

强可能性与弱必然性的逻辑

陈佳

摘 要: 本文考察了强可能性和弱必然性这两种真势模态的逻辑性质。称一个命题是强可能的, 当且仅当它在某个可及的但非现实的可能世界中成立; 称一个命题是弱必然的, 当且仅当它在所有可及的但非现实的可能世界中都成立。强可能性与弱必然性互为对偶。在表达力上, 强可能性算子不同于可能性算子。尽管如此, 刻画强可能性和弱必然性的逻辑(简称为强可弱必逻辑)仍然是正规模态逻辑, 而且它的极小逻辑在形态上类似于极小正规模态逻辑 **K**。本文主要在形式技术上对强可弱必逻辑作了初步研究: 比较了它和模态逻辑以及一阶逻辑在语言表达力上的区别, 给出了它的极小和扩张的公理刻画以及必然和弱必然的双模态逻辑的公理刻画。

关键词: 强可能性; 弱必然性; 表达力; 公理化

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 哲学背景与动机

是什么让现实世界区别于其他可能世界? 有些人主张, 现实世界是实在的, 其他的可能世界只不过是语言的构造。([2], 第 9 页) D. Lewis 等模态实在论者坚持, 所有可能世界都同样是实在的, 在这点上现实世界和其他可能世界没有区别。([10], 第 2 页) 无论如何, 我们至少可以有一条简单有效的标准以帮助我们识别出现实世界, 这条标准本质地使用了第一人称索引词, 所以可称之为第一人称标准:

我们所生活的世界是现实的, 其他的世界(如果它们确实存在的话)不是现实的。

收稿日期: 2019-12-05

作者信息: 陈佳

南京大学哲学系、科学技术与社会研究所
chenjay509@hotmail.com

基金项目: 国家社科基金青年项目“社会悖境的逻辑机制与出路研究”(17CZX007)。

致 谢: 感谢 NCML 2019 的两位匿名评审对本文的批评和建议, 尤其感谢其中一位评审专家向本文作者推荐了他世界模态逻辑、偶真性逻辑等领域的重要文献并指出了引理 8 的证明中的一处错误。

因此,“猪会飞的世界”、“日本征服中国的世界”、“希拉里当选第45届美国总统的世界”等这些世界顶多是可能的,但它们不是我们所生活的世界,因而不是现实的。我们只与现实世界中的事物具有时空联系,但与其他可能世界中的事物不具有时空联系。然而有趣的是,人们常常会关心那些非现实的可能世界,甚至着迷于此。人与动物以及人工智能的一个区别是人能够想象非现实的情境。这种反事实思维不仅能给人带来精神愉悦(许多艺术都可以被视为是一种想象活动),而且对于人类文明的延续和发展至关重要。比如 Lewis ([9]) 和 Williamson ([18]) 分别用反事实推理来刻画因果和模态概念,而掌握这两种概念对于人类进行决策实践和科学探究而言无疑都是必要的。

可能世界思想为模态逻辑提供了标准语义学。一个命题如果它在现实世界中是真的,则它是实然的;如果它在某个现实世界可及的可能世界中是真的,则它是可能的;如果它在所有现实世界可及的可能世界中都是真的,则它是必然的。现实世界相对于自身而言也是一个可及的可能世界,所以实然性蕴涵了可能性。然而,若某命题的可能性仅仅出于其实然性,那么这种可能性不免是有些平庸的。当我们讨论可能性时,我们更关心那些非现实的可能世界中有哪些命题成立。因此,本文将考察两种新的真势模态性质:强可能性和弱必然性。一个命题是强可能的,如果它在某个非现实的但可及的可能世界中是真的;它是弱必然的,如果它在所有非现实的但可及的可能世界中都是真的。不难发现,强可能性蕴涵了可能性,必然性蕴涵了弱必然性。此外,强可能与弱必然性互为对偶。这就是说,一个命题是强可能的,当且仅当它的否定不是弱必然的;它是弱必然的,当且仅当它的否定不是强可能的。在逻辑性质上,强可能性类似于可能性,弱必然性类似于必然性,但它们也具有显著的不同:实然性不蕴涵强可能性,弱必然性不蕴涵实然性,而且弱必然性不蕴涵强可能性。

与强可能性概念(以及弱必然性概念)直接相关的是他世界模态(modality for other-world),也被称为不等性模态(modality of inequality)。对于世界 w 而言,命题 p 在他世界上成立,当且仅当存在一个不同于 w 的世界 v 使得 p 在 v 上成立。他世界模态的概念起源于 von Wright 对空间逻辑的研究¹,在此语境下它表达的意义是(某命题)在非此地的其他某个地点上(elsewhere)成立(对 elsewhere 算子的研究,参见 [15, 16, 19])。类似地,在时态逻辑语境下它表达了(某命题)在非此时的其他某个时刻上(elsewhen)成立。²在时态逻辑

¹von Wright ([19]) 称之为地点的模态逻辑(a modal logic of place)。

²作为“elsewhere”在时态上的对应物,“elsewhen”是 Segerberg 所生造的英语词。Segerberg 认为刻画“elsewhere”和“elsewhen”的是同一种逻辑,更详细的讨论见 [13, 15, 16]。

语言上加入了不等性算子（等同于“**elsewhen**”算子），从而能够刻画更加丰富的时间结构（比如严格线序）。他世界模态也可以作为一种真势模态来理解，比如 Humberstone ([8]) 认为，他世界模态逻辑为区分模态实在论、反实在论以及不可知论提供了恰当的逻辑基础，而这是普通的模态逻辑所做不到的。他世界模态与强可能性模态的联系和区别是显而易见的。一方面，当可能世界之间的可及关系是近全通关系时（即任意两个不同的可能世界之间都是可及的），他世界模态与强可能性模态是等价的，因此可以将他世界模态逻辑视为强可能性模态逻辑的特例。事实上，他世界模态逻辑的极小系统（即 [19] 中的系统 $S_WB + A5$ ，[16] 中的系统 KAB ，[13] 中的系统 DL 以及 [8] 中的系统 $KB4'$ ）等价于下文所给出的系统 $\Box 4$ （及其等价系统 $\Box 5$ ）。另一方面，他世界模态不涉及可能世界之间的可及关系，或者说它只涉及一种可及关系，即不等关系³，而强可能性模态则可以容纳任意可及关系。从多模态逻辑角度来看，他世界模态只是一种模态，而对任何可能型模态而言（包括形而上学可能、物理可能、认知可能、置信可能、道义可能等等）都存在与之对应的一种强可能型模态，这也使得强可能性模态具有更宽广的应用前景。

强可能性和弱必然性概念也启发了我们去考察其他相关的真势模态。莱布尼茨提出：有些实然命题不仅是真的，而且是必然的；有些实然命题却仅仅是偶然的，“它们的反面是可能的”。⁴ 按照可能世界语义的分析，莱布尼茨所谓“事实的真理”指的是这样的命题：它在现实世界中是真的，但在某个非现实的可及世界中不真，即它的否定是强可能的。莱氏“事实的真理”在当代文献中也被称为偶真性（**accident**）⁵，它与本质性（**essence**）构成了一组对偶概念，它们作为非正规的真势模态而受到了逻辑学家的关注（参见 [4, 11, 17, 21]）。尽管在相关文献中，偶真性与本质性由可能性和必然性所定义，但实际上它们也可以被强可能性和弱必然性定义。不仅如此，利用强可能性和弱必然性模态我们还可以定义出一种新的偶然真理概念：称一个命题是“超偶然真理”，当且仅当它在现实世界中是真的，但它在任何非现实的可及世界中都不真，即它的否定是弱必然的。⁶ “超偶然真理”反映的是那些几乎不可能为真但偏偏竟

³在不等关系下，两个世界 w 和 v 是可及的，当且仅当 $w \neq v$ 。

⁴参见莱布尼茨《单子论》第 33 节，中文译文见 [20]，第 482 页。

⁵与偶真性容易混淆的一个概念是偶然性（**contingency**），它是与非偶然性（**non-contingency**）相对偶的概念。称命题 p 是偶然的，指的是 p 及 p 的否定都是可能的。关于偶然性逻辑，可参考 [3, 5, 7] 以概览这个领域。

⁶值得与“超偶然真理”概念加以比较的还有 Pan 和 Yang ([12]) 提出的强偶性概念（**strong**

然成真的命题,因此可以说它们是“奇迹”,构造关于“奇迹”的逻辑将是一个有趣的探索方向。

我们关心强可能性和弱必然性的另一个动机来自于动态逻辑。([6])模态逻辑除了是刻画可能性和必然性的,它也是刻画变化的。在这种解释之下,菱形算子 $\Diamond$ 代表的是在某种动作之后系统状态发生了转移,但这种解释并不排除“原地踏步”式的状态转移,即经过某种动作之后状态实际上未发生变化。与之对照的是,强可能性刻画的是状态转变,即经过某种动作之后系统的状态发生了变化。因此,强可能性在更严格的意义上刻画了变化。

综上所述,强可能性和弱必然性不仅在逻辑上是两种新的真势模态,在哲学上无疑也是颇具吸引力的重要概念。尽管如此,本文的目标主要在逻辑上而非哲学上,即对强可能性和弱必然性的逻辑(以下简称强可弱必逻辑)作一个初步但力图系统的研究。本文的安排如下:第2节给出强可弱必逻辑的形式语言和语义,提出了适用于强可弱必逻辑的互模拟概念,并将之运用于对强可弱必语言和模态逻辑语言以及一阶语言的表达力比较;第3节给出强可弱必逻辑的极小公理系统以及在各框架类上的扩张系统,并证明它们的可靠完全性;第4节考虑了在同时含有必然和弱必然算子的双模态语言下的公理刻画,给出了两个具有普遍性的桥接公理但又指出了它们的局限性。

2 强可弱必逻辑:语言、语义和表达力

2.1 语言和语义

令 Φ 是一原子命题集合,定义形式语言 $L(*)$ 为:

