

弱逻辑 F 的矢列演算

陈钰

摘要: 本文建立起弱逻辑 F 的 G3-型矢列演算 G3F, 并证明弱化规则、收缩规则和切割规则在 G3F 中是可容许的。此外, 本文还运用证明论的方法给出一个通过哥德尔-麦金西-塔斯基翻译将 G3F 嵌入到 G3K 的新证明。

关键词: 严格蕴涵逻辑; 亚直觉主义逻辑; 切割消去定理

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 引言

直觉主义逻辑 (Intuitionistic Logic, 简称 Int) 相对于满足赋值单调性的自返和传递的克里普克模型类是可靠且完全的。所谓赋值单调性, 指的是如果一个命题变元 p 在一个点 w 上为真, 那么 p 在 w 的每一个可及点上都为真。([4]) 将直觉主义逻辑的克里普克模型类扩大为满足赋值单调性的传递模型类, 则可以得到一个比直觉主义逻辑更弱的逻辑——维瑟 (A. Visser) 在 [21] 中提出的基本命题逻辑 (Basic Propositional Logic, 简称 BPL)。克罗西 (G. Crosi) 在 [6] 中研究了一些现在所说的亚直觉主义逻辑 (Subintuitionistic Logics), 将其称之为弱逻辑。亚直觉主义逻辑与直觉主义逻辑和基本命题逻辑一样, 其蕴涵也是严格蕴涵, 而非实质蕴涵。使用严格蕴涵和严格否定但不使用实质蕴涵和实质否定的命题逻辑一般也称为严格蕴涵逻辑。([9])

克罗西在 [6] 中给出的最弱的逻辑是 F。雷斯塔尔 (G. Restall) 在 [17] 中也研究了亚直觉主义逻辑, 并且其提出的逻辑 SJ 与 F 是等价的 ([22])。就 F 的证明系统而言, 克罗西 ([6]) 和雷斯塔尔 ([17]) 给出的是希尔伯特式公理系统。万星 (H. Wansing, [22]) 给出了 F 及其一些扩张的显示演算 (Display Calculus)。塞拉特 (C. Cerrato) 给出了严格蕴涵逻辑的自然演绎系统。([3]) 石垣和鹿岛 (R. Ishigaki & R. Kashima) 给出了严格蕴涵逻辑的矢列演算, 这些演算使用的是基于集合的矢

收稿日期: 2020-06-17; 修订日期: 2020-10-14

作者信息: 陈钰 清华大学哲学系
yu-chen16@mails.tsinghua.edu.cn

基金项目: 国家社科基金重大项目 (17ZDA026)。

致谢: 感谢刘奋荣教授、俞珺华老师和谢立民 (Jeremy Seligman) 教授对本文提出的建设性意见。本文初稿曾在 2019 年全国现代逻辑学术研讨会上宣读, 感谢四位匿名评审专家以及梁飞老师提供的修改意见。本文的最初工作完成于访问新西兰奥克兰大学期间, 感谢国家留学基金委对此次访问的资助。

列。([9]) 此外, 他们运用语义的方法证明了切割规则的可容许性在这些演算中成立。马明辉和赵之光 (M. Ma & Z. Zhao) 使用 [5] 中提出的统一对应理论 (unified correspondence theory) 建立起严格蕴涵逻辑的模块化的无切割规则的矢列演算, 而且这些演算中关于蕴涵的规则分为左引入规则和右引入规则。([12]) 山崎和佐野 (S. Yamasaki & K. Sano) 给出了 F 和其他严格蕴涵逻辑的 G3-型加标的矢列演算, 并且证明切割规则在这些演算中是可容许的。([23]) 在最近的研究中, 艾博利安和艾利扎德 (N. Aboolian & M. Alizadeh) 沿着佐佐木 (K. Sasaki, [19]) 以及阿盖伊和阿德希尔 (M. Aghaei & M. Ardeshtir, [2]) 提出的方法, 通过引入受限的实质蕴涵来刻画严格蕴涵, 从而建立起 F 的 G3-型矢列演算 GF。([1]) 据我所知, 除此之外, 没有学者给出 F 的其他的 G3-型 (不加标的) 矢列演算, 但是山崎和佐野 ([24]) 以及朱吟秋 ([26]) 给出了 BPL 的 G3-型矢列演算 G3BPL。

本文基于山崎和佐野 ([24]) 以及朱吟秋 ([26]) 给出 F 的 G3-型矢列演算 G3F。实际上, 通过对 G3BPL 中的蕴涵规则 ($B \rightarrow$) 进行修改就可以得到 G3F 的蕴涵规则, 并且 G3F 的蕴涵规则严格简单于 G3BPL 中的蕴涵规则。另外, 这组规则都源自石井 (K. Ishii) 等学者在 [10] 中给出的 BPL 的矢列演算 LBP。更为重要的是, 本文通过语法的方法证明切割规则在 G3F 中是可容许的。众所周知, 直觉主义逻辑可以通过哥德尔-麦金西-塔斯基翻译 (见定义 5.2) 嵌入到模态逻辑 S4 中。([7, 13, 20]) 本文根据特罗埃斯特拉和施维滕伯格 (A. Troelstra & H. Schwichtenberg) 的思路 ([20]), 运用证明论的方法建立起从 G3F 到正规模态逻辑 K 的矢列演算 G3K 的嵌入定理的一个新证明。嵌入定理的一个重要作用就是可以将 G3F 中的切割规则的可容许性证明规约到 G3K 中。另外, 本文还讨论了弱逻辑 F 的一些扩张及其与模态逻辑的关系。具体而言, 首先建立起这些逻辑的 G3-型矢列演算, 然后利用证明论的方法建立它们通过哥德尔-麦金西-塔斯基翻译到模态逻辑的嵌入定理, 从而证明切割规则在这些矢列演算中的可容许性。

本文结构安排如下。第 2 节介绍弱逻辑 F 的语言和语义。在第 3 节中将给出 F 的 G3-型矢列演算 G3F, 并证明切割规则在 G3F 中是可容许的。第 4 节将证明 G3F 与希尔伯特式公理系统 HF 之间的等价性, 从而证明 G3F 的可靠性与完全性。第 5 节运用证明论的方法证明弱逻辑 F 可以嵌入到正规模态逻辑 K 中。第 6 节讨论了弱逻辑 F 的一些扩张的 G3-型矢列演算, 并探讨了它们与模态逻辑之间的关系。第 7 节是结语和将来的工作。

2 弱逻辑 F

2.1 语言和语义

以下介绍弱逻辑 F 的语言和语义。

定义 2.1 (形式语言 $\mathcal{L}^F$). 令 **Prop** 为可数的命题变元集, 定义 F 的语言 $\mathcal{L}^F$ 中的公式

如下:

$$A ::= p \mid \perp \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A) \mid (A \rightarrow A)$$

其中 $p \in \mathbf{Prop}$ 。 $\neg A$ 定义为 $(A \rightarrow \perp)$, $\top$ 定义为 $\neg \perp$, $(A \leftrightarrow B)$ 定义为 $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ 。

本文约定, 公式的最外层括号可以省略。而且为了简化表达式, 再约定 $\wedge, \vee$ 的联结比 $\rightarrow$ 优先。例如, $((A \wedge B) \rightarrow C)$ 可以写成 $A \wedge B \rightarrow C$ 。

下面介绍 $\mathbf{F}$ 的语义。

定义 2.2 (框架, 模型). 一个框架 $\mathcal{F}$ 是一个有序对 (W, R) , 其中 W 是非空点集, $R \subseteq W \times W$ 。框架 $\mathcal{F} = (W, R)$ 上的赋值是一函数 $V : \mathbf{Prop} \rightarrow 2^W$ 。

一个模型 $\mathcal{M}$ 是一个有序对 $(\mathcal{F}, V)$, 其中 V 是 $\mathcal{F}$ 上的赋值函数。

定义 2.3 (公式的真). 令 $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ 为任意模型以及 $w \in W$ 。公式 A 在 $\mathcal{M}$ 中的点 w 上为真 (写作 $\mathcal{M}, w \models A$) 归纳定义如下:

- $\mathcal{M}, w \models p$ 当且仅当 $w \in V(p)$, 其中 $p \in \mathbf{Prop}$;
- $\mathcal{M}, w \not\models \perp$ 即, 并非 $\mathcal{M}, w \models \perp$;
- $\mathcal{M}, w \models A \wedge B$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w \models A$ 并且 $\mathcal{M}, w \models B$;
- $\mathcal{M}, w \models A \vee B$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w \models A$ 或者 $\mathcal{M}, w \models B$;
- $\mathcal{M}, w \models A \rightarrow B$ 当且仅当 对任意 $v \in W$, wRv , 若 $\mathcal{M}, v \models A$ 则 $\mathcal{M}, v \models B$ 。

