在任何独立于 ZFC 的一阶算术命题。不仅如此, ZFC 还使得“一阶算术的真”可被固定为“ $H(\omega)$ 中的真”, 因为这个概念本身是力迫不变的。这解释了为什么我们对自然数的理解没有受到任何自然的挑战。所有这些一阶算术中的情况都能在 ZFC+PD 中在二阶算术上完美复刻。这表明, ZFC+PD 和 ZFC 的关系, 就像一阶算术上 ZFC 和 PA 的关系一样, 因此, 似乎也可以合理地说: 二阶算术命题是真的, 当且仅当 ZFC+PD 能证明它。其二, 与波莱尔集上的 AD 类似, 没有任何反例能表明 ZFC+PD 不一致。因此, 很多数学家倾向于相信 PD 是一致的。

巧妙的是, 这样一个独特的、被认为极可能一致的命题, 与 Woodin 基数之间有着千丝万缕的联系:

定理 6.2. 如果存在 Woodin 基数的真类, 则 PD 成立。([27], 第 3 页)

¹⁸可参考 [11], 该文的论证表明, 反映原理可为不超过 $0^\sharp$ 的大基数——例如不可达基数——做辩护。

定理 6.3. 下列等价 (可见 [12], 第 188 页, 定理 8.2):

1. PD
2. 对任意 $n \in \omega$, 存在一个内模型 M 使得 $M \models$ 存在 n 个 Woodin 基数。

因此, 我们有强烈的证据表明, Woodin 基数是一致的。而这个现象唯一的解释是, 的确存在 Woodin 基数。以上对 Woodin 基数的论证不涉及任何更强的大基数, 因而也不涉及循环论证。故而, 司各特定理恰好说明了 $V \neq L$, 而不是相反地将其解读为说明不存在可测基数。

$V = \text{HOD}$ 这一命题也有一个不基于大基数的证据。如果 Woodin 基数一致, 那么我们完全有理由认为, 包含 Woodin 基数在内的尽可能多大基数的内模型更加典范。恰好, 终极 L 猜想和 HOD 猜想提供了一种寻找这样典范模型的理论可能性, 它使得 V 的确十分接近 HOD ¹⁹。相反, 如果 Woodin 基数不一致, 也可得到类似的结果。2007 年, 詹森 (R. Jensen) 和斯蒂尔 (J. Steel) 在不存在 Woodin 基数的假设下, 得到了一种弱形式的覆盖定理 ([17]):

定理 6.4. 假设不存在传递模型满足 $\text{ZFC} +$ “存在 Woodin 基数”, 那么: 若 κ 是 V 中的奇异基数, 则 $\kappa^{+K} = \kappa^{+}$ 。

包括弱覆盖引理在内的多种迹象表明, K 与 V 十分接近 ([25])。若 Woodin 基数不一致, 则不存在包含 Woodin 基数的内模型, 因此, 根据詹森和斯蒂尔的结果, K 十分接近 V 。又因为 $K \subseteq \text{HOD}$, 因此有 V 仍然十分接近 HOD 。无论 Woodin 基数是否一致, 我们都能得到 V 与 HOD 非常接近, 我们有理由相信, HOD 中至少应该包含 Woodin 基数的真类, 从而获得了超出 L 的大基数存在的证据。

7 总结

我们在本文讨论了一种实在论视角下的逻辑观。这种逻辑观可为逻辑、集合论和哲学的关系提供一种较为合理的解释。基于这种逻辑观, 我们分析了实在论视角下什么是大基数的内在辩护, 即为集合宇宙的结构寻找证据。这种为集合宇宙的结构寻找证据的思路不仅是哲学上可解释的, 而且是集合论实践中可操作的, 它基于数学-物理平行论的实在论, 大致的确可与物理学对物理世界的刻画相对应。我列举了武丁工作中可以作为证据的例子, 并简单讨论了其如何与科学方法论对应。基于实在论视角的寻找证据、对集合概念的本质进行探索将是一个有广阔前景的问题。

¹⁹ 此处, 尽管两个猜想是基于大基数的猜想, 但它至少提供了一个必然有对错的理论。而 $V \neq \text{HOD}$ 无法提供这样的猜想或结构化的理论。