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid * \varphi$$

其中 $p \in \Phi$ 。当 $*$ 取弱必然算子 $\Box$ 时,那么得到的是强可弱必逻辑语言 SW ; 当 $*$ 取必然算子 $\Box$ 时,得到的是单模态逻辑语言 ML ; 当 $*$ 既可以取 $\Box$ 也可以取 $\Diamond$ 时,得到的是带必然算子和弱必然算子的双模态逻辑语言 ML^+ 。给定公式 φ 和 ψ , 规定 $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$, $\Diamond\varphi$ 以及 $\Diamond\varphi$ 分别是 $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, $\neg\varphi \vee \psi$, $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$, $\neg\Box\neg\varphi$ 以及 $\neg\Box\neg\varphi$ 的缩写。直观上, $\Box\varphi$ 、 $\Diamond\varphi$ 、 $\Box\varphi$ 以及 $\Diamond\varphi$ 分别可以读作:“ φ 是弱必然的”, “ φ 是强可能的”, “ φ 是必然的”以及“ φ 是可能的”。

accident)。称一个命题具有强偶性,当且仅当该命题成立但其否定必然不成立。显然,任何满足强偶性的命题都是“超偶然真理”,但反之不必然。

一个 Kripke 模型（以下简称模型）是一个三元组 $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ，其中 W 是一个非空的可能世界集合， $R \subseteq W^2$ 是 W 上的二元可及关系，赋值函数 $V: \Phi \mapsto 2^W$ 给每个原子命题指派一个满足它的可能世界集合。二元组 $\mathcal{F} = (W, R)$ 被称为 $\mathcal{M}$ 所基于的框架。对于 $w \in W$ ，称 $(\mathcal{M}, w)$ 是一个点模型。公式在点模型上的真值条件被归纳定义为：

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{M}, w) \models p & \quad \text{当且仅当} \quad w \in V(p); \\
 (\mathcal{M}, w) \models \neg\varphi & \quad \text{当且仅当} \quad (\mathcal{M}, w) \not\models \varphi; \\
 (\mathcal{M}, w) \models \varphi \wedge \psi & \quad \text{当且仅当} \quad (\mathcal{M}, w) \models \varphi \text{ 且 } (\mathcal{M}, w) \models \psi; \\
 (\mathcal{M}, w) \models \Box\varphi & \quad \text{当且仅当} \quad \text{对任意的 } v \in W, \text{ 若 } w \neq v \text{ 且 } wRv, \text{ 则} \\
 & \quad (\mathcal{M}, v) \models \varphi; \\
 (\mathcal{M}, w) \models \Box\varphi & \quad \text{当且仅当} \quad \text{对任意的 } v \in W, \text{ 若 } wRv \text{ 则 } (\mathcal{M}, v) \models \varphi.
 \end{aligned}$$

由上述定义不难得出 $\Diamond\varphi$ 的真值条件：

$$(\mathcal{M}, w) \models \Diamond\varphi \text{ 当且仅当存在 } v \in W, w \neq v, wRv \text{ 且 } (\mathcal{M}, v) \models \varphi$$

这就是说， $\Diamond\varphi$ 在 w 上是真的，当且仅当存在某个 w 可及的但又不同于 w 本身的可能世界 v ， φ 在 v 上是真的，即在世界 w 中 φ 是强可能的。

给定可及关系 R ，令 $R^- = \{(w, v) \in R \mid w \neq v\}$ ，那么 $\Box\varphi$ 的真值条件可以被重新表述为必然型模态的“常规”形式：

$$(\mathcal{M}, w) \models \Box\varphi \text{ 当且仅当对任意的 } v \in W, \text{ 若 } wR^-v \text{ 则 } (\mathcal{M}, v) \models \varphi$$

这表明强可能性算子和弱必然算子在逻辑性质上仍然是一种正规模态。

对于公式集 Γ 和公式 φ ：如果 Γ 中的所有公式都在点模型 $(\mathcal{M}, w)$ 上是真的，那么称 $(\mathcal{M}, w)$ 满足 Γ ；令 $\mathcal{X}$ 是一框架类或模型类，如果对所有 $\mathcal{X}$ 中的模型 $\mathcal{M}$ ，以及 $\mathcal{M}$ 中的世界 w 都有 $(\mathcal{M}, w) \models \Gamma$ 蕴涵 $(\mathcal{M}, w) \models \varphi$ ，那么称在 $\mathcal{X}$ 上 φ 是 Γ 的语义后承，记作 $\Gamma \models_{\mathcal{X}} \varphi$ 。如果 $\emptyset \models_{\mathcal{X}} \varphi$ ，那么称在 $\mathcal{X}$ 上 φ 是有效的，并简记为 $\models_{\mathcal{X}} \varphi$ 。特别地，当 $\mathcal{X}$ 是全部框架构成的类（或全部模型构成的类）时， $\Gamma \models_{\mathcal{X}} \varphi$ 被简记为 $\Gamma \models \varphi$ ，并称 φ 是 Γ 的语义后承，同样地 $\models_{\mathcal{X}} \varphi$ 被简记为 $\models \varphi$ ，并称 φ 是有效的。

通过限制可及关系 R 的性质，我们可以得到许多有趣的框架（模型）类。本文主要考察以下常见的框架（模型）类，其中由同样的可及关系性质所规定的框架类和模型类使用了同样的记法，在下文中易由语境辨别出它们指称的是框架类还是模型类：

记法	名称	可及关系 R 的性质
$\mathcal{D}$	持续框架（模型）类	持续性: $\forall x \exists y (xRy)$
$\mathcal{T}$	自反框架（模型）类	自反性: $\forall x (xRx)$
$\mathcal{A}$	禁自反框架（模型）类	禁自反性: $\forall x (\neg xRx)$
$\mathcal{B}$	对称框架（模型）类	对称性: $\forall x \forall y (xRy \rightarrow yRx)$
$\mathcal{4}$	传递框架（模型）类	传递性: $\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$
$\mathcal{5}$	欧性框架（模型）类	欧性: $\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge xRz \rightarrow yRz)$
$\mathcal{S4}$	自反传递框架（模型）类	自反性 + 传递性
$\mathcal{S5}$	等价框架（模型）类	自反性 + 对称性 + 传递性

此外, 由所有框架（模型）构成的类被记为 $\mathcal{K}$ 。对于框架（模型）类 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$, 我们用 $\mathcal{XY}$ 表示它们的交集。

2.2 与模态逻辑语言的表达力比较

给定模型类 $\mathcal{X}$, 如果对于语言 L_2 中的任何公式 φ 都存在语言 L_1 中的某个公式 ψ , 使得 $\models_{\mathcal{X}} \varphi \leftrightarrow \psi$, 那么称在 $\mathcal{X}$ 上 L_1 的表达力至少和 L_2 一样强, 记作 $L_1 \succeq_{\mathcal{X}} L_2$ 。如果 $L_1 \succeq_{\mathcal{X}} L_2$ 但 $L_2 \not\succeq_{\mathcal{X}} L_1$, 那么称在 $\mathcal{X}$ 上 L_1 的表达力严格强于 L_2 , 记为 $L_1 \succ_{\mathcal{X}} L_2$ 。如果 $L_1 \succeq_{\mathcal{X}} L_2$ 且 $L_2 \succeq_{\mathcal{X}} L_1$, 那么称在 $\mathcal{X}$ 上 L_1 和 L_2 的表达力一样强, 记作 $L_1 \approx_{\mathcal{X}} L_2$ 。如果 $L_1 \not\succeq_{\mathcal{X}} L_2$ 且 $L_2 \not\succeq_{\mathcal{X}} L_1$, 那么称在 $\mathcal{X}$ 上 L_1 和 L_2 的表达力不可比较, 记作 $L_1 \wedge_{\mathcal{X}} L_2$ 。

当可及关系 R 满足禁自反性时, 那么 $R = R^-$, 因而对任何公式 φ 都有 $\models_{\mathcal{A}} \Diamond \varphi \leftrightarrow \Diamond \varphi$ 以及 $\models_{\mathcal{A}} \Box \varphi \leftrightarrow \Box \varphi$ 。此时, 强可能性坍塌为可能性, 必然性坍塌为弱必然性。这说明在禁自反框架中, 强可弱必逻辑语言和模态逻辑语言的表达力一样强, 即 $SW \approx_{\mathcal{A}} ML$ 。

当可及关系 R 满足自反性时, 那么 $R = R^- \cup \{(w, w) \mid w \in W\}$, 因而不难验证对任何公式 φ 都有 $\models_{\mathcal{T}} \Box \varphi \leftrightarrow \Box \varphi \wedge \varphi$ 并且 $\models_{\mathcal{T}} \Diamond \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \Diamond \varphi$ 。因此可以用强可能算子和弱必然算子来定义可能算子和必然算子。这说明在自反模型类中, 强可弱必逻辑语言表达力至少和模态逻辑语言一样强, 即 $SW \succeq_{\mathcal{T}} ML$ 。事实上下文（定理 2）还将进一步表明, 在自反模型类上强可弱必逻辑语言的表达力严格强于模态逻辑语言。

在更多的模型类中这两种语言的表达力不可比较, 其证明思路是考察它们分辨不同模型的能力。给定语言 L , 称点模型 $(\mathcal{M}, w)$ 和 $(\mathcal{M}', w')$ 是 L 等

价的, 记作 $(\mathcal{M}, w) \equiv_L (\mathcal{M}', w')$, 如果对任何 L 公式 φ 都有 $(\mathcal{M}, w) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{M}', w') \models \varphi$ 。当 $(\mathcal{M}, w) \equiv_L (\mathcal{M}', w')$ 时, 我们无法利用语言 L 来分辨这两个模型。一个语言的表达力越强, 它分辨模型的能力也越强。显然, 如果可以构造出两个基于 $\mathcal{X}$ 的点模型 $(\mathcal{M}, w)$ 和 $(\mathcal{M}', w')$, 使得 $(\mathcal{M}, w) \equiv_{L_1} (\mathcal{M}', w')$ 但 $(\mathcal{M}, w) \not\equiv_{L_2} (\mathcal{M}', w')$, 那么 $L_1 \not\preceq_{\mathcal{X}} L_2$ 。