令 $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ 为任意模型。如果对所有 $w \in W$ 都有 $\mathcal{M}, w \models A$, 就说公式 A 在模型 $\mathcal{M}$ 中为真 (写作 $\mathcal{M} \models A$)。如果公式 A 在模型 $\mathcal{M}$ 上不真, 就说公式 A 被模型 $\mathcal{M}$ 反驳或者模型 $\mathcal{M}$ 是公式 A 的反模型。如果公式 A 在基于框架 $\mathcal{F}$ 的每一个模型上都为真, 就说公式 A 在框架 $\mathcal{F}$ 上是有效的 (写作 $\mathcal{F} \models A$)。令 $\mathbb{F}$ 为一个框架类, 如果公式 A 在 $\mathbb{F}$ 中的每一个框架上都是有效的, 则说 A 是 $\mathbb{F}$ -有效的 (写作 $\mathbb{F} \models A$)。

2.2 弱逻辑 $\mathbf{F}$ 的希尔伯特式公理系统 $\mathbf{HF}$

现在介绍克罗西 ([6]) 给出的 $\mathbf{F}$ 的希尔伯特式公理系统 $\mathbf{HF}$ 。

定义 2.4 (希尔伯特式公理系统 $\mathbf{HF}$). 希尔伯特式公理系统 $\mathbf{HF}$ 包含如下公理模式和推理规则:

1. $A \rightarrow A$
2. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
3. $A \wedge B \rightarrow A$
4. $A \wedge B \rightarrow B$

5. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$
6. $A \rightarrow A \vee B$
7. $B \rightarrow A \vee B$
8. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$
9. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
10. $\perp \rightarrow A$

推理规则

$$\text{分离规则 (MP): } \frac{A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n \quad A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B}{B} \text{ (MP)}$$

$$\text{前弱化规则 (AF): } \frac{A}{B \rightarrow A} \text{ (AF)}$$

HF 中证明和定理的概念与通常定义的一样。如果公式 A 是 HF 的一个定理, 写作 $\vdash_{\text{HF}} A$ 。

定理 2.1 (HF 的可靠性与完全性, [6]). 令 $\mathbb{F}_F$ 为所有框架的类。对任意公式 A 都有: $\vdash_{\text{HF}} A$ 当且仅当 $\mathbb{F}_F \models A$ 。

3 F 的矢列演算 G3F

本节将给出 F 的矢列演算 G3F。首先引入一些概念。

定义 3.1 (矢列). 给定有穷的公式多重集 (multiset) Γ 和 Δ , 一个矢列是形如 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的表达式, 其中 Γ 和 Δ 分别称作矢列的前件和后件。

本文约定, 矢列 $\Gamma \cup \Sigma \Rightarrow \Delta \cup \Pi$ (其中 $\cup$ 表示多重集的并) 简记为 $\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Pi$ 。例如, $A, \Gamma, A \Rightarrow A, \Delta, A, B$ 表示的是前件为 $\Gamma \cup \{A, A\}$, 后件为 $\Delta \cup \{A, A, B\}$ 的矢列。另外, 用 $\equiv$ 表示两表达式相等。对有穷的公式多重集 Γ , $\bigwedge \Gamma (\bigvee \Gamma)$ 表示 Γ 中所有出现的公式的任意顺序的合取 (析取)。特殊地, $\bigwedge \emptyset \equiv \top$, $\bigvee \emptyset \equiv \perp$ 。矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 对应的公式定义为 $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ 。

定义 3.2 (子公式多重集). 对任意 $\mathcal{L}^F$ 公式 A , A 的子公式多重集 $\text{Sub}(A)$ 归纳定义如下:

- 如果 $A \equiv p$ (其中 $p \in \mathbf{Prop}$), 那么 $\text{Sub}(A) = \{p\}$,
- 如果 $A \equiv \perp$, 那么 $\text{Sub}(A) = \{\perp\}$,
- 如果 $A \equiv B * C$ (其中 $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$), 那么 $\text{Sub}(A) = \{B * C\} \cup \text{Sub}(B) \cup \text{Sub}(C)$ 。

有穷的公式多重集 $\Gamma \equiv A_1, \dots, A_n$ 的子公式多重集 $\text{Sub}(\Gamma) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ 。

一个有 n 个前提的规则 r 有如下形式:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}{\Gamma \Rightarrow \Delta} r$$

其中 $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \dots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ 为规则 r 的前提, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 为 r 的结论。为了书写的简便, 可以把它简写成:

$$\frac{[\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i]_{i \in \{1, \dots, n\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} r$$

有 0 个前提的规则又称公理。

现在介绍 F 的矢列演算 G3F。

定义 3.3 (G3F). G3F 的公理和规则定义如下:

公理

$$\frac{}{p, \Gamma \Rightarrow \Delta, p} \text{Id} \quad \text{其中 } p \in \mathbf{Prop} \quad \frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\perp$$

逻辑规则

$$\begin{aligned} & \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\wedge \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} R\wedge \\ & \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\vee \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} R\vee \\ & \frac{[\{D_k\}_{k \in n \setminus s}, A \Rightarrow B, \{C_j\}_{j \in s}]_{s \subseteq n}}{\Gamma, \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} (\rightarrow) \quad \text{其中 } n = \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

在 G3F 的公理和规则中, Γ 和 Δ 称为语境。在一个前提数 > 0 的规则结论中, 如果出现的公式在前提中有对应的真子公式出现, 则称该公式为这个规则的主公式 (principal formula), 其对应的出现在前提中的真子公式称为活动公式 (active formula)。如果出现的公式同时也在前提中也出现, 则称该公式为边公式 (side formula)。如果出现的公式既不是主公式也不是边公式, 称该公式为弱化公式 (weakening formula)。特殊地, 在公理中, Γ 和 Δ 中出现的公式都是弱化公式, Id 中两次出现的公式 p 都是主公式, $L\perp$ 中出现的公式 $\perp$ 为主公式。在规则 $(\rightarrow)$ 中, $C_1 \rightarrow D_1, \dots, C_n \rightarrow D_n$ 和 $A \rightarrow B$ 都是主公式。在这里, 用 $\{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n}$ 表示结论的前件中的这 n 个主公式, 因此, 前件中的每一个主公式都被 n 中的一个元素标记。

G3F 中的规则 $(\rightarrow)$ 有点复杂, 现对其作出一些解释。在规则 $(\rightarrow)$ 中, 每一个前提被 n 中的一个子集索引, 对 $s \subseteq n$, s 挑出指标 n 中的子集, 然后将挑出的蕴含式的前件放在被 s 索引的前提的后件 (即 $\{C_j\}_{j \in s}$) 中, 同时将未被挑出的蕴含式的后件放在该前提的前件 (即 $\{D_k\}_{k \in n \setminus s}$) 中。容易看出, 该规则的前提数量由 n 决定, 即如果该规则结论的前件中有 n 个主公式, 则该规则的前提数量为 2^n 。再通过一些例子进行说明。当 $n = 0, 1, 2$ 时, 规则 $(\rightarrow)$ 的形式分别如下所示:

$$\frac{A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} (\rightarrow), \quad \frac{A \Rightarrow B, C_1 \quad D_1, A \Rightarrow B}{\Gamma, C_1 \rightarrow D_1 \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} (\rightarrow),$$

$$\frac{A \Rightarrow B, C_1, C_2 \quad D_1, A \Rightarrow B, C_2 \quad D_2, A \Rightarrow B, C_1 \quad D_1, D_2, A \Rightarrow B}{\Gamma, C_1 \rightarrow D_1, C_2 \rightarrow D_2 \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} (\rightarrow)$$

注 1. 正如在引言中提到的, 本文是通过对山崎和佐野 ([24]) 和朱吟秋 ([26]) 给出的 G3BPL 中的蕴涵规则进行修改而得到 G3F 的蕴涵规则。因此, 只需要将 G3F 中的规则 $(\rightarrow)$ 替换为如下规则 $(B \rightarrow)$ 就可以得到 G3BPL:

$$\frac{[\Sigma, \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n}, \{D_k\}_{k \in n \setminus s}, A \Rightarrow B, \{C_j\}_{j \in s}]_{s \subseteq n}}{\Gamma, \Sigma, \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} (B \rightarrow) \text{ 其中 } n = \{1, \dots, n\}.$$

注 2. 石垣和鹿岛 ([9]) 给出了 F 的矢列演算 GK^I 并且证明了它的可靠性与完全性。而克罗西 ([6]) 证明了 HF 的可靠性和完全性, 因此, 易知 GK^I 和 HF 是等价的。根据本文在第 4 节中证明的 G3F 与 HF 之间的等价性可知, GK^I 与 G3F 是等价的。

GK^I 使用集合矢列。而 G3F 使用多重集矢列, 是 [15, 20] 中的 G3-型演算。G3-型演算的一个特点就是将结构规则吸收在公理和逻辑规则中。另外, 本文与 [9] 最重要的一个区别是, 本文给出了 G3F 中切割规则可容许性的纯语法的证明, 这也是本文的主要贡献之一, 而 [9] 则是通过语义的方法证明切割规则在 GK^I 中是可容许的。