参考文献

- [1] J. Bagaria, P. Koellner and W. H. Woodin, 2019, “Large cardinals beyond choice”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, **25(3)**: 283–318.
- [2] M. Balaguer, 2001, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press.
- [3] P. Benacerraf, 1973, “Mathematical truth”, *The Journal of Philosophy*, **70(19)**: 661–679.
- [4] H. G. Dales and G. Oliveri, 1998, *Truth in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.
- [5] A. Einstein, 1940, “Considerations concerning the fundaments of theoretical physics”, *Science*, **91(2369)**: 487–492.
- [6] A. Einstein, 2007, “Ether and the theory of relativity”, *The genesis of general relativity*, **250**: 1537–1542.
- [7] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, 2011, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. I: The New Millennium Edition: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*, New York: Basic books.
- [8] K. Gödel, 1933, “The present situation in the foundations of mathematics”, *Collected works*, **3**: 45–53.
- [9] K. Gödel, 1947, “What is cantor’s continuum problem?”, *The American Mathematical Monthly*, **54(9)**: 515–525.
- [10] T. Hirose, 1976, “The ether problem, the mechanistic worldview, and the origins of the theory of relativity”, *Historical Studies in the Physical Sciences*, **7**: 3–82.
- [11] P. Koellner, 2009, “On reflection principles”, *Annals of Pure and Applied Logic*, **157(2-3)**: 206–219.
- [12] P. Koellner and W. H. Woodin, 2010, “Large cardinals from determinacy”, *Handbook of Set Theory*, pp. 1951–2119, Dordrecht: Springer.
- [13] K. Kunen, 2014, *Set theory: An Introduction to Independence Proofs*, Elsevier.
- [14] Ø. Linnebo, 2023, “Platonism in the Philosophy of Mathematics”, in E. N. Zalta and U. Nodelman (eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Metaphysics Research Lab, Stanford University, <https://plato.stanford.edu/archives/sum2023/entries/platonism-mathematics/>.
- [15] P. Maddy, 1990, “Physicalistic platonism”, in A. D. Irvine (ed.), *Physicalism in Mathematics*, **Vol. 45**, pp. 259–289, Dordrecht: Springer.
- [16] A. I. Miller, 1981, *Albert Einstein’s Special Theory of Relativity: Emergence (1905) and Early Interpretation (1905-1911)*, New York: Springer.
- [17] W. J. Mitchell and E. Schimmerling, 1995, “Weak covering without countable closure”, *Mathematical Research Letters*, **2(5)**: 595–609.
- [18] A. Pais and S. Goldberg, 1984, “‘subtle is the lord...’: the science and the life of albert einstein”, *American Journal of Physics*, **52(10)**: 951–953.
- [19] A. Plantinga, 2003, *Essays in the Metaphysics of Modality*, Oxford University Press.
- [20] W. V. Quine, 1980, *From a Logical Point of View: Nine Logico-Philosophical Essays*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

- [21] K. S. Rao, K. S. Rao and S. R. Koneru, 1988, *The rotation and Lorentz groups and Their Representations for Physicists*, New Jersey: John Wiley & Sons.
- [22] W. Reinhardt and T. Jech, 1974, “Remarks on reflection principles, large cardinals, and elementary embeddings”, *Axiomatic set theory*, **Vol. 13(part 2)**, pp. 189–205.
- [25] R. Schindler and J. Steel, 2014, *The Core Model Induction*, https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/rds/core_model_induction.pdf.
- [23] S. Shelah, 2003, “Logical dreams”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **40(2)**: 203–228.
- [24] J. G. G. Stephan, 2006, “The relative motion of the earth and the ether detected”, *Journal of Scientific Exploration*, **20(2)**: 201–214.
- [26] H. Wang, 1958, “Eighty years of foundational studies”, *Dialectica*, **12(3-4)**: 466–497.
- [27] W. H. Woodin, 2004, “Set theory after Russell: The journey back to Eden”, *One Hundred Years of Russell’s Paradox*, pp. 29–48, Berlin & New York: De Gruyter.
- [28] W. H. Woodin, J. Davis and D. Rodríguez, 2012, “The hod dichotomy”, in J. Cummings and E. Schimmerling (eds.), *Appalachian Set Theory: 2006–2012*, pp. 397–419, Cambridge: Cambridge University Press.
- [29] 费曼 (著); 周国荣 (译), 费曼讲物理: 相对论, 2004 年, 湖南科学技术出版社。
- [30] 郝兆宽, “逻辑究竟是什么以及逻辑应当是什么?”, 哲学分析, 2016 年第 36 期, 第 46–65+197 页。
- [31] 郝兆宽, 哥德尔纲领, 2018 年, 上海: 复旦大学出版社。
- [32] 加来道雄 (著); 徐彬 (译), 爱因斯坦的宇宙, 2015 年, 长沙: 湖南科学技术出版社。
- [33] 王浩 (著); 邢滔滔、郝兆宽、汪蔚 (译), 逻辑之旅: 从哥德尔到哲学, 2009 年, 杭州: 浙江大学出版社。

(责任编辑: 执子)

Large Cardinals in the Perspective of Realism

Liang Kou

Abstract

Finding and defending new axioms for set theory is an important topic in the philosophy of set theory, and the large cardinal axiom is one of the alternatives for new axioms. There are currently two main types of justifications for large cardinal axioms: the extrinsic justifications and the intrinsic justifications. The extrinsic justifications, from the point of view of richness and utility in mathematical practice, do not satisfy the realists. The realists wish to provide some justifications based on the nature of the concept of the set, i.e., to provide intrinsic justifications for large cardinals. I discuss a view of logic from the realism perspective and why we should defend intrinsic justifications for large cardinals under this view, and give examples of how it is possible to justify large cardinals under the realism perspective.

Liang Kou Department of Philosophy of Science and Logic
School of Philosophy, Fudan University
lkou20@fudan.edu.cn