如何发现两个模型是否关于某个语言等价? 在模态逻辑中, 互模拟为我们发现模态不变性提供了基础。但是相对于我们的新语义, 需要对互模拟关系加以修订。

定义 1 ($\diamond$ 互模拟和 $\diamond$ 互模拟)。给定模型 $\mathcal{M} = (W, R, V)$ 和 $\mathcal{M}' = (W', R', V')$ 。称二元关系 $Z \subseteq W \times W'$ 是 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 之间的 $\diamond$ 互模拟, 记为 $Z: \mathcal{M} \stackrel{\diamond}{\sim} \mathcal{M}'$, 如果下述条件成立:

- (1) 如果 wZw' 那么 w 和 w' 满足同样的原子命题;
- (2) 如果 wZw' , wRv 并且 $w \neq v$, 那么存在 ($\mathcal{M}'$ 中的) v' 使得 vZv' , $w'R'v'$ 并且 $w' \neq v'$;
- (3) 如果 wZw' , $w'R'v'$ 并且 $w' \neq v'$, 那么存在 ($\mathcal{M}$ 中的) v 使得 vZv' , wRv 并且 $w \neq v$ 。

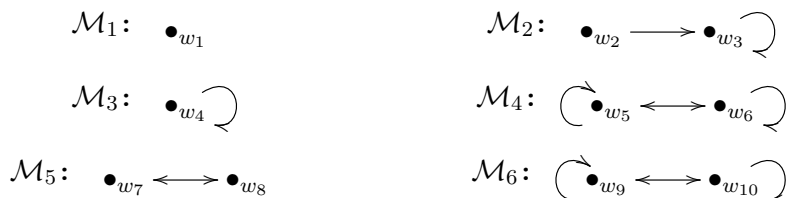
如果存在 Z 使得它是将 $\mathcal{M}$ 中的 w 以及 $\mathcal{M}'$ 中的 w' 连接起来的 $\diamond$ 互模拟, 那么称 w 和 w' 之间 $\diamond$ 互相似, 记作 $(\mathcal{M}, w) \stackrel{\diamond}{\sim} (\mathcal{M}', w')$ 。

若将上述条款 (2) 和 (3) 修改为:

- (2') 如果 wZw' 且 wRv , 那么存在 ($\mathcal{M}'$ 中的) v' 使得 vZv' 并且 $w'R'v'$;
- (3') 如果 wZw' 且 $w'R'v'$, 那么存在 ($\mathcal{M}$ 中的) v 使得 vZv' 并且 wRv ;

那么我们得到了通常的互模拟关系, 这里不妨把它称做 $\diamond$ 互模拟关系。

例 1. 考虑如下模型, 其中 $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ 满足同样的原子命题, $\{w_7, w_9\}$ 满足同样的原子命题, $\{w_8, w_{10}\}$ 满足同样的原子命题, 其余的世界所满足的原子命题不尽相同:



注意这些模型中,除了 $\mathcal{M}_1$ 其他都满足持续性,除了 $\mathcal{M}_2$ 其他都满足对称性,除了 $\mathcal{M}_5$ 其他都满足传递性以及欧性,并且只有 $\mathcal{M}_3$ 、 $\mathcal{M}_4$ 和 $\mathcal{M}_6$ 满足自反性。不难验证, $(\mathcal{M}_1, w_1) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}_2, w_3) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}_3, w_4)$, $(\mathcal{M}_4, w_5) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}_4, w_6)$, $(\mathcal{M}_5, w_7) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}_6, w_9)$, $(\mathcal{M}_5, w_8) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}_6, w_{10})$, 其余的世界两两不 $\Diamond$ 互相似; $(\mathcal{M}_2, w_2) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}_2, w_3) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}_3, w_4) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}_4, w_5) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}_4, w_6)$, 其余的世界两两不 $\Diamond$ 互相似。

从例1可以看出, $\Diamond$ 互模拟和 $\Diamond$ 互模拟相互不蕴涵对方。但是它们仍然存在着紧密的联系:

命题1. 对于模型 $\mathcal{M} = (W, R, V)$, 令 $\mathcal{M}^- = (W, R^-, V)$ 。那么对任何点模型 $(\mathcal{M}, w)$ 和 $(\mathcal{M}', w')$, $(\mathcal{M}, w) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}', w')$ 当且仅当 $(\mathcal{M}^-, w) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}'^-, w')$ 。

证明. 只要注意到对任何 $Z \subseteq W \times W'$ 都有:

$$Z: \mathcal{M} \leftrightarrow_{\Diamond} \mathcal{M}' \iff Z: \mathcal{M}^- \leftrightarrow_{\Diamond} \mathcal{M}'^-$$

那么结论显然成立。 $\square$

互模拟是通向模态不变性的阶梯, 因为存在着下述定理:

定理1. 对任意点模型 $(\mathcal{M}, w)$ 和 $(\mathcal{M}', w')$,

- (1) 如果 $(\mathcal{M}, w) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}', w')$, 那么 $(\mathcal{M}, w) \equiv_{ML} (\mathcal{M}', w')$;
- (2) 如果 $(\mathcal{M}, w)$ 和 $(\mathcal{M}', w')$ 是有限模型并且 $(\mathcal{M}, w) \equiv_{ML} (\mathcal{M}', w')$, 那么 $(\mathcal{M}, w) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}', w')$;
- (3) 如果 $(\mathcal{M}, w) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}', w')$, 那么 $(\mathcal{M}, w) \equiv_{SW} (\mathcal{M}', w')$;
- (4) 如果 $(\mathcal{M}, w)$ 和 $(\mathcal{M}', w')$ 是有限模型并且 $(\mathcal{M}, w) \equiv_{SW} (\mathcal{M}', w')$, 那么 $(\mathcal{M}, w) \leftrightarrow_{\Diamond} (\mathcal{M}', w')$ 。

证明. (1) 和 (2) 的证明请参考 [1] 第 67 页定理 2.20, 第 69 页定理 2.24。 (3) 和 (4) 仿照之亦容易证明。 $\square$

因此, 对于有限模型而言, $\Diamond$ 互相似等同于 SW 等价, $\Diamond$ 互相似等同于 ML 等价。这样在例1中, 我们就构造出了一些 ML 等价但 SW 不等价的模型, 以及一些 SW 等价但 ML 不等价的模型, 从而我们得到了下述结论:

定理2. 对模型类 $\mathcal{X} \in \{T, TB, S4, S5\}$, 有 $SW \succ_{\mathcal{X}} ML$ 。对模型类 $\mathcal{X} \in \{K, D, B, 4, 5, 45, DB, B45\}$, 有 $SW \preceq_{\mathcal{X}} ML$ 。

2.3 与一阶语言的表达力比较

每个 Kripke 模型都可以被自然转化为一个一阶模型，因此我们可以对模态语言和一阶语言的表达力进行比较。众所周知，在模型层面上模态语言是一阶语言的互模拟不变片段。对于强可弱必逻辑也存在着类似的结果。

每个 SW 公式都存在着一个与之语义等价的一阶对应公式，该公式被称作原公式的标准翻译，它含有且仅含有一个自由变元。令 x 是一个一阶变元，标准翻译 ST_x 是一个从 SW 公式到一阶公式的映射，它被递归地定义为：

$$\begin{aligned} ST_x(p) &:= Px \\ ST_x(\neg\varphi) &:= \neg ST_x(\varphi) \\ ST_x(\varphi \wedge \psi) &:= ST_x(\varphi) \wedge ST_x(\psi) \\ ST_x(\Box\varphi) &:= \forall y (x \neq y \wedge xRy \rightarrow ST_y(\varphi)) \end{aligned}$$

类似于 van Benthem 刻画定理的证明 ([1], 第 103 页定理 2.68) 我们有如下的刻画定理：

定理 3 (刻画定理). 令 $\alpha(x)$ 是一个一阶公式。那么 $\alpha(x)$ 相对于 $\Diamond$ 互模拟不变，当且仅当它等价于某个 SW 公式的标准翻译。

因此，在模型层面上强可弱必逻辑语言 SW 是一阶语言的 $\Diamond$ 互模拟不变片段。

3 强可弱必逻辑：公理化与完备性

本节将给出强可弱必逻辑的极小公理系统以及它关于各种框架类的扩张系统，并证明它们的可靠完全性。这里先对一些必要的预备概念和引理作些说明。注意，在非指明的情况下本节所说的公式均指 SW 公式。

一个公理系统 $\mathbf{L}$ 由若干公理和推理规则构成。如果只使用这些公理和推理规则能推导出公式 φ 的话，那么称 φ 是 $\mathbf{L}$ 的定理，记作 $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ 。如果公式集 Γ 中存在 $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ 使得 $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$ ，那么称在 $\mathbf{L}$ 下可由 Γ 衍推出 φ ，记作 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ 。称公式集 Γ 是 $\mathbf{L}$ 一致的，如果 $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{L}} p \wedge \neg p$ 。如果 $\mathbf{L}$ 是经典命题逻辑的扩充的话，那么对任何公式集 Γ 和公式 φ 有： $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 是 $\mathbf{L}$ 不一致的，当且仅当 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ 。

证明某个公理系统 $\mathbf{L}$ 相对于框架类 $\mathcal{F}$ 是完全的，其通常的思路是先证明对于每个 $\mathbf{L}$ 一致的集合都存在一个基于 $\mathcal{F}$ 的点模型 $(\mathcal{M}, s)$ ，使得 $(\mathcal{M}, s)$ 满足

Γ 。这时,若有 $\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$, 那么 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 不可被任何基于 $\mathcal{F}$ 的点模型满足,从而 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 是 $\mathbf{L}$ 不一致的,因此有 $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ 。这说明了 $\mathbf{L}$ 关于框架类 $\mathcal{F}$ 是完全的。

典范模型方法是为一组一致集寻找满足它的模型的标准方法,其思想是利用逻辑系统的语形特征来构建语义模型。典范模型方法非常依赖于极大一致集的概念。给定公理系统 $\mathbf{L}$, 称公式集 Γ 是 $\mathbf{L}$ 极大一致集, 当且仅当 (i) Γ 是 $\mathbf{L}$ 一致的, (ii) Γ 是极大的, 即对所有 $\mathbf{L}$ 一致集 Γ' , 若 $\Gamma \subseteq \Gamma'$, 那么 $\Gamma = \Gamma'$ 。所有 $\mathbf{L}$ 极大一致集构成的集合被记为 $\text{MCS}(\mathbf{L})$ 。关于极大一致集, 有如下重要性质:

引理 1. 令 $\mathbf{L}$ 是一个包含经典命题逻辑的扩张系统, Γ 是任意 $\mathbf{L}$ 极大一致集, 那么

- (1) 任何 $\mathbf{L}$ 一致集都可以扩充为 $\mathbf{L}$ 极大一致集; (*Lindenbaum* 引理)
- (2) 对任何公式 φ , 或者 $\varphi \in \Gamma$, 或者 $\neg\varphi \in \Gamma$;
- (3) 若 $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \in \Gamma$, 那么 $\psi \in \Gamma$;
- (4) $\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \in \Gamma$ 当且仅当对所有 $i \in \{0, \dots, n\}$, $\varphi_i \in \Gamma$;
- (5) $\varphi_0 \vee \cdots \vee \varphi_n \in \Gamma$ 当且仅当存在 $i \in \{0, \dots, n\}$ 使得 $\varphi_i \in \Gamma$ 。

3.1 极小系统

强可弱必逻辑的极小系统 $\Box\mathbf{K}$ 在形态上类似于正规模态逻辑极小系统 $\mathbf{K}$, 即它包含如下的公理模式和推理规则:

- (Taut) 所有经典命题逻辑重言式的代入例
 ($\Box\mathbf{K}$) $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
 (M.P.) 由 $\varphi \rightarrow \psi$ 和 ψ , 可得 ψ
 ($\Box\mathbf{N}$) 由 φ 可得 $\Box\varphi$

不难验证, $\Box\mathbf{K}$ 的所有公理和推理规则在所有框架上都是有效的。

为了得到更具有普遍性的结果, 我们考虑 $\Box\mathbf{K}$ 的任意一致正规扩张 $\mathbf{L}$ (即, $\mathbf{L}$ 包含 $\Box\mathbf{K}$ 的所有公理, $p \wedge \neg p$ 不是 $\mathbf{L}$ 的定理, 并且 $\mathbf{L}$ 在 ($\Box\mathbf{N}$) 和 (M.P.) 下封闭)。因为 $\mathbf{L}$ 包含了 $\Box\mathbf{K}$, 容易证明如下的引理:

引理 2. 对任何 $\mathbf{L}$ 极大一致集 Γ , 若 $\Box\varphi \notin \Gamma$, 那么 $\Box^-(\Gamma) \cup \{\neg\varphi\}$ 是 $\mathbf{L}$ 一致的。其中, $\Box^-(\Gamma) = \{\varphi \in SW \mid \Box\varphi \in \Gamma\}$ 。

集合 $\Box^-(\Gamma)$ 也被称为 Γ 的去弱必然化集。

我们将尝试为 $\mathbf{L}$ 构建典范模型。对此，一个自然的思路是：用 $\text{MCS}(\mathbf{L})$ 作为其典范模型的可能世界集，并规定 $\mathbf{L}$ 极大一致集 Γ' 对于 $\mathbf{L}$ 极大一致集 Γ 是可及的，当且仅当 $\mathbf{L}$ 的去弱必然化集合 $\Box^-(\Gamma)$ 包含于 Γ 。但这样构建的典范模型是不可行的。考虑集合 $S = \{\Box\varphi \leftrightarrow \varphi \mid \varphi \in SW\}$ ，当它是 $\mathbf{L}$ 一致的时候，它可以被扩张为 $\mathbf{L}$ 极大一致集 Γ 。从 Γ 所包含的命题来看，它声称它有且仅有一个非它自身的可及世界，而这个世界所包含的命题又和 Γ 完全相同。然而作为极大一致集，这个和 Γ 包含了一样的命题的可能世界又只能是 Γ 本身，矛盾！

对此的解决方法是为每一个“有问题的” $\mathbf{L}$ 极大一致集建立一个它的副本。⁷ 所谓“有问题的” $\mathbf{L}$ 极大一致集，指的是那些包含所有形如 $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ 的公式的 $\mathbf{L}$ 极大一致集。这样的 $\mathbf{L}$ 极大一致集之所以是“有问题的”，因为它暗示了存在某个它可及的世界，这个世界不同于它，但又和它满足完全相同的命题。因为形式上 $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ 是模态逻辑的 (T) 公理，所以我们将所有“有问题的” $\mathbf{L}$ 极大一致集所构成的集合记为 $\mathbb{T}(\mathbf{L})$ ，并令 $\overline{\mathbb{T}(\mathbf{L})} = \text{MCS}(\mathbf{L})/\mathbb{T}(\mathbf{L})$ 。由于极大一致集的性质（引理 1），容易证明：对所有 $\mathbf{L}$ 极大一致集 Γ ， $\Gamma \in \mathbb{T}(\mathbf{L})$ 当且仅当 $\Box^-(\Gamma) \subseteq \Gamma$ 。

语言 SW 对于所描述的世界是否满足自反性无所说，即我们不能通过它的语句来判断某个世界是否是其自身的可及世界。这既为我们构造典范模型造成了一定的障碍，但也提供了一些灵活性。这就是说，我们可以自己调整可及关系，使之满足自反性或不满足自反性。这里我们希望构造的是满足自反性的典范模型。

定义 2 (自反典范模型). 给定任意 $\Box\mathbf{K}$ 的一致正规扩张 $\mathbf{L}$ ，定义 $\mathbf{L}$ 的自反典范模型为 $\mathcal{RC}(\mathbf{L}) = (W, R, V)$ ，其中

- $W = (\{0, 1\} \times \mathbb{T}(\mathbf{L})) \cup (\{2\} \times \overline{\mathbb{T}(\mathbf{L})})$
- $R = \{((n_1, \Gamma_1), (n_2, \Gamma_2)) \in W^2 \mid (n_1, \Gamma_1) = (n_2, \Gamma_2) \text{ 或 } \Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2\}$
- 对任意原子命题 p ， $V(p) = \{(n, \Gamma) \in W \mid p \in \Gamma\}$

注意，根据我们对 R 定义，显然 R 是自反的。对于 $(n, \Gamma) \in W$ ，参数 n 表明了 $\mathbf{L}$ 极大一致集 Γ 的性质：当 $\Gamma \notin \mathbb{T}(\mathbf{L})$ 时， n 的取值只能是 2，此时 $(2, \Gamma)$ 没有额外的副本；当 $\Gamma \in \mathbb{T}(\mathbf{L})$ 时， n 取值为 0 或 1，此时 $(0, \Gamma)$ 和 $(1, \Gamma)$ 互为对方的副本。

⁷ 本文建立副本的技巧与文献 [14, 16] 中的“bulldozing”方法类似。

引理 3 ($\mathcal{RC}(\mathbf{L})$ 的真值引理). 给定任意 $\Box\mathbf{K}$ 的一致正规扩张 $\mathbf{L}$, 令 $\mathcal{RC}(\mathbf{L}) = (W, R, V)$ 是其自反典范模型, 那么对任意 $(n, \Gamma) \in W$ 以及任意公式 φ 都有:

$$\varphi \in \Gamma \iff (\mathcal{RC}(\mathbf{L}), (n, \Gamma)) \models \varphi$$

证明. 我们对公式结构归纳, 布尔情况易证, 这里只考虑 $\varphi = \Box\alpha$ 的情况。

首先, 当 $\Box\alpha \in \Gamma$ 时, 那么 $\alpha \in \Box^-(\Gamma)$, 因而由定义 2 可知对 W 中的任意元素 $(m, \Gamma') \neq (n, \Gamma)$, 若 $(n, \Gamma)R(m, \Gamma')$, 那么 $\alpha \in \Gamma'$, 再由归纳假设, 有 $(\mathcal{RC}(\mathbf{L}), (m, \Gamma')) \models \alpha$ 。由 $\Box\alpha$ 的真值条件可知, $(\mathcal{RC}(\mathbf{L}), (n, \Gamma)) \models \Box\alpha$ 。

其次, 当 $\Box\alpha \notin \Gamma$ 时, 由 $\Box\alpha \notin \Gamma$ 和引理 2 可知, $\Box^-(\Gamma) \cup \{\neg\alpha\}$ 是 $\mathbf{L}$ 一致的, 从而可以扩充为极大一致集 Γ' 。我们这时分两种情况讨论:

- 情况 1: $n = 2$ 。此时 $\Gamma \notin \mathbb{T}(\mathbf{L})$, 从而存在公式 β 使得 $\Box\beta \in \Gamma$ 但 $\beta \notin \Gamma$ 。因为 $\Box\beta \in \Gamma$, 所以 $\beta \in \Gamma'$ 。又因为 $\beta \notin \Gamma$, 从而 $\Gamma \neq \Gamma'$ 。当 $\Gamma' \in \mathbb{T}(\mathbf{L})$ 时, 我们令 $m = 0$, 否则令 $m = 2$, 因而由定义 2 可知 $(m, \Gamma') \in W$ 。因为 $\Box^-(\Gamma) \subseteq \Gamma'$, 所以 $(n, \Gamma)R(m, \Gamma')$; 因为 $\Gamma \neq \Gamma'$, 有 $(n, \Gamma) \neq (m, \Gamma')$; 因为 $\neg\alpha \in \Gamma'$, 由归纳假设, 有 $(\mathcal{RC}(\mathbf{L}), (m, \Gamma')) \not\models \alpha$ 。因此, 根据 $\Box\alpha$ 的真值条件, 有 $(\mathcal{RC}(\mathbf{L}), (n, \Gamma)) \not\models \Box\alpha$ 。
- 情况 2: $n \in \{0, 1\}$ 。此时 $\Gamma \in \mathbb{T}(\mathbf{L})$, 即 $\Box^-(\Gamma) \subseteq \Gamma$ 。当 $\Gamma' \in \mathbb{T}(\mathbf{L})$ 时, 那么令 $m = 1 - n$, 否则令 $m = 2$ 。因此有 $m \neq n$ 并且 $(m, \Gamma') \in W$ 。从而我们同样有 $(n, \Gamma)R(m, \Gamma')$, $(n, \Gamma) \neq (m, \Gamma')$, 但 $(\mathcal{RC}(\mathbf{L}), (m, \Gamma')) \not\models \alpha$ 。因此, $(\mathcal{RC}(\mathbf{L}), (n, \Gamma)) \not\models \Box\alpha$ 。