定义 3.4 (“矢列的”证明). G3F 中的一个证明是一棵有穷的有向树, 该树的每一个节点上都是矢列, 并且每个节点上的矢列作为结论, 与其所有子节点上的矢列作为前提, 构成对 G3F 中一规则的一个运用。每一个证明被称为其根矢列的证明, 并且 0 前提规则的结论是证明 (树) 的叶子。一个证明的高度 h 是该证明 (树) 中最长有向路径的节点之间的距离, 其中公理的高度为 0。矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 G3F 中是可证的 (写作 $\vdash_{G3F} \Gamma \Rightarrow \Delta$) 当且仅当 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 G3F 中有一个证明。此外, 用 $\vdash_h \Gamma \Rightarrow \Delta$ 表示 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 G3F 中有一个高度至多为 h 的证明。

容易观察到, 在 G3F 的规则中, 前提中出现的每个公式都是结论中出现的公式的子公式。因此, G3F 具有子公式性质。

命题 3.1 (子公式性质). 如果 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 G3F 中有一个证明, 那么该证明中出现的每一个公式都是 Γ, Δ 的子公式。

这样, 给定一个矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$, 可以在 G3F 中构造一棵从下到上的证明搜索树, 因而 F 是可判定的。

定义 3.5 (规则的可容许、保高可容许、保高可逆). 对任意规则 r , (1) 如果该规则的所有前提在 G3F 中是可证的蕴涵其结论在 G3F 中也是可证的, 则称规则 r 在 G3F 中是可容许的。如果该可容许规则 r 还满足: 若其前提在 G3F 中有高度 $\leq h$ 的证明, 其结论在 G3F 中也有高度 $\leq h$ 的证明, 则称该规则在 G3F 中是保高可容许的。

(2) 如果该规则的结论在 $G3F$ 中有高度 $\leq h$ 的证明蕴涵其所有前提在 $G3F$ 中也有高度 $\leq h$ 的证明, 则称该规则在 $G3F$ 中是保高可逆的。

定义 3.6 (公式的度). 一个公式 A 的度 (degree) $dg(A)$ 定义如下:

- $dg(\perp) = 0$,
- $dg(p) = 1$, 其中 $p \in \mathbf{Prop}$,
- $dg(A * B) = dg(A) + dg(B) + 1$, 其中 $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ 。

定义 3.7 (切割规则). 切割规则 (Cut) 定义如下:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (Cut)}$$

其中公式 A 称为切割公式。切割公式的度称为 (Cut) 的秩 (rank), (Cut) 的前提的证明高度之和称为 (Cut) 的级 (level)。

如果 (Cut) 的秩为 r 且级为 l , 则其等级 d (grade) 为 $\omega \cdot r + l$ (其中 ω 为最小的无穷序数)。用 $(\text{Cut})_l^r$ 表示将 (Cut) 的等级限制为 $\leq \omega \cdot r + l$, $G3F \oplus (\text{Cut})_l^r$ 表示通过受限等级的 $(\text{Cut})_l^r$ 扩张 $G3F$ 得到的演算, $G3F \oplus (\text{Cut})$ 表示通过不受限等级的 (Cut) 扩张 $G3F$ 得到的演算。

接下来将证明切割规则在 $G3F$ 中是可容许的, 这也是本文的一个主要定理。但在这之前, 首先证明一些需要用到的引理。

引理 3.1. 对任意公式 A , 都有: $\vdash_{G3F} A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ 。

证明. 施归纳于公式 A 的复杂度。考虑 $A \equiv B \rightarrow C$ 的情形, 那么最后一步如下所示:

$$\frac{B \Rightarrow C, B \quad C, B \Rightarrow C}{\Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow B \rightarrow C, \Delta} (\rightarrow)$$

运用归纳假设, $B \Rightarrow C, B$ 和 $C, B \Rightarrow C$ 是可证的。因此 $\Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow B \rightarrow C, \Delta$ 也是可证的。□

引理 3.2 (弱化规则保高可容许). 令 Γ, Δ 为公式多重集, A 为 $\mathcal{L}^f$ 中的公式。在 $G3F$ 或 $G3F \oplus (\text{Cut})_l^r$ (其中 $r, l \in \mathbb{N}$) 中, 有

- (1) 如果 $\vdash_h \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_h A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 。
- (2) 如果 $\vdash_h \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_h \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ 。

证明. 选证 (1)。(2) 的证明与 (1) 类似。施归纳于 h 。如果 $h = 0$, 那么 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是公理, 因此 $A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 也是公理。

如果 $h > 0$ 。如果在 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的证明中, 最后运用的规则是 $L\wedge, R\wedge, L\vee, R\vee$ 或 $(\text{Cut})_l^r$ 中的一个, 那么先运用归纳假设于前提中, 再对得到的结果运用该规则即可。

如果最后运用的规则是 $(\rightarrow)$ 。不失一般性, 令 $\Gamma \equiv \Gamma', \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n}$ 以及 $\Delta \equiv E \rightarrow F, \Delta'$, 那么有:

$$\frac{[\vdash_{h-1} \{D_k\}_{k \in n \setminus s}, E \Rightarrow F, \{C_j\}_{j \in s}]_{s \subseteq n}}{\vdash_h \Gamma', \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \Rightarrow E \rightarrow F, \Delta'} (\rightarrow)$$

由于 $[\vdash_{h-1} \{D_k\}_{k \in n \setminus s}, E \Rightarrow F, \{C_j\}_{j \in s}]_{s \subseteq n}$, 则运用规则 $(\rightarrow)$ 得到 $\vdash_h \Gamma'', \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \Rightarrow E \rightarrow F, \Delta'$, 其中 $\Gamma'' \equiv A, \Gamma'$. $\square$

易知如下规则在 $G3F$ 或 $G3F \oplus (Cut)_l^r$ (其中 $r, l \in \mathbb{N}$) 中保高可容许:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Pi, \Delta} (W)$$

在证明收缩规则保高可容许之前, 先引入如下可逆引理。

引理 3.3 (可逆引理). 在 $G3F$ 或 $G3F \oplus (Cut)_l^r$ (其中 $r, l \in \mathbb{N}$) 中, 除规则 $(\rightarrow)$ 外的所有逻辑规则都是保高可逆的。

证明. 选证规则 $L\vee$ 是保高可逆的, 其余规则的证明类似。因此只需证: 如果 $\vdash_h A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么有: $\vdash_h A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 以及 $\vdash_h B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 。

施归纳于 h 。如果 $h = 0$, 那么 $A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 是公理, 则 $A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 和 $B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 也是公理。

如果 $h > 0$ 。如果 $A \vee B$ 是主公式或弱化公式, 显然。

如果 $A \vee B$ 是边公式, 则最后运用的规则不可能是公理或 $(\rightarrow)$, 则直接运用归纳假设于该规则的前提, 然后对得到的结果运用该规则即可。 $\square$

引理 3.4 (收缩规则保高可容许). 令 Γ, Δ 为公式多重集, A 为 $\mathcal{L}^F$ 中的公式。在 $G3F$ 或 $G3F \oplus (Cut)_l^r$ (其中 $r, l \in \mathbb{N}$) 中, 有

- (1) 如果 $\vdash_h A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_h A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 。
- (2) 如果 $\vdash_h \Gamma \Rightarrow \Delta, A, A$, 那么 $\vdash_h \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ 。

证明. 同时施归纳于 (1) 和 (2) 中的 h 。如果 $h = 0$, 显然。

如果 $h > 0$ 。(1) 如果 A 的两次出现的其中一次是弱化公式, 则在运用同样的规则于前提得到的结论中且不引入 A 作为弱化公式即可。如果 A 的两次出现都是边公式, 则最后运用的规则一定是 $L\wedge, R\wedge, L\vee, R\vee$ 或 $(Cut)_l^r$ 中的一个, 那么由归纳假设易得。如果 A 的两次出现其中一次是边公式, 另一次是主公式, 则最后运用的规则一定是 $L\vee$ 或 $L\wedge$, 则根据引理 3.3 和归纳假设可得。如果 A 的两次出现都是主公式。不妨令其分别为 $C_u \rightarrow D_u, C_v \rightarrow D_v$, 则有

$$\frac{[\vdash_{h-1} \{D_k\}_{k \in n \setminus s}, E \Rightarrow F, \{C_j\}_{j \in s}]_{s \subseteq n}}{\vdash_h \Gamma', \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n \setminus \{u, v\}}, C_u \rightarrow D_u, C_v \rightarrow D_v, \Rightarrow E \rightarrow F, \Delta'} (\rightarrow)$$

其中 $\Gamma', \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n \setminus \{u, v\}} \equiv \Gamma$ 以及 $E \rightarrow F, \Delta' \equiv \Delta$ 。