□

当我们将引理 3 运用到系统 $\Box\mathbf{K}$ 上时, 我们为每个 $\Box\mathbf{K}$ 极大一致集 Γ 找到了一个满足它的模型: 当 $\Gamma \in \mathbb{T}(\Box\mathbf{K})$ 时, 有 $(\mathcal{RC}(\Box\mathbf{K}), (0, \Gamma)) \models \Gamma$; 当 $\Gamma \notin \mathbb{T}(\Box\mathbf{K})$ 时, 有 $(\mathcal{RC}(\Box\mathbf{K}), (2, \Gamma)) \models \Gamma$ 。而且, 这个模型满足自反性, 从而也满足持续性。又因为 $\Box\mathbf{K}$ 在全框架类上是可靠的, 所以我们得到了如下的完备性结果:

定理 4 ($\Box\mathbf{K}$ 的完备性). 系统 $\Box\mathbf{K}$ 相对于全框架类 $\mathcal{K}$ 、持续框架类 $\mathcal{D}$ 和自反框架类 $\mathcal{T}$ 都是可靠完全的, 即: 对 $\mathcal{X} \in \{\mathcal{K}, \mathcal{D}, \mathcal{T}\}$, 以及任意公式集 Γ 和公式 φ , $\Gamma \vdash_{\Box\mathbf{K}} \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \models_{\mathcal{X}} \varphi$ 。

在下一节中, 我们将引理 3 运用于更多的扩张系统上去。

3.2 扩张系统

本节将要考察如下的特征公理（模式）和扩张系统：

特征公理	扩张系统
$(\Box B) \quad \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$	$\Box B = \Box K + (\Box B); \Box 4 = \Box K + (\Box 4)$
$(\Box B') \quad \Box(\varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi)$	$\Box 5 = \Box K + (\Box B') + (\Box 5)$
$(\Box 4) \quad \Box \varphi \wedge \psi \rightarrow \Box \Box(\varphi \vee \psi)$	$\Box B4 = \Box K + (\Box B) + (\Box 4)$
$(\Box 5) \quad \Diamond \varphi \rightarrow \Box(\varphi \vee \Diamond \varphi)$	$\Box B5 = \Box K + (\Box B) + (\Box 5)$

在证明扩张系统的语义完全性之前，我们需要对这些公理和系统的性质作简要讨论。首先，这些公理的命名会让人自然联想到模态逻辑的 (B)、(4) 以及 (5) 公理。我们知道 (B)、(4)、(5) 公理分别定义了对称性、传递性以及欧性。⁸ 那么公理 $(\Box B)$ 、 $(\Box B')$ 、 $(\Box 4)$ 以及 $(\Box 5)$ 是否也定义了相应的框架性质呢？不难验证，除了 $(\Box B)$ 公理，它们所定义的框架性质要更弱一些。

命题 2.

公理 $(\Box B)$ 定义了对称性： $\forall x \forall y (xRy \rightarrow yRx)$ ；

公理 $(\Box B')$ 定义了弱对称性： $\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge yRz \rightarrow zRy \vee x = y)$ ；

公理 $(\Box 4)$ 定义了弱传递性： $\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge yRz \rightarrow xRy \vee x = z)$ ；

公理 $(\Box 5)$ 定义了弱欧性： $\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge xRz \rightarrow yRz \vee x = z \vee y = z)$ 。

这里作五点评论，其正确性请读者自行验证：(1) 系统 $\Box B4$ 和系统 $\Box B5$ 是等价的；(2) 对于任何包含有 $(\Box 4)$ 的扩张系统，若将 $(\Box 4)$ 替换为 $(\Box 4')$ ： $\Box \varphi \wedge \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$ ，那么得到的新系统与原系统是等价的；(3) 对称性蕴涵弱对称性，传递性蕴涵弱传递性，欧性蕴涵弱对称性以及弱欧性；(4) 不存在 *SW* 公式能够定义持续性、自反性、传递性和欧性；(5) 尽管如此，模态语言仍然能够定义弱对称性、弱传递性和弱欧性（见命题 3）。

命题 3. 存在模态公式可以定义弱对称性、弱传递性和弱欧性，具体而言：

模态公式 $\varphi \rightarrow \Box(\psi \rightarrow \Box \Diamond \psi \vee \varphi)$ 定义了弱对称性；

模态公式 $\Box \varphi \wedge \psi \rightarrow \Box \Box(\varphi \vee \psi)$ （或者 $\Box \varphi \wedge \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$ ）定义了弱传递性；

模态公式 $\varphi \rightarrow \Box(\psi \rightarrow \varphi) \vee \Box(\psi \vee \Diamond \psi)$ 定义了弱欧性。

⁸称公式 φ 定义了框架性质 P ，指的是对所有框架 F ， F 具有性质 P 当且仅当 φ 在 F 上有效。

通过以上讨论, 可得关于上述扩张系统的可靠性结果:

命题 4.

- (1) $(\Box B)$ 和 $(\Box B')$ 在对称框架类 $\mathcal{B}$ 上是有效的: $\models_{\mathcal{B}} (\Box B)$ 并且 $\models_{\mathcal{B}} (\Box B')$;
- (2) $(\Box 4)$ 在传递框架类 $\mathcal{4}$ 上是有效的: $\models_{\mathcal{4}} (\Box 4)$;
- (3) $(\Box 5)$ 和 $(\Box B')$ 在欧性框架类 $\mathcal{5}$ 上是有效的: $\models_{\mathcal{5}} (\Box 5)$ 并且 $\models_{\mathcal{5}} (\Box B')$;
- (4) 系统 $\Box B$ 在对称框架类 $\mathcal{B}$ 上是可靠的: 若 $\Gamma \vdash_{\Box B} \varphi$ 则 $\Gamma \models_{\mathcal{B}} \varphi$;
- (5) 系统 $\Box 4$ 在传递框架类 $\mathcal{4}$ 上是可靠的: 若 $\Gamma \vdash_{\Box 4} \varphi$ 则 $\Gamma \models_{\mathcal{4}} \varphi$;
- (6) 系统 $\Box 5$ 在欧性框架类 $\mathcal{5}$ 上是可靠的: 若 $\Gamma \vdash_{\Box 5} \varphi$ 则 $\Gamma \models_{\mathcal{5}} \varphi$;
- (7) 系统 $\Box B4$ 和系统 $\Box B5$ 在对称传递框架类 $\mathcal{B4}$ (以及对称欧性框架类 $\mathcal{B5}$, 这两个框架类在外延上相等) 上是可靠的: 若 $\Gamma \vdash_{\Box B4} \varphi$ 则 $\Gamma \models_{\mathcal{B4}} \varphi$ 。

接下来我们考虑这些扩张系统的语义完全性。我们希望能将引理 3 运用于对这些系统的完全性证明上, 这要求我们证明它们的自反典范模型满足相应的框架性质。

引理 4. 对于系统 $\Box 4$ 的任意一致正规扩张 $\mathbf{L}$, 其自反典范模型 $\mathcal{RC}(\mathbf{L}) = (W, R, V)$ 都基于传递框架。

证明. 我们假设 $(n_1, \Gamma_1)R(n_2, \Gamma_2)$ 且 $(n_2, \Gamma_2)R(n_3, \Gamma_3)$, 以此来证明 $(n_1, \Gamma_1)R(n_3, \Gamma_3)$ 。当 $(n_1, \Gamma_1) = (n_3, \Gamma_3)$ 或者 $(n_1, \Gamma_1) = (n_2, \Gamma_2)$ 或者 $(n_2, \Gamma_2) = (n_3, \Gamma_3)$ 时, 因为 $\mathcal{RC}(\mathbf{L})$ 基于自反框架, 我们立刻有所需结论, 所以我们仅需考虑这三者两两不相等的情况, 此时 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2$ 并且 $\Box^-(\Gamma_2) \subseteq \Gamma_3$, 而我们需要证明 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_3$ 。令 φ 是属于 $\Box^-(\Gamma_1)$ 的任意公式, 即 $\Box\varphi \in \Gamma_1$ 。如果 $\Gamma_1 = \Gamma_3$, 那么必然 $n_1 \neq n_3$, 因此有 $n_1, n_3 \in \{0, 1\}$ 而且 $\Gamma_1 = \Gamma_3 \in \mathbb{T}(\mathbf{L})$, 此时 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_1 = \Gamma_3$, 即所需结论成立。如果 $\Gamma_1 \neq \Gamma_3$, 那么不妨假设 $\psi \in \Gamma_1$ 而 $\neg\psi \in \Gamma_3$ 。由公理 $(\Box 4)$ 可知 $\Box\varphi \wedge \psi \rightarrow \Box\Box(\varphi \vee \psi) \in \Gamma_1$, 又因为 $\Box\varphi \in \Gamma_1$ 且 $\psi \in \Gamma_1$ 所以有 $\Box\Box(\varphi \vee \psi) \in \Gamma_1$ 。因为 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2$, 所以 $\Box(\varphi \vee \psi) \in \Gamma_2$, 又因为 $\Box^-(\Gamma_2) \subseteq \Gamma_3$, 所以 $\varphi \vee \psi \in \Gamma_2$, 再由于 $\neg\psi \in \Gamma_3$, 所以 $\varphi \in \Gamma_3$ 。因为 φ 的任意性, 所以有 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_3$, 因而 $(n_1, \Gamma_1)R(n_3, \Gamma_3)$ 。□

引理 5. 对于系统 $\Box B$ 的任意一致正规扩张 $\mathbf{L}$, 其自反典范模型 $\mathcal{RC}(\mathbf{L}) = (W, R, V)$ 都基于对称框架。

证明. 我们假设 $(n_1, \Gamma_1)R(n_2, \Gamma_2)$, 以此来证明 $(n_2, \Gamma_2)R(n_1, \Gamma_1)$ 。当 $(n_1, \Gamma_1) = (n_2, \Gamma_2)$ 时, 因为 $\mathcal{RC}(\mathbf{L})$ 基于自反框架, 所以结论直接成立。因此, 我们考虑

$(n_1, \Gamma_1) \neq (n_2, \Gamma_2)$ 的情况, 此时有 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2$, 而我们需要证明 $\Box^-(\Gamma_2) \subseteq \Gamma_1$ 。考虑任意公式 φ , 并假设 $\varphi \notin \Gamma_1$, 这等价于 $\neg\varphi \in \Gamma_1$ 。又由公理 $(\Box B)$ 有 $\neg\varphi \rightarrow \Box\Diamond\neg\varphi \in \Gamma_1$, 因此 $\Box\Diamond\neg\varphi \in \Gamma_1$ 。再由 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2$, 有 $\Diamond\neg\varphi \in \Gamma_2$, 因此 $\Box\varphi \notin \Gamma_2$ 。由 φ 的任意性, 有 $\Box^-(\Gamma_2) \subseteq \Gamma_1$ 。□

因此, $\mathcal{RC}(\Box B)$ 、 $\mathcal{RC}(\Box 4)$ 和 $\mathcal{RC}(\Box B4)$ ($= \mathcal{RC}(\Box B5)$) 分别基于自反对称框架、自反传递框架以及等价框架 (即自反对称传递框架), 从而利用引理 3 (以及命题 4) 我们有如下的完备性结果:

定理 5 ($\Box B$ 、 $\Box 4$ 、 $\Box B4$ 、 $\Box B5$ 的完备性).

- (1) 系统 $\Box B$ 相对于对称框架类 $\mathcal{B}$ 、持续对称框架类 $\mathcal{DB}$ 以及自反对称框架类 $\mathcal{TB}$ 都是可靠完全的;
- (2) 系统 $\Box 4$ 相对于传递框架类 $\mathcal{4}$ 、持续传递框架类 $\mathcal{D4}$ 以及自反传递框架类 $\mathcal{S4}$ 都是可靠完全的;
- (3) 系统 $\Box B4$ 及其等价系统 $\Box B5$ 相对于对称传递框架类 $\mathcal{B4}$ (它等同于对称欧性框架类 $\mathcal{B5}$) 以及等价框架类 $\mathcal{S5}$ 都是可靠完全的。

目前为止都很顺利, 但是对于系统 $\Box 5$ 而言却存在着麻烦, 因为它的自反典范模型不满足欧性。为此, 我们需要为它构造新的典范模型, 这个典范模型满足欧性但不满足自反性。我们的做法是对 $\Box 5$ 极大一致集进一步分类。首先定义 $\Lambda_B = \{\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi \mid \varphi \text{ 是任意 } SW \text{ 公式}\}$, 再定义 $\mathbb{B}(\Box 5) = \{\Gamma \in \text{MCS}(\Box 5) \mid \Lambda_B \subseteq \Gamma\}$ 。因此若 $\Gamma \in \mathbb{B}(\Box 5)$, 那么 Γ 包含了公理 $(\Box B)$: $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ 的所有代入例, 从直观上来讲这样的 Γ 似乎“声称”自己满足对称性; 反之那些 $\mathbb{B}(\Box 5)$ 以外的 $\Box 5$ 极大一致集, 它们构成的集合被记为 $\overline{\mathbb{B}(\Box 5)}$, 则“声称”自己不满足对称性。另外, 由于 $\Box 5$ 包含了公理 $(\Box B')$: $\Box(\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi)$, 所以任何 $\Box 5$ 极大一致集 Γ 都满足 $\Lambda_B \subseteq \Box^-(\Gamma)$ 。因此, 若 $\Gamma \in \mathbb{T}(\Box 5)$, 即 $\Box^-(\Gamma) \subseteq \Gamma$, 那么 $\Lambda_B \subseteq \Gamma$, 即 $\Gamma \in \mathbb{B}(\Box 5)$ 。这说明了 $\mathbb{T}(\Box 5) \subseteq \mathbb{B}(\Box 5)$ 。因此 $\text{MCS}(\Box 5)$ 可以被完整地划分为三个部分: $\mathbb{T}(\Box 5)$ 、 $\mathbb{B}(\Box 5)/\mathbb{T}(\Box 5)$ 以及 $\overline{\mathbb{B}(\Box 5)}$ 。在这个基础上, 我们将 $\Box 5$ 的典范模型构造如下:

定义 3 ($\Box 5$ 典范模型). 定义 $\Box 5$ 的典范模型为 $\mathcal{CM}^5 = (W, R, V)$, 其中

- $W = (\{0, 1\} \times \mathbb{T}(\Box 5)) \cup (\{2\} \times (\mathbb{B}(\Box 5)/\mathbb{T}(\Box 5))) \cup (\{3\} \times \overline{\mathbb{B}(\Box 5)})$
- $R = \{((n_1, \Gamma_1), (n_2, \Gamma_2)) \in W^2 \mid n_2 \neq 3 \text{ 并且 } [\text{或者 } (n_1, \Gamma_1) = (n_2, \Gamma_2), \text{ 或者 } \Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2]\}$

- 对任意原子命题 p , $V(p) = \{(n, \Gamma) \in W \mid p \in \Gamma\}$

和自反典范模型的情形类似, 对于 $\mathcal{CM}^5$ 中的世界 (n, Γ) , 参数 n 规定了 Γ 的性质。当 $n \in \{0, 1\}$ 时, $\Gamma \in \mathbb{T}(\Box 5)$, 并且存在一个 (n, Γ) 的副本 $(1 - n, \Gamma)$; 当 $n \in \{0, 1, 2\}$ 时, $\Gamma \in \mathbb{B}(\Box 5)$, 并且 (n, Γ) 可以连接到自身; 当 $n = 3$ 时, $\Gamma \in \overline{\mathbb{B}(\Box 5)}$, 并且 (n, Γ) 不会被任何世界连接到。

引理 6 ($\mathcal{CM}^5$ 的真值引理). 对任何 $\mathcal{CM}^5$ 中的世界 (n, Γ) 以及任意公式 φ 都有:

$$\varphi \in \Gamma \iff (\mathcal{CM}^5, (n, \Gamma)) \models \varphi$$

证明. 我们对公式结构归纳, 布尔情况易证, 这里只考虑 $\varphi = \Box\alpha$ 的情况。

首先, 当 $\Box\alpha \in \Gamma$ 时, 可知对任意 $(m, \Gamma') \in W$, 若 $(n, \Gamma)R(m, \Gamma')$ 且 $(n, \Gamma) \neq (m, \Gamma')$, 则 $\Box^-(\Gamma) \subseteq \Gamma'$, 因而 $\alpha \in \Gamma'$, 再由归纳假设, 有 $(\mathcal{CM}^5, (m, \Gamma')) \models \alpha$ 。因而由 $\Box\alpha$ 的真值条件可知 $(\mathcal{CM}^5, (n, \Gamma)) \models \Box\alpha$ 。

其次, 当 $\Box\alpha \notin \Gamma$ 时, 那么 $\Box^-(\Gamma) \cup \{\neg\alpha\}$ 一致, 因此可以扩张为极大一致集 Γ' , 并且因为 $\Lambda_B \subseteq \Box^-(\Gamma) \subseteq \Gamma'$, 所以可知 $\Gamma' \in \mathbb{B}(\Box 5)$ 。进一步地, 一方面, 如果 $\Gamma' \in \mathbb{T}(\Box 5)$, 那么令 $m = (n - 1)^{6-2n}$, 易证此时无论 n 取何值, 必然有 $m \neq n$ 且 $m \in \{0, 1\}$, 从而有 $(m, \Gamma') \in W$ 、 $(n, \Gamma) \neq (m, \Gamma')$ 并且 $(n, \Gamma)R(m, \Gamma')$ 。另一方面, 如果 $\Gamma' \notin \mathbb{T}(\Box 5)$, 即 $\Box^-(\Gamma') \not\subseteq \Gamma'$, 又因为 $\Box^-(\Gamma) \subseteq \Gamma'$, 所以 $\Gamma \neq \Gamma'$, 此时令 $m = 2$, 从而也有 $(m, \Gamma') \in W$ 、 $(n, \Gamma) \neq (m, \Gamma')$ 并且 $(n, \Gamma)R(m, \Gamma')$ 。由归纳假设可知 $(\mathcal{CM}^5, (m, \Gamma')) \not\models \alpha$, 从而由 $\Box\alpha$ 的真值条件可知 $(\mathcal{CM}^5, (n, \Gamma)) \not\models \Box\alpha$ 。□

引理 7. $\mathcal{CM}^5 = (W, R, V)$ 基于持续、欧性框架。

证明. 首先证明 $\mathcal{CM}^5 = (W, R, V)$ 基于持续框架。令 $(n, \Gamma) \in W$, 考虑两种情况: 第一, 当 $\Box^-(\Gamma)$ 是不一致的时, 易证 $\Lambda_B \subseteq \Gamma$, 因此 $\Gamma \in \mathbb{B}(\Box 5)$, 从而可知 $n \neq 3$ 。根据定义可知, 此时有 $(n, \Gamma)R(n, \Gamma)$ 。第二, 当 $\Box^-(\Gamma)$ 是一致的时, 那么它可以被扩充为极大一致集 Γ' , 并且因为 $\Lambda_B \subseteq \Box^-(\Gamma) \subseteq \Gamma'$, 所以 $\Gamma' \in \mathbb{B}(\Box 5)$; 进一步地, 如果 $\Gamma' \in \mathbb{T}(\Box 5)$ 则令 $m = 0$ 否则的话令 $m = 2$, 易证 $(m, \Gamma') \in W$ 并且 $(n, \Gamma)R(m, \Gamma)$ 。