这时有：对任意 $r \subseteq n$ ，如果 $u, v \notin r$ ，则有

$$\vdash_{h-1} \{D_k\}_{k \in (n \setminus r) \setminus \{u, v\}}, D_u, D_v, E \Rightarrow F, \{C_j\}_{j \in r}$$

由归纳假设得 $\vdash_{h-1} \{D_k\}_{k \in (n \setminus r) \setminus \{u, v\}}, D_u, E \Rightarrow F, \{C_j\}_{j \in r}$ ，

因此有 $\vdash_{h-1} \{D_k\}_{k \in n \setminus r \setminus \{u, v\}}, D_u, E \Rightarrow F, \{C_j\}_{j \in r} \vdash_{r \subseteq (n \setminus \{u, v\})}$ ；

对任意 $t \subseteq n$ ，如果 $u, v \in t$ ，则有

$$\vdash_{h-1} \{D_k\}_{k \in n \setminus t}, E \Rightarrow F, C_u, C_v, \{C_j\}_{j \in t \setminus \{u, v\}}$$

由归纳假设得 $\vdash_{h-1} \{D_k\}_{k \in n \setminus t}, E \Rightarrow F, C_u, \{C_j\}_{j \in t \setminus \{u, v\}}$ 。

因此有 $\vdash_{h-1} \{D_k\}_{k \in n \setminus t}, E \Rightarrow F, C_u, \{C_j\}_{j \in t \setminus \{u, v\}} \vdash_{u, v \in t, t \subseteq n}$ ；

运用规则 $(\rightarrow)$ 可以得到 $\Gamma', \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n \setminus \{u, v\}}, C_u \rightarrow D_u \Rightarrow E \rightarrow F, \Delta'$ 。

(2) 如果 A 的两次出现的其中一次是弱化公式或者边公式，证明与 (1) 类似。如果 A 的两次出现都是主公式，但这显然不可能，因为 $G3F$ 或 $G3F \oplus (Cut)_l^r$ 的规则没有结论的后件出现两个（及两个以上）主公式的情况。□

易知如下规则在 $G3F$ 或 $G3F \oplus (Cut)_l^r$ （其中 $r, l \in \mathbb{N}$ ）中保高可容许：

$$\frac{\Gamma, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Pi, \Delta, \Delta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Pi, \Delta} (C)$$

定理 3.5. 规则 (Cut) 在 $G3F$ 中是可容许的。

证明. 对 (Cut) 的秩和级进行双重归纳。由于 A 在左右前提中的每一次出现可以是主公式、边公式或弱化公式中的一种，因此有以下三种情况：

情况 1: A 在 (Cut) 的左前提或右前提中为弱化公式。显然有 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 。

情况 2: A 在 (Cut) 的左前提或右前提中为边公式。由于规则 $(\rightarrow)$ 没有边公式出现，因此得到左或右前提的最后一步运用的规则必定是 $L\wedge, R\wedge, L\vee, R\vee$ 或秩 $< dg(A)$ 的 (Cut) 中的其中一个。以 A 在 (Cut) 右前提为边公式为例，并且假设其右前提由两个前提的规则 R 得到，则有

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \frac{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \quad A, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} R}{\Gamma \Rightarrow \Delta} (Cut)$$

然后将 (Cut) 规则的运用向上置换可以得到

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \Delta, A} (W) \quad \frac{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \Delta} (W)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \Delta} \quad \frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'', \Delta, A} (W) \quad \frac{A, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{A, \Gamma, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'', \Delta} (W)}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'', \Delta} (W)}{\frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \Delta \quad \Gamma, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'', \Delta}{\Gamma, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta} R} (C)$$

情况 3: A 在 (Cut) 的左前提和右前提中都为主公式。考虑 A 是蕴含式的情况, 不妨令 $A \equiv C_z \rightarrow D_z$, $\Gamma \equiv \Theta, \{G_{i'} \rightarrow H_{i'}\}_{i' \in n} \equiv \Pi, \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in m}$, $\Delta \equiv E \rightarrow F, \Sigma$, 则有

$$\frac{\frac{\{H_{k'}\}_{k' \in n \setminus s}, C_z \Rightarrow D_z, \{G_{j'}\}_{j' \in s}\}_{s \subseteq n}}{\Theta, \{G_{i'} \rightarrow H_{i'}\}_{i' \in n} \Rightarrow \Delta, A} (\rightarrow) \quad \frac{\{D_k\}_{k \in m \setminus t}, E \Rightarrow F, \{C_j\}_{j \in t}\}_{t \subseteq m}}{A, \Pi, \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in m \setminus \{z\}} \Rightarrow E \rightarrow F, \Sigma} (\rightarrow)}{\Theta, \{G_{i'} \rightarrow H_{i'}\}_{i' \in n} \Rightarrow \Delta} (\text{Cut})$$

将 $\{[D_k]_{k \in m \setminus t}, E \Rightarrow F, [C_j]_{j \in t}\}_{t \subseteq m}$ 划分成两部分: $\{[D_k]_{k \in (m \setminus \{z\}) \setminus t}, E \Rightarrow F, C_z, [C_j]_{j \in t}\}_{t \subseteq m \setminus \{z\}}$ 以及 $[D_z, [D_k]_{k \in (m \setminus \{z\}) \setminus t}, E \Rightarrow F, [C_j]_{j \in t}\}_{t \subseteq m \setminus \{z\}}$ 。容易知道, 这两部分包含的矢列数量皆为 2^{m-1} 。

对任意 $s \subseteq n$ 以及 $t \subseteq m \setminus \{z\}$, 令 $\Lambda_1 \equiv \{D_k\}_{k \in (m \setminus \{z\}) \setminus t}, E$ 以及 $\Lambda_2 \equiv F, [C_j]_{j \in t}$, 则可以得到:

$$\frac{\frac{\Lambda_1 \Rightarrow \Lambda_2, C_z}{\Lambda_1, \{H_{k'}\}_{k' \in n \setminus s} \Rightarrow \Lambda_2, D_z, \{G_{j'}\}_{j' \in s}, C_z} (W) \quad \frac{\{H_{k'}\}_{k' \in n \setminus s}, C_z \Rightarrow D_z, \{G_{j'}\}_{j' \in s}}{C_z, \Lambda_1, \{H_{k'}\}_{k' \in n \setminus s} \Rightarrow \Lambda_2, D_z, \{G_{j'}\}_{j' \in s}} (W)}{\Lambda_1, \{H_{k'}\}_{k' \in n \setminus s} \Rightarrow \Lambda_2, D_z, \{G_{j'}\}_{j' \in s}} (\text{Cut})$$

然后有

$$\frac{\Lambda_1, \{H_{k'}\}_{k' \in n \setminus s} \Rightarrow \Lambda_2, D_z, \{G_{j'}\}_{j' \in s} \quad \frac{D_z, \Lambda_1 \Rightarrow \Lambda_2}{D_z, \Lambda_1, \{H_{k'}\}_{k' \in n \setminus s} \Rightarrow \Lambda_2, \{G_{j'}\}_{j' \in s}} (W)}{\Lambda_1, \{H_{k'}\}_{k' \in n \setminus s} \Rightarrow \Lambda_2, \{G_{j'}\}_{j' \in s}} (\text{Cut})$$

由于有 2^{n+m-1} 个上述形式的子证明, 因此其结论也有 2^{n+m-1} 个。

现在令 $n' = \{1, \dots, n, n+1, \dots, n+z-1, n+z+1, \dots, n+m\}$ 。对任意 $i'' \in n'$, 定义 $G_{i''}$ 和 $H_{i''}$ 如下:

$$G_{i''} = \begin{cases} G_{i'} & i'' \in n \\ C_i & i'' = n+i, \text{ 其中 } i \in m \setminus \{z\} \end{cases}, \quad H_{i''} = \begin{cases} H_{i'} & i'' \in n \\ D_i & i'' = n+i, \text{ 其中 } i \in m \setminus \{z\} \end{cases}$$

然后有

$$\frac{\{H_{k''}\}_{k'' \in n' \setminus s}, E \Rightarrow F, \{G_{j''}\}_{j'' \in s}\}_{s \subseteq n'}}{\Theta, \Pi, \{G_{i''} \rightarrow H_{i''}\}_{i'' \in n'} \Rightarrow E \rightarrow F, \Sigma} (\rightarrow)$$

因此有 $\Theta, \{G_{i'} \rightarrow H_{i'}\}_{i' \in n}, \Pi, \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in m \setminus \{z\}} \Rightarrow E \rightarrow F, \Sigma$, 运用规则 (C) 可以得到 $\Theta, \{G_{i'} \rightarrow H_{i'}\}_{i' \in n} \Rightarrow E \rightarrow F, \Sigma$ 。□

4 G3F 与 HF 之间的等价性

本节证明矢列演算 G3F 与希尔伯特式公理系统 HF 是等价的。

引理 4.1. 对任意公式 A , 如果 $\vdash_{\text{HF}} A$, 那么 $\vdash_{\text{G3F}} A$ 。

证明. 施归纳于 HF 中公式 A 的证明结构。容易看到, 对 HF 中的所有公理 A , 都有 $\vdash_{\text{G3F}} A$ 。例如, $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$ 在 G3F 中的一个证明如下所示:

$$\begin{array}{c}
\frac{A \Rightarrow B \wedge C, A, A \quad B, A \Rightarrow B \wedge C, A \quad C, A \Rightarrow B \wedge C, A \quad \frac{B, C, A \Rightarrow B \quad B, C, A \Rightarrow C}{B, C, A \Rightarrow B \wedge C} R\wedge}{\frac{(A \rightarrow B), (A \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)}{(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)} L\wedge} \frac{}{\Rightarrow (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)} (\rightarrow)
\end{array}$$

(AF) 的情形是平凡的。至于 (MP)，假设 $\vdash_{G3F} \Rightarrow A_i$ (其中 $1 \leq i \leq n$) 和 $\vdash_{G3F} \Rightarrow A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ ，运用有穷多次规则 $R\wedge$ 得到 $\vdash_{G3F} \Rightarrow A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ ，因此有 $\vdash_{G3F} \Rightarrow A_1 \wedge \cdots \wedge A_n, B$ 。而得到 $\Rightarrow A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ 最后一步运用的规则一定是 $(\rightarrow)$ ，因此 $\vdash_{G3F} A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ 。运用规则 (Cut) 可以得到 $\vdash_{G3F} \Rightarrow B$ 。□

在证明引理 4.1 的相反方向之前，需要证明一系列引理。

引理 4.2. 对任意公式 A, B ，如果 $\vdash_{HF} A$ 以及 $\vdash_{HF} B$ ，那么 $\vdash_{HF} A \wedge B$ 。

证明. 运用 (MP) 到 $\vdash_{HF} A, \vdash_{HF} B$ 以及 $\vdash_{HF} A \wedge B \rightarrow A \wedge B$ 即可。□

引理 4.3 ([6]). 对任意公式 A, B, C ，如果 $\vdash_{HF} A \rightarrow B$ 以及 $\vdash_{HF} B \rightarrow C$ ，那么 $\vdash_{HF} A \rightarrow C$ 。

证明. 假设 $\vdash_{HF} A \rightarrow B$ 和 $\vdash_{HF} B \rightarrow C$ 。根据引理 4.2 有 $\vdash_{HF} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$ 。因为 $\vdash_{HF} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 。运用 (MP) 可得 $\vdash_{HF} A \rightarrow C$ 。□

引理 4.4. 对任意公式 A, B, C, D ，如果 $\vdash_{HF} A \rightarrow B$ ，那么 $\vdash_{HF} A \wedge C \rightarrow B \vee D$ 。

证明. 假设 $\vdash_{HF} A \rightarrow B$ 。因为 $\vdash_{HF} A \wedge C \rightarrow A$ ，根据引理 4.3 有 $\vdash_{HF} A \wedge C \rightarrow B$ ，又 $\vdash_{HF} B \rightarrow B \vee D$ ，再根据引理 4.3 有 $\vdash_{HF} A \wedge C \rightarrow B \vee D$ 。□

引理 4.5. 对任意公式 A, B, C ，如果 $\vdash_{HF} A \rightarrow B$ 和 $\vdash_{HF} A \rightarrow C$ ，那么 $\vdash_{HF} A \rightarrow B \wedge C$ 。

证明. 假设 $\vdash_{HF} A \rightarrow B$ 和 $\vdash_{HF} A \rightarrow C$ 。由于 $\vdash_{HF} (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$ ，运用 (MP) 得 $\vdash_{HF} A \rightarrow B \wedge C$ 。□

引理 4.6. 对任意公式 A, B, C, D ，如果 $\vdash_{HF} A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 和 $\vdash_{HF} A \rightarrow (C \rightarrow D)$ ，那么 $\vdash_{HF} A \rightarrow (B \rightarrow D)$ 。

证明. 假设 $\vdash_{HF} A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 和 $\vdash_{HF} A \rightarrow (C \rightarrow D)$ ，根据引理 4.5，可以得到 $\vdash_{HF} A \rightarrow (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D)$ 。又因为 $\vdash_{HF} (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)$ ，根据引理 4.3，可得 $\vdash_{HF} A \rightarrow (B \rightarrow D)$ 。□

引理 4.7. 对任意公式 A, B, C, D_1, D_2 ，如果 $\vdash_{HF} A \rightarrow B \vee C$ ， $\vdash_{HF} B \rightarrow D_1$ 和 $\vdash_{HF} C \rightarrow D_2$ ，那么 $\vdash_{HF} A \rightarrow D_1 \vee D_2$ 。

证明. 假设 $\vdash_{\text{HF}} B \rightarrow D_1$ 和 $\vdash_{\text{HF}} C \rightarrow D_2$, 则易知 $\vdash_{\text{HF}} B \vee C \rightarrow D_1 \vee D_2$ 。又因为 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow B \vee C$, 根据引理 4.3 得 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow D_1 \vee D_2$ 。□

引理 4.8. 对任意公式 A, B, C, D_1, D_2 , 如果 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow (B \rightarrow C \vee D_1)$ 和 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow (B \rightarrow C \vee D_2)$, 那么 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow (B \rightarrow C \vee (D_1 \wedge D_2))$ 。

证明. 首先证明 $\vdash_{\text{HF}} (C \vee D_1) \wedge (C \vee D_2) \rightarrow C \vee (D_1 \wedge D_2)$ 。

因为 $\vdash_{\text{HF}} (C \vee D_1) \wedge (C \vee D_2) \rightarrow ((C \vee D_1) \wedge C) \vee ((C \vee D_1) \wedge D_2)$, $\vdash_{\text{HF}} (C \vee D_1) \wedge C \rightarrow (C \wedge C) \vee (C \wedge D_1)$, $\vdash_{\text{HF}} (C \vee D_1) \wedge D_2 \rightarrow (C \wedge D_2) \vee (D_1 \wedge D_2)$, 由引理 4.7 得 $\vdash_{\text{HF}} (C \vee D_1) \wedge (C \vee D_2) \rightarrow (C \wedge C) \vee (C \wedge D_1) \vee (C \wedge D_2) \vee (D_1 \wedge D_2)$ 。易知 $\vdash_{\text{HF}} C \wedge C \rightarrow C$, $\vdash_{\text{HF}} C \vee (C \wedge D_i) \rightarrow C$ (其中 $i \in \{1, 2\}$), 可得 $\vdash_{\text{HF}} (C \vee D_1) \wedge (C \vee D_2) \rightarrow C \vee (D_1 \wedge D_2)$ 。

假设 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow (B \rightarrow C \vee D_1)$ 和 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow (B \rightarrow C \vee D_2)$, 易知 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow (B \rightarrow (C \vee D_1) \wedge (C \vee D_2))$ 。又因为 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow ((C \vee D_1) \wedge (C \vee D_2) \rightarrow C \vee (D_1 \wedge D_2))$, 根据引理 4.6 可得 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow (B \rightarrow C \vee (D_1 \wedge D_2))$ 。□

引理 4.9 ([6]). 对任意公式 A, B, C , 如果 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow B$, 那么 $\vdash_{\text{HF}} (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$ 。

证明. 假设 $\vdash_{\text{HF}} A \rightarrow B$ 。运用 (AF) 可以得到 $\vdash_{\text{HF}} (C \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ 。因为 $\vdash_{\text{HF}} (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A)$, 那么根据引理 4.5 有 $\vdash_{\text{HF}} (C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B))$ 。因为 $\vdash_{\text{HF}} (C \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)$, 由引理 4.3 可得 $\vdash_{\text{HF}} (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$ 。□

引理 4.10. 对任意公式 A, B 以及 $k \in \mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$, 如果 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (A \rightarrow B \vee C_k)$ 那么 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (A \rightarrow B \vee D_k)$ 。

证明. 首先, $(C_k \rightarrow D_k) \rightarrow ((B \rightarrow B \vee D_k) \wedge (C_k \rightarrow B \vee D_k))$ 在 HF 中的证明如下:

$$\frac{\frac{B \rightarrow B \vee D_k}{(C_k \rightarrow D_k) \rightarrow (B \rightarrow B \vee D_k)} \text{ AF} \quad \frac{D_k \rightarrow B \vee D_k}{(C_k \rightarrow D_k) \rightarrow (C_k \rightarrow B \vee D_k)} \text{ 引理 4.9}}{(C_k \rightarrow D_k) \rightarrow ((B \rightarrow B \vee D_k) \wedge (C_k \rightarrow B \vee D_k))} \text{ 引理 4.5}$$