接着, 我们证明 $\mathcal{CM}^5 = (W, R, V)$ 基于欧性框架。假设 $(n_1, \Gamma_1)R(n_2, \Gamma_2)$ 并且 $(n_1, \Gamma_1)R(n_3, \Gamma_3)$, 我们以此证明 $(n_2, \Gamma_2)R(n_3, \Gamma_3)$ 。首先注意, 根据定义可知 $n_2, n_3 \in \{0, 1, 2\}$, 这意味着 $\Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathbb{B}(\Box 5)$, 即 $\Lambda_B \subseteq \Gamma_2$ 且 $\Lambda_B \subseteq \Gamma_3$ 。如果 $(n_2, \Gamma_2) = (n_3, \Gamma_3)$, 那么根据定义直接有 $(n_2, \Gamma_2)R(n_3, \Gamma_3)$; 如果 $(n_2, \Gamma_2) \neq$

(n_3, Γ_3) 但 $\Gamma_2 = \Gamma_3$, 那么必然有 $\Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathbb{T}(\Box 5)$, 所以有 $\Box^-(\Gamma_2) \subseteq \Gamma_2 = \Gamma_3$, 因而有 $(n_2, \Gamma_2)R(n_3, \Gamma_3)$ 。因此, 现在仅需考虑 $\Gamma_2 \neq \Gamma_3$ 的情况。这时进一步分为三种情况讨论:

- 情况 1: $(n_1, \Gamma_1) = (n_2, \Gamma_2)$, 那么由 $(n_1, \Gamma_1)R(n_3, \Gamma_3)$ 直接可得 $(n_2, \Gamma_2)R(n_3, \Gamma_3)$ 。
- 情况 2: $(n_1, \Gamma_1) = (n_3, \Gamma_3)$, 那么我们需要证明 $(n_2, \Gamma_2)R(n_1, \Gamma_1)$, 而这意味着需要证明 $\Box^-(\Gamma_2) \subseteq \Gamma_1$ 。令 φ 是任意公式且 $\varphi \notin \Gamma_1$, 这意味着 $\neg\varphi \in \Gamma_1$ 。因为 $n_1 = n_3$, 所以 $n_1 \neq 3$, 从而 $\Gamma_1 \in \mathbb{B}(\Box 5)$, 即 $\Lambda_B \subseteq \Gamma_1$, 从而有 $\neg\varphi \rightarrow \Box\Diamond\neg\varphi \in \Gamma_1$ 。由此以及 $\neg\varphi \in \Gamma_1$ 可得 $\Box\Diamond\neg\varphi \in \Gamma_1$ 。因为 $(n_1, \Gamma_1)R(n_2, \Gamma_2)$ 但 $\Gamma_1 = \Gamma_3 \neq \Gamma_2$, 所以有 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2$ 。又因为已证 $\Box\Diamond\neg\varphi \in \Gamma_1$, 所以 $\Diamond\neg\varphi \in \Gamma_2$, 从而可知 $\Box\varphi \notin \Gamma_2$ 。由 φ 的任意性, 有 $\Box^-(\Gamma_2) \subseteq \Gamma_1$, 从而 $(n_2, \Gamma_2)R(n_1, \Gamma_1)$, 即 $(n_2, \Gamma_2)R(n_3, \Gamma_3)$ 。
- 情况 3: $(n_1, \Gamma_1) \neq (n_2, \Gamma_2)$ 且 $(n_1, \Gamma_1) \neq (n_3, \Gamma_3)$, 此时有 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2$ 且 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_3$, 而我们需要证明 $\Box^-(\Gamma_2) \subseteq \Gamma_3$ 。令 φ 是任意公式并且 $\varphi \notin \Gamma_3$ 。因为 $\Gamma_2 \neq \Gamma_3$, 那么存在 ψ 使得 $\psi \in \Gamma_2$ 但 $\psi \notin \Gamma_3$ 。由 $\varphi \notin \Gamma_3$ 和 $\psi \notin \Gamma_3$ 有 $\varphi \vee \psi \notin \Gamma_3$ 。又由 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_3$, 有 $\Box(\varphi \vee \psi) \notin \Gamma_1$, 因而可知 $\Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \in \Gamma_1$ 。由公理 $(\Box 5)$ 有 $\Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \Box((\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee \Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \in \Gamma_1$, 从而有 $\Box((\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee \Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \in \Gamma_1$ 。再由 $\Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2$, 有 $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee \Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \in \Gamma_2$ 。又因为 $\varphi \in \Gamma_2$, 所以 $\neg\varphi \wedge \neg\psi \notin \Gamma_2$, 从而 $\Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \in \Gamma_2$, 进而可知 $\Diamond\neg\varphi \in \Gamma_2$, 而这意味着 $\Box\varphi \notin \Gamma_2$ 。由 φ 的任意, 有 $\Box^-(\Gamma_2) \subseteq \Gamma_3$, 从而有 $(n_2, \Gamma_2)R(n_3, \Gamma_3)$ 。

□

由引理 6 和引理 7, 以及命题 4, 我们得到了系统 $\Box 5$ 的完备性结果:

定理 6 ($\Box 5$ 的完备性). 系统 $\Box 5$ 相对于欧性框架类 $\mathcal{F}_5$ 以及持续欧性框架类 $\mathcal{D}_5$ 都是可靠完全的。

4 双模态逻辑: 加入必然算子

第 2 节指出在许多框架类上强可弱必逻辑语言 SW 和模态逻辑语言 ML 在表达力上不可比较, 因此包含了必然算子和弱必然算子的双模态语言 ML^+ 的

表达力在许多框架上都严格强于 SW 和 ML 。⁹ 本节将对 ML^+ 的公理系统作一个初步探究, 因而所谈论的公式也均指 ML^+ 公式。

首先, 不难发现以下用于刻画必然算子和弱必然算子之间关系的桥接公理是有效的:

$$(\Box\Box) \quad \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$$

$$(\Box\Box) \quad \Box\varphi \wedge \varphi \rightarrow \Box\varphi$$

给定任意关于 $\Box$ 的正规模态逻辑 $\mathbf{L}$, 令 $\mathbf{L}^+ = \mathbf{L} + (\Box K) + (\Box\Box) + (\Box\Box)$, 那么我们得到了一个同时刻画必然性和弱必然性(以及可能性和强可能性)的逻辑。在很多情况下, $\mathbf{L}^+$ 作为 $\mathbf{L}$ 的双模态扩张都是恰当的。

定义 4. 给定关于 $\Box$ 的正规模态逻辑 $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}^+$ 的典范模型被定义为 $\mathcal{CM}^{\mathbf{L}^+} = (W, R, V)$, 其中

- $W = (\{0, 1\} \times \mathbb{T}(\mathbf{L}^+)) \cup (\{2\} \times \overline{\mathbb{T}(\mathbf{L}^+)})$
- $R = \{((n_1, \Gamma_1), (n_2, \Gamma_2)) \in W^2 \mid \Box^-(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2\}$
- $V(p) = \{(n, \Gamma) \in W \mid p \in \Gamma\}$

其中 $\Box^-\{\Gamma\} = \{\varphi \mid \Box\varphi \in \Gamma\}$ 。

引理 8 ($\mathcal{CM}^{\mathbf{L}^+}$ 的真值引理). 给定关于 $\Box$ 的正规模态逻辑 $\mathbf{L}$, 对于 $\mathcal{CM}^{\mathbf{L}^+} = (W, R, V)$ 中的任意世界 (n, Γ) 以及任意公式 φ 都有:

$$\varphi \in \Gamma \iff (\mathcal{CM}^{\mathbf{L}^+}, (n, \Gamma)) \models \varphi$$

证明. 我们只考虑 $\varphi = \Box\alpha$ 的情况。

首先, 当 $\Box\alpha \in \Gamma$ 时, 那么考虑任意 $(m, \Gamma') \in W$ 满足 $(n, \Gamma) \neq (m, \Gamma')$ 且 $(n, \Gamma)R(m, \Gamma')$ 。一方面, 如果 $\alpha \in \Gamma$, 那么因为公理 $(\Box\Box)$ 有 $\Box\alpha \wedge \alpha \rightarrow \Box\alpha \in \Gamma$, 从而可得 $\Box\alpha \in \Gamma$, 又由 $(n, \Gamma)R(m, \Gamma')$ 可得 $\alpha \in \Gamma'$ 。另一方面, 如果 $\alpha \notin \Gamma$, 那么 $\Gamma \notin \mathbb{T}(\mathbf{L}^+)$, 因而必然有 $\Gamma \neq \Gamma'$, 因此存在 β 使得 $\beta \in \Gamma$ 但是 $\neg\beta \in \Gamma'$, 由 $\beta \in \Gamma$ 和 $\Box\alpha \in \Gamma$ 易得 $\Box(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \beta) \in \Gamma$, 又由公理 $(\Box\Box)$ 有 $\Box(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \beta) \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$, 从而可得 $\Box(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$, 又因为 $(n, \Gamma)R(m, \Gamma')$, 所以有 $\alpha \vee \beta \in \Gamma'$ 。又因为 $\neg\beta \in \Gamma'$, 所以 $\alpha \in \Gamma'$ 。因此, 无论如何都有 $\alpha \in \Gamma'$ 。由归纳假设可得 $(\mathcal{CM}^{\mathbf{L}^+}, (m, \Gamma')) \models \alpha$ 。由 $\Box\alpha$ 的真值条件, 可得 $(\mathcal{CM}^{\mathbf{L}^+}, (n, \Gamma)) \models \Box\alpha$ 。

⁹一个值得注意的事实是混合模态逻辑语言的表达力要比 ML^+ 更强, 因为在混合模态逻辑语言中 $\Box\varphi$ 和 $\Diamond\varphi$ 可以分别被定义为 $\downarrow_i \Box(\neg i \rightarrow \varphi)$ 和 $\downarrow_i \Diamond(\neg i \wedge \varphi)$ 。

其次, 当 $\Box\alpha \notin \Gamma$ 时, $\Box^-(\Gamma) \cup \{\neg\alpha\}$ 一致, 进而可扩充为极大一致集 Γ' 。由公理 $(\Box\Box): \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ 可知 $\Box^-(\Gamma) \subseteq \Box^-(\Gamma')$, 从而有 $\Box^-(\Gamma) \subseteq \Gamma'$ 。如果 $\Gamma = \Gamma'$, 那么可知 $\Gamma \in \mathbb{T}(\mathbf{L}+)$, 从而 $n \in \{0, 1\}$, 此时我们令 $m = 1 - n$; 如果 $\Gamma \neq \Gamma'$, 那么如果 $\Gamma' \in \mathbb{T}(\mathbf{L}+)$, 我们令 $m = 0$, 否则令 $m = 2$ 。在以上各种情况中都有 $(m, \Gamma') \in W$ 、 $(n, \Gamma) \neq (m, \Gamma')$ 并且 $(n, \Gamma)R(m, \Gamma')$ 。由归纳假设可知, $(\mathcal{CM}^{\mathbf{L}+}, (m, \Gamma')) \not\models \alpha$ 。由 $\Box\alpha$ 的真值条件, 可得 $(\mathcal{CM}^{\mathbf{L}+}, (n, \Gamma)) \not\models \Box\alpha$ 。□

容易验证, $\mathcal{CM}^{\mathbf{D}+}$ 、 $\mathcal{CM}^{\mathbf{T}+}$ 、 $\mathcal{CM}^{\mathbf{4}+}$ 、 $\mathcal{CM}^{\mathbf{B}+}$ 、 $\mathcal{CM}^{\mathbf{5}+}$ 、 $\mathcal{CM}^{\mathbf{S4}+}$ 以及 $\mathcal{CM}^{\mathbf{S5}+}$ 分别基于持续框架、自反框架、传递框架、对称框架、欧性框架、自反传递框架以及等价框架。因此, 我们得到了如下的完备性结果:

定理 7 (双模态系统的完备性). 必然和弱必然的双模态逻辑系统 $\mathbf{K}+$ 、 $\mathbf{D}+$ 、 $\mathbf{T}+$ 、 $\mathbf{4}+$ 、 $\mathbf{B}+$ 、 $\mathbf{5}+$ 、 $\mathbf{S4}+$ 以及 $\mathbf{S5}+$ 分别相对于全框架类、持续框架类、自反框架类、传递框架类、对称框架类、欧性框架类、自反传递框架类以及等价框架类是可靠完全的。

一个自然的猜想是: 对于任意框架类 $\mathcal{F}$, 令 $\mathbf{L}_{ML}(\mathcal{F})$ 和 $\mathbf{L}_{ML^+}(\mathcal{F})$ 分别是模态语言 ML 下和双模态语言 ML^+ 下刻画该框架类的逻辑, 那么 $\mathbf{L}_{ML^+}(\mathcal{F}) = \mathbf{L}_{ML}(\mathcal{F})+$ 。然而, 这个猜想并不正确。考虑所谓的平庸框架类: 在平庸框架上每个世界都有且仅有一个可及世界, 即它自身。不难验证, 刻画平庸框架类的单模态逻辑系统是 $\mathbf{Triv} = \mathbf{K} + (\mathbf{Triv}): \Box\varphi \leftrightarrow \varphi$ 。在平庸框架中, 每个世界都无法连接到除自己之外的其他世界, 所以 $\Box\varphi$ 是平庸地有效的, 因此刻画平庸框架类的双模态逻辑系统显然是 $\Box\mathbf{Triv} = \mathbf{Triv} + (\Box\mathbf{Ver}): \Box\varphi$ 。然而, 系统 $\mathbf{Triv}+$ 和系统 $\Box\mathbf{Triv}$ 并不等价。

命题 5. 系统 $\mathbf{Triv}+$ 和系统 $\Box\mathbf{Triv}$ 不等价。

证明. 令 σ 是一个从 ML^+ 公式到 ML 公式的翻译函数, 它被归纳定义为:

$$\begin{aligned}\sigma(p) &:= p \\ \sigma(\neg\varphi) &:= \neg\sigma(\varphi) \\ \sigma(\varphi \wedge \psi) &:= \sigma(\varphi) \wedge \sigma(\psi) \\ \sigma(\Box\varphi) &:= \Box\sigma(\varphi) \\ \sigma(\Box\Box\varphi) &:= \sigma(\Box\varphi)\end{aligned}$$

通过对证明长度的归纳, 不难验证对于任何 ML^+ 公式 φ , 若 $\vdash_{\mathbf{Triv}^+} \varphi$, 那么 $\vdash_{\mathbf{Triv}^+} \sigma(\varphi)$ 。因此, 由于 $\sigma(\Box(p \wedge \neg p)) = (p \wedge \neg p)$ 并且 $\nVdash_{\mathbf{Triv}^+} p \wedge \neg p$, 所以 $\nVdash_{\mathbf{Triv}^+} \Box(p \wedge \neg p)$ 。但是因为 $\vdash_{\Box\mathbf{Triv}} \Box(p \wedge \neg p)$, 所以系统 $\mathbf{Triv}^+$ 和系统 $\Box\mathbf{Triv}$ 不等价。 $\square$

因此, 通过给关于必然性的单模态逻辑添加桥接公理 $(\Box\Box)$ 和 $(\Box\Diamond)$, 以得到相应的关于必然性和弱必然性的可靠完全的双模态逻辑, 这种方案并非永远都是可行的。这是这两个桥接公理在应用上的一个局限性。

尽管原来的猜想被证伪了, 但这给我们提出了一个留待解决的新问题:

问题 4.1. 在何种充要条件下, 框架类 $\mathcal{F}$ 满足 $\mathbf{L}_{ML^+}(\mathcal{F}) = \mathbf{L}_{ML}(\mathcal{F})^+$?

5 结语

限于篇幅, 本文主要对强可弱必逻辑的形式性质作了探究, 未将之和他世界模态逻辑 (即关于 **elsewhere**, **elsewhen** 以及不等性的逻辑)、偶真性和本质性逻辑、偶然性及非偶然性逻辑等相关且重要的哲学逻辑作系统的比较研究, 也未将之充分运用于哲学分析中。尽管如此, 在以上的技术化工作中仍然隐含了许多哲学上有趣且重要的问题。比如说, 在为强可弱必逻辑构建典范模型时, 我们非常依赖于为可能世界建立“副本”的技巧。但是, 既然这些互为“副本”的可能世界满足了完全相同的命题, 我们是依据何种理由将它们分辨为两个不同的世界的? 这个问题既是形而上学的, 也是认识论的, 但却要留待以后再讨论了。

参考文献

- [1] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema, 2001, *Modal Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [2] R. Carnap, 1956, *Meaning and Necessity*, Chicago: The University of Chicago Press.
- [3] M. Cresswell, 1988, “Necessity and contingency”, *Studia Logica*, **47(2)**: 145–149.
- [4] J. Fan, 2019, “Bimodal logics with contingency and accident”, *Journal of Philosophical Logic*, **48(2)**: 425–445.
- [5] J. Fan, Y. Wang and H. van Ditmarsch, 2015, “Contingency and knowing whether”, *The Review of Symbolic Logic*, **8(1)**: 75–107.

- [6] D. Harel, D. Kozen and J. Tiuryn, 2000, *Dynamic Logic*, Cambridge: The MIT Press.
- [7] L. Humberstone, 1995, "The logic of non-contingency", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **36(2)**: 214–229.
- [8] L. Humberstone, 2007, "Modal logic for other-world agnostics: Neutrality and Halldén incompleteness", *Journal of Philosophical Logic*, **36(1)**: 1–32.
- [9] D. Lewis, 1973, "Causation", *The Journal of Philosophy*, **70(17)**: 556–567.
- [10] D. Lewis, 1985, *On the Plurality of Worlds*, Oxford: Blackwell.
- [11] J. Marcos, 2005, "Logics of essence and accident", *Bulletin of the Section of Logic*, **34(1)**: 43–56.
- [12] T. Pan and C. Yang, 2016, "A logic for weak essence and strong accident", *Logique Et Analyse*, **60(238)**: 179–190.
- [13] M. de Rijke, 1992, "The modal logic of inequality", *The Journal of Symbolic Logic*, **57(2)**: 566–584.
- [14] K. Segerberg, 1970, "Modal logics with linear alternative relations", *Theoria*, **36(3)**: 301–322.
- [15] K. Segerberg, 1976, "'Somewhere else' and 'some other time'", in K. Segerberg (ed.), *Wright and Wrong: Mini-essays in Honor of Georg Henrik von Wright on his Sixtieth Birthday*, pp. 61–64, Åbo: Publications of the Group in Logic and Methodology of Real Finland.
- [16] K. Segerberg, 1980, "A note on the logic of elsewhere", *Theoria*, **46(2-3)**: 183–187.
- [17] C. Steinsvold, 2008, "Completeness for various logics of essence and accident", *Bulletin of the Section of Logic*, **37(2)**: 93–101.
- [18] T. Williamson, 2005, "Armchair philosophy, metaphysical modality and counterfactual thinking", *Proceedings of the Aristotelian Society*, **105(1)**: 1–23.
- [19] G. von Wright, 1979, "A modal logic of place", in E. Sosa (ed.), *The Philosophy of Nicholas Rescher*, pp. 65–73, Dordrecht: Reidel.
- [20] 北京大学哲学系外国哲学史教研室, 西方哲学原著选读: 上卷, 1981 年, 北京: 商务印书馆。
- [21] 潘天群, "基于莱布尼兹偶然真理概念的逻辑", 湖北大学学报 (哲学社会科学版), 2013 年第 3 期, 第 36–40 页。

(责任编辑: 映之)

Logics for Strong Possibility and Weak Necessarity

Jia Chen

Abstract

In this paper, we investigate the logical properties of two alethic modalities: strong possibility and weak necessity. A proposition is said to be strongly possible if and only if it holds in all accessible but non-actual possible worlds. Weak necessity is the dual of strong possibility. The expressivity of strong possibility operator is different from possibility operator. Nevertheless, the logics for strong possibility and weak necessity (LSW for short) are still normal modal logics, and the minimal system for LSW is similar to minimal normal modal logic system **K**. In this paper, we made a preliminary work on the formal properties of LSW: we compared its expressivity with modal logic and first-order logic, axiomatize LSW over various classes of frames, and axiomatize the bi-modal logics for necessity and weak necessity.