因为 $\vdash_{\text{HF}} (B \rightarrow B \vee D_k) \wedge (C_k \rightarrow B \vee D_k) \rightarrow (B \vee C_k \rightarrow B \vee D_k)$ 以及 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (C_k \rightarrow D_k)$, 根据引理 4.3 有 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (B \vee C_k \rightarrow B \vee D_k)$ 。此外, $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (A \rightarrow B \vee C_k)$, 然后根据引理 4.5 有 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow ((A \rightarrow B \vee C_k) \wedge (B \vee C_k \rightarrow B \vee D_k))$ 。又因为 $\vdash_{\text{HF}} (A \rightarrow B \vee C_k) \wedge (B \vee C_k \rightarrow B \vee D_k) \rightarrow (A \rightarrow B \vee D_k)$, 根据引理 4.3 可以得到 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (A \rightarrow B \vee D_k)$ 。□

引理 4.11. 对任意公式 A, B, C 和 D , 如果 $\vdash_{\text{HF}} C \rightarrow (A \wedge D \rightarrow B)$ 那么 $\vdash_{\text{HF}} C \rightarrow (A \wedge (B \vee D) \rightarrow B)$ 。

证明. 首先考虑 HF 中的如下证明:

$$\frac{\frac{A \wedge B \rightarrow B}{C \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B)} \text{ (AF)} \quad C \rightarrow (A \wedge D \rightarrow B)}{C \rightarrow ((A \wedge B \rightarrow B) \wedge (A \wedge D \rightarrow B))} \text{ 引理 4.5}$$

由于 $\vdash_{\text{HF}} (A \wedge B \rightarrow B) \wedge (A \wedge D \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge D) \rightarrow B)$, 然后根据引理 4.3, 可以得到 $\vdash_{\text{HF}} C \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge D) \rightarrow B)$ 。然后有

$$\frac{\frac{A \wedge (B \vee D) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge D)}{C \rightarrow (A \wedge (B \vee D) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge D))} \text{ (AF)} \quad C \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge D) \rightarrow B)}{C \rightarrow ((A \wedge (B \vee D) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge D)) \wedge ((A \wedge B) \vee (A \wedge D) \rightarrow B))} \text{ 引理 4.5}$$

由于 $\vdash_{\text{HF}} (A \wedge (B \vee D) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge D)) \wedge ((A \wedge B) \vee (A \wedge D) \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge (B \vee D) \rightarrow B)$, 根据引理 4.3 得到 $\vdash_{\text{HF}} C \rightarrow (A \wedge (B \vee D) \rightarrow B)$ 。□

引理 4.12. 对任意公式 A , 如果 $\vdash_{\text{G3F}} A$, 那么 $\vdash_{\text{HF}} A$ 。

证明. 令 $\bigwedge \Gamma (\bigvee \Gamma)$ 为 Γ 中所有公式的合取 (析取)。证明对任意矢列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果 $\vdash_{\text{G3F}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ 那么 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ 。

施归纳于 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在 G3F 中的证明高度。这里只考虑规则为 $(\rightarrow)$ 时的情况。根据归纳假设, 对所有 $s \subseteq \mathbf{n}$, 有 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge (\{D_k\}_{k \in \mathbf{n} \setminus s}, A) \rightarrow \bigvee (B, \{C_j\}_{j \in s})$ 。然后运用有穷多次 (AF) 可得, 对任意 $s \subseteq \mathbf{n}$, 有 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (\bigwedge (\{D_k\}_{k \in \mathbf{n} \setminus s}, A) \rightarrow \bigvee (B, \{C_j\}_{j \in s}))$ 。然后多次运用引理 4.10 可得: 对所有 $s \subseteq \mathbf{n}$, $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (\bigwedge (\{D_k\}_{k \in \mathbf{n} \setminus s}, A) \rightarrow \bigvee (B, \{D_j\}_{j \in s}))$ 。因此只需证:

$$(\#) \text{ 对所有 } s \subseteq \mathbf{n}, \vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (A \rightarrow \bigvee (B, \{D_j\}_{j \in s}))$$

然后取 $s = \emptyset$, 即可得到 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (A \rightarrow B)$ 。最后运用有穷多次引理 4.4, 有 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge (\Gamma, \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}}) \rightarrow \bigvee (A \rightarrow B, \Delta)$ 。

现在证明 (#)。首先根据基数大小将 $\mathbf{n}$ 的所有子集按如下顺序排列:

$$\begin{aligned} & \{n, n-1, \dots, 2, 1\}, \\ & \dots, \\ & \{n, n-1\}, \dots, \{n, 2\}, \dots, \{3, 2\}, \{n, 1\}, \dots, \{2, 1\}, \\ & \{n\}, \{n-1\}, \dots, \{1\}, \\ & \emptyset \end{aligned}$$

令 s_m 是 $\mathbf{n}$ 的第 m ($1 \leq m \leq 2^n$) 个子集。施归纳于 m 。

如果 $m = 1$, 显然有 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (A \rightarrow \bigvee (B, \{D_j\}_{j \in \mathbf{n}}))$, 因为 $\{D_k\}_{k \in \mathbf{n} \setminus s} = \emptyset$ 。

如果 $m > 1$ 。由于 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (\bigwedge (\{D_k\}_{k \in \mathbf{n} \setminus s_m}, A) \rightarrow \bigvee (B, \{D_j\}_{j \in s_m}))$, 根据引理 4.11 可得

$$(*) \vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in \mathbf{n}} \rightarrow (A \wedge (\bigvee (B, \{D_j\}_{j \in s_m}, \bigwedge \{D_k\}_{k \in \mathbf{n} \setminus s_m})) \rightarrow \bigvee (B, \{D_j\}_{j \in s_m}))$$

令 $D_{k1}, D_{k2}, \dots, D_{kk'}$ 为 $\{D_k\}_{k \in n \setminus s_m}$ 中公式的一个枚举。则对任意 $1 \leq l \leq k'$, 存在 $m' < m$ 使得 $\{D_j\}_{j \in s_{m'}} = \{D_j\}_{j \in s_m} \cup \{D_{kl}\}$ 。根据归纳假设有, 对任意 $1 \leq l \leq k'$, $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \rightarrow (A \rightarrow \bigvee (B, \{D_j\}_{j \in s_m}, D_{kl}))$ 。多次运用引理 4.8 可得 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \rightarrow (A \rightarrow \bigvee (B, \{D_j\}_{j \in s_m}, \bigwedge \{D_k\}_{k \in n \setminus s_m}))$ 。又因为 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \rightarrow (A \rightarrow A)$, 那么 $(**) \vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \rightarrow (A \rightarrow A \wedge \bigvee (B, \{D_j\}_{j \in s_m}, \bigwedge \{D_k\}_{k \in n \setminus s_m}))$ 。因此, 由 $(*)$, $(**)$ 根据引理 4.6 可以得到 $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \rightarrow (A \rightarrow \bigvee (B, \{D_j\}_{j \in s_m}))$ 。那么有, 对任意 $s \subseteq n$, $\vdash_{\text{HF}} \bigwedge \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \rightarrow (A \rightarrow \bigvee (B, \{D_j\}_{j \in s}))$ 。□

因此根据引理 4.1 和引理 4.12 可以得到 G3F 和 HF 之间的等价性。

5 F 到模态逻辑 K 的嵌入定理

命题模态语言 $\mathcal{L}^\square$ 由语言 $\mathcal{L}^F$ 加上模态算子 $\square$ 组合而成。所有其他逻辑联结词以及模态算子 $\diamond$ 与通常的定义一样。

现在介绍正规模态逻辑 K 的矢列演算 G3K。

定义 5.1 (G3K). G3K 的公理和规则定义如下:

公理

$$\frac{}{p, \Gamma \Rightarrow \Delta, p}^{(\text{id})} \text{ 其中 } p \in \mathbf{Prop} \quad \frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta}^{(L\perp)}$$

逻辑规则

$$\begin{array}{c} \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}^{(L\wedge)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}^{(R\wedge)} \\[10pt] \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}^{(L\vee)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}^{(R\vee)} \\[10pt] \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}^{(L\rightarrow)} \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}^{(R\rightarrow)} \\[10pt] \frac{\Theta \Rightarrow A}{\Gamma, \square \Theta \Rightarrow \square A, \Delta}^{(\text{K}\square)} \end{array}$$

其中 $\square \Theta = \{\square B \mid B \in \Theta\}$ 。

模态逻辑 K 的矢列演算首先由莱万特 (D. Leivant, [11]), 敏兹 (G. Mints, [14]) 以及桑宾和瓦伦蒂尼 (G. Sambin & S. Valentini, [18]) 给出。不过他们给出的矢列演算是基于集合的矢列而不是多重集的矢列, 而且模态算子 $\square$ 的规则如下式:

$$\frac{\Theta \Rightarrow A}{\square \Theta \Rightarrow \square A}^{\text{K}\square'}$$

G3K 中主公式、边公式、弱化公式、证明、证明的高度以及规则的(保高)可容许等的定义与 G3F 中的类似。此外,易知弱化、收缩和切割规则 $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} (\text{Cut})$ 在 G3K 中是可容许的。([8])

现在介绍哥德尔-麦金西-塔斯基翻译。([20])

定义 5.2 (翻译 τ).

$$\begin{aligned} p^\tau &:= \Box p, \\ \perp^\tau &:= \perp, \\ (A \wedge B)^\tau &:= A^\tau \wedge B^\tau, \\ (A \vee B)^\tau &:= A^\tau \vee B^\tau, \\ (A \rightarrow B)^\tau &:= \Box(A^\tau \rightarrow B^\tau). \end{aligned}$$

令 $\Gamma \equiv A_1, \dots, A_n$ 为有穷的公式多重集, 定义 $\Gamma^\tau := A_1^\tau, \dots, A_n^\tau$ 。

接下来将运用证明论的方法证明弱逻辑 F 可以通过哥德尔-麦金西-塔斯基翻译嵌入到模态逻辑 K 中, 即: 对 $\mathcal{L}^F$ 中的每个公式 A ,

$$\vdash_{\text{G3F}} \Rightarrow A \text{ 当且仅当 } \vdash_{\text{G3K}} \Rightarrow A^\tau (***)$$

注 3. 克罗西 ([6]) 定义了一个翻译 $*$, 其与翻译 τ 的不同之处仅在于对原子命题的翻译: $p^* := p$, 并且通过模型论的方法证明 F 可以通过翻译 $*$ 嵌入到模态逻辑 K 中。而本文通过证明论的方法给出 F 通过翻译 τ 嵌入到模态逻辑 K 的新证明。

注 4. 山崎和佐野 ([23]) 定义了哥德尔-麦金西-塔斯基翻译的一个变种翻译 τ' , 由于他们给出的是加标的矢列演算, 因此与 τ 的不同之处除对原子命题的翻译 ($p^{\tau'} := p \wedge \Box p$) 外, 还引入了对加标公式 $x : A$ 的翻译: $(x : A)^{\tau'} := x : A^{\tau'}$, 以及对关系原子公式 xRy 的翻译: $(xRy)^{\tau'} := xRy$ 。然后他们证明 F 的 G3-型加标矢列演算 LG3F 可以通过翻译 τ' 嵌入到模态逻辑 K 的 G3-型加标矢列演算 LG3K 中。而本文的证明使用的是不加标的矢列演算。

为证明 (***) , 只需证明更一般的形式: $\vdash_{\text{G3F}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ 当且仅当 $\vdash_{\text{G3K}} \Gamma^\tau \Rightarrow \Delta^\tau$, 其中 Γ 和 Δ 为有穷的 $\mathcal{L}^F$ -公式多重集。

引理 5.1. 令 Γ 和 Δ 为有穷的 $\mathcal{L}^F$ -公式多重集。如果 $\vdash_{\text{G3F}} \Gamma \Rightarrow \Delta$, 那么 $\vdash_{\text{G3K}} \Gamma^\tau \Rightarrow \Delta^\tau$ 。

证明. 施归纳于 G3F 中 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的证明高度 h 。

如果 $h = 0$ 。那么 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是公理, 则显然有 $\vdash_{\text{G3K}} \Gamma^\tau \Rightarrow \Delta^\tau$ 。

如果 $h > 0$ 。考虑最后一步运用的规则是 $(\rightarrow)$ 的情况。令 $\Gamma \equiv \Gamma', \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n}$ 以及 $\Delta \equiv A \rightarrow B, \Delta'$, 那么有:

$$\frac{[\{D_k\}_{k \in n \setminus s}, A \Rightarrow B, \{C_j\}_{j \in s}]_{s \subseteq n}}{\Gamma', \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta'} (\rightarrow)$$

根据归纳假设, 有 $(\star) \vdash_{\text{G3K}} \{D_k\}_{k \in n \setminus s}^\tau, A^\tau \Rightarrow B^\tau, \{C_j\}_{j \in s}^\tau]_{s \subseteq n}$ 。现在只需证 $(\star\star) \vdash_{\text{G3K}} \{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in n}, A^\tau \Rightarrow B^\tau$ 。 $n = \emptyset$ 的情形是平凡的。若 $n \neq \emptyset$, 令 $m = \{1, \dots, m\} \subseteq n$, 则只需证:

$$(\star\star\star) \vdash_{\text{G3K}} \{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in m}, \{D_k\}_{k \in (n \setminus m) \setminus s}^\tau, A^\tau \Rightarrow B^\tau, \{C_j\}_{j \in s}^\tau]_{s \subseteq n \setminus m}$$

然后取 $m = n$, 可得 $(\star\star)$ 。

现在证明 $(\star\star\star)$ 。施归纳于 m 。当 $m = 0$ 时, 由 $(\star)$ 直接可得。

假设 $m = k'$ 时有:

$$\vdash_{\text{G3K}} \{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in \mathfrak{k}'}, \{D_k\}_{k \in (n \setminus \mathfrak{k}') \setminus s}^\tau, A^\tau \Rightarrow B^\tau, \{C_j\}_{j \in s}^\tau]_{s \subseteq n \setminus \mathfrak{k}'}$$

其中 $\mathfrak{k}' = \{1, \dots, k'\}$ 。而其可以划分为两部分:

$$\vdash_{\text{G3K}} \{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in \mathfrak{k}'}, \{D_k\}_{k \in (n \setminus \mathfrak{k}'') \setminus s}^\tau, A^\tau \Rightarrow B^\tau, \{C_j\}_{j \in s}^\tau, C_{k'+1}^\tau]_{s \subseteq n \setminus \mathfrak{k}'',}$$

$$\vdash_{\text{G3K}} \{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in \mathfrak{k}'}, D_{k'+1}^\tau, \{D_k\}_{k \in (n \setminus \mathfrak{k}'') \setminus s}^\tau, A^\tau \Rightarrow B^\tau, \{C_j\}_{j \in s}^\tau]_{s \subseteq n \setminus \mathfrak{k}'',}$$

其中 $\mathfrak{k}'' = \{1, \dots, k, k+1\}$ 。因此有:

$$\vdash_{\text{G3K}} \{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in \mathfrak{k}'}, \{D_k\}_{k \in (n \setminus \mathfrak{k}'') \setminus s}^\tau, A^\tau \Rightarrow B^\tau, \{C_j\}_{j \in s}^\tau]_{s \subseteq n \setminus \mathfrak{k}'',}$$

故 $(\star\star\star)$ 得证。运用规则 $(R \rightarrow)$ 有 $\vdash_{\text{G3K}} \{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in n} \Rightarrow A^\tau \rightarrow B^\tau$ 。因此, 运用 $(K\Box)$ 可得 $\vdash_{\text{G3K}} \Gamma^\tau, \Box\{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in n} \Rightarrow \Box(A^\tau \rightarrow B^\tau), \Delta'^\tau$ 。 $\square$

引理 5.2. 令 Π 为有穷的原子公式集, $p \in \mathbf{Prop}$, Γ 为有穷的 $\mathcal{L}^\square$ -公式集且 $\Gamma \cap (\mathbf{Prop} \cup \{\perp\}) = \emptyset$, 则如果 $\vdash_{\text{G3K}} \Pi, \Gamma \Rightarrow p$, 那么 $\vdash_{\text{G3K}} \Pi \Rightarrow p$ 。

证明. 施归纳于证明的高度易得。 $\square$

引理 5.3. 令 Π 为有穷的原子公式集, Θ_1 和 Θ_2 为有穷的 $\mathcal{L}^\square$ -公式集且 $\Theta_i \cap \mathbf{Prop} = \emptyset$ ($i \in \{1, 2\}$), 则如果 $\vdash_{\text{G3K}} \Pi, \Theta_1 \Rightarrow \Theta_2$, 那么 $\vdash_{\text{G3K}} \Theta_1 \Rightarrow \Theta_2$ 。

证明. 施归纳于证明的高度易得。 $\square$

引理 5.4. 令 Γ 和 Δ 为有穷的 $\mathcal{L}^F$ -公式多重集, Π 和 Σ 为有穷的原子公式多重集。如果 $\vdash_{\text{G3K}} \Gamma^\tau, \Pi \Rightarrow \Delta^\tau, \Sigma$, 那么 $\vdash_{\text{G3F}} \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 。

证明. 施归纳于 G3K 中 $\Gamma^\tau, \Pi \Rightarrow \Delta^\tau, \Sigma$ 的证明高度 h 。

如果 $h = 0$ 。那么 $\Gamma^\tau, \Pi \Rightarrow \Delta^\tau, \Sigma$ 在 G3K 中是公理, 因此 $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 在 G3F 也是公理。

如果 $h > 0$ 。注意到 Π, Σ 是 $\mathcal{L}^F$ 中的有穷的原子公式多重集, 而 Γ^τ 和 Δ^τ 中的公式的最外层联结词一定不是蕴涵符号 $\rightarrow$ 。因此考虑如下情况:

- (i) 最后运用的规则是 $(L\wedge), (R\wedge), (L\vee)$ 或 $(R\vee)$,
- (ii) 最后运用的规则是 $(K\Box)$ 。

情况 (i), 考虑最后运用的是 $(R\wedge)$, 其余情况类似。令 $\Delta^\tau \equiv A^\tau \wedge B^\tau, \Delta'^\tau$, 那么有

$$\frac{\Gamma^\tau, \Pi \Rightarrow A^\tau, \Sigma \quad \Gamma^\tau, \Pi \Rightarrow B^\tau, \Sigma}{\Gamma^\tau, \Pi \Rightarrow A^\tau \wedge B^\tau, \Delta'^\tau, \Sigma} (R\wedge)$$

由归纳假设知, $\vdash_{G3F} \Gamma, \Pi \Rightarrow A, \Sigma$ 以及 $\vdash_{G3F} \Gamma, \Pi \Rightarrow B, \Sigma$, 运用规则 $R\wedge$ 可得 $\vdash_{G3F} \Gamma, \Pi \Rightarrow A, \Sigma$ 。

情况 (ii)。由于最后运用的规则是 $(K\Box)$, 则主公式一定是模态前束公式。令 $\Gamma^\tau \equiv \Gamma'^\tau, \Box\Pi', \Box\{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in n}$ 以及 $\Delta^\tau \equiv \Box A, \Delta'^\tau$, 其中 Π' 为有穷的原子公式多重集, 则有

$$\frac{\Pi', \{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in n} \Rightarrow A}{\Gamma'^\tau, \Box\Pi', \Box\{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in n}, \Pi \Rightarrow \Box A, \Delta'^\tau, \Sigma} (K\Box)$$

若 $A \equiv p$, 则根据引理 5.2 有 $\vdash_{G3K} \Pi' \Rightarrow p$, 由归纳假设得 $\vdash_{G3F} \Pi' \Rightarrow p$, 运用 (W) 得 $\vdash_{G3F} \Gamma', \Pi', \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n}, \Pi \Rightarrow p, \Delta', \Sigma$ 。

若 $A \equiv E^\tau \rightarrow F^\tau$, 则根据引理 5.3 有 $\vdash_{G3K} \{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in n} \Rightarrow E^\tau \rightarrow F^\tau$, 而规则 $(R \rightarrow)$ 和 $(L \rightarrow)$ 在 $G3K$ 中保高可逆 ([8]), 根据规则 $(R \rightarrow)$ 的可逆性可得 $\vdash_{G3K} \{C_i^\tau \rightarrow D_i^\tau\}_{i \in n}, E^\tau \Rightarrow F^\tau$, 再根据规则 $(L \rightarrow)$ 的可逆性得到 $\vdash_{G3K} \{D_k^\tau\}_{k \in n \setminus s}, E^\tau \Rightarrow F^\tau, \{C_j^\tau\}_{j \in s} \Rightarrow E^\tau$ 。由归纳假设得 $\vdash_{G3F} \{D_k\}_{k \in n \setminus s}, E \Rightarrow F, \{C_j\}_{j \in s} \Rightarrow E$, 因此 $\vdash_{G3K} \Gamma', \Pi', \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n}, \Pi \Rightarrow E \rightarrow F, \Delta', \Sigma$ 。□

基于引理 5.1 和引理 5.4, 有如下定理:

定理 5.5. 令 Γ 和 Δ 为有穷的 $\mathcal{L}^F$ -公式多重集。那么 $\vdash_{G3F} \Gamma \Rightarrow \Delta$ 当且仅当 $\vdash_{G3K} \Gamma^\tau \Rightarrow \Delta^\tau$ 。

上述定理的一个运用就是可以用来证明切割规则 (Cut) 在 $G3F$ 中的可容许性。

定理 5.6. 规则 (Cut) 在 $G3F$ 中是可容许的。

证明. 假设 $\vdash_{G3F} \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ 以及 $\vdash_{G3F} A, \Gamma \Rightarrow \Delta$, 根据定理 5.5 可得 $\vdash_{G3K} \Gamma^\tau \Rightarrow \Delta^\tau, A^\tau$ 和 $\vdash_{G3K} A^\tau, \Gamma^\tau \Rightarrow \Delta^\tau$ 。又因为切割规则 (Cut) 在 $G3K$ 中是可容许的, 因此有 $\vdash_{G3K} \Gamma^\tau \Rightarrow \Delta^\tau$ 。因此, $\vdash_{G3F} \Gamma \Rightarrow \Delta$ 。□

6 讨论

本文建立的这种 G3-矢列演算可以扩展到弱逻辑 F 的一些扩张上, 比如克罗西 ([6]) 建立的逻辑 FD、FR 以及 FT 上。这三个逻辑希尔伯特式公理系统分别是在 HF 的基础上增加如下公理 D' 、 T' 以及 $4'$ 得到:

$$D' \quad \neg\neg\top; \quad T' \quad A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B; \quad 4' \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow (A \rightarrow B)).$$

与之对应的 G3-型矢列演算 $G3D'$ 和 $G3T'$ 分别是在 G3F 的基础上增加如下规则 $(\rightarrow d)$, $(\rightarrow t)$ 得到:

$$\frac{[\{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n}, \{D_k\}_{k \in n \setminus s} \Rightarrow \{C_j\}_{j \in s}]_{s \subseteq n}}{\Gamma, \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \Rightarrow \Delta} (\rightarrow d) \text{ 其中 } n = \{1, \dots, n\},$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\rightarrow t)。$$

而将 G3F 中的规则 $(\rightarrow)$ 修改为如下规则 $(\rightarrow 4)$ 并保持公理和其他规则不变, 就可以得到逻辑 FT 的矢列演算 $G34'$:

$$\frac{[\{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n}, \{D_k\}_{k \in n \setminus s}, A \Rightarrow B, \{C_j\}_{j \in s}]_{s \subseteq n}}{\Gamma, \{C_i \rightarrow D_i\}_{i \in n} \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} (\rightarrow 4) \text{ 其中 } n = \{1, \dots, n\}。$$

克罗西 ([6]) 运用模型论的方法证明了 FD、FR 以及 FT 可以通过翻译 * 分别嵌入到模态逻辑 D、T 以及 K4 中。本文则运用证明论的方法证明 FD、FR 以及 FT 可以通过哥德尔-麦金西-塔斯基翻译分别嵌入到模态逻辑 D、T 以及 K4 中。

为此, 先给出模态逻辑 D、T 以及 K4 的 G3-型矢列演算 $G3D$ 、 $G3T$ 和 $G34$ 。 $G3D$ 、 $G3T$ 分别在 $G3K$ 的基础上增加如下规则 $(D\Box)$ 和 $(L\Box)$ 得到:

$$\frac{\Box\Theta, \Theta \Rightarrow}{\Gamma, \Box\Theta \Rightarrow \Delta} (D\Box) \text{ 其中 } \Box\Theta = \{\Box B \mid B \in \Theta\},$$

$$\frac{\Box A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Box A \Rightarrow \Delta} (L\Box)。$$

将 $G3K$ 中的规则 $(K\Box)$ 修改为如下的规则 $(4\Box)$ 就可以得到矢列演算 $G34$:

$$\frac{\Box\Theta, \Theta \Rightarrow A}{\Gamma, \Box\Theta \Rightarrow \Box A, \Delta} (4\Box) \text{ 其中 } \Box\Theta = \{\Box B \mid B \in \Theta\}。$$

矢列演算 $G3D$ 、 $G3T$ 和 $G34$ 同样具有良好的证明论性质, 即弱化、收缩和规则 (Cut) 都是可容许的。 ([16, 25]) 用 $G3[D'T'4']$ 表示一个矢列演算 $X \in \{G3D', G3T', G34'\}$, $G3[DT4]$ 类似。与第 5 节中的证明类似, 可以得到:

定理 6.1. $\vdash_{G3[D'T'4']} \Gamma \Rightarrow \Delta$ 当且仅当 $\vdash_{G3[DT4]} \Gamma^\tau \Rightarrow \Delta^\tau$ 。

运用定理 6.1, 可以得到:

定理 6.2. 规则 (Cut) 在 $G3[D'T'4']$ 中是可容许的。

7 结语

本文建立起弱逻辑 F 的矢列演算 $G3F$, 并且证明结构规则(弱化、收缩和切割规则)在该演算中是可容许的。事实上, 本文给出了 $G3F$ 中切割规则可容许性的一个纯语法的证明。同时, 也证明了矢列演算 $G3F$ 与希尔伯特式公理系统 HF 是等价的。此外, 本文运用证明论的方法给出一个通过哥德尔-麦金西-塔斯基翻译将弱逻辑 F 嵌入到模态逻辑 K 的新证明, 并给出了 F 的一些扩张的 $G3$ -型矢列演算, 探讨了它们与模态逻辑之间的关系, 即建立起它们到模态逻辑的嵌入定理。

在将来的工作中, 我们考虑将本文的方法扩展到其他严格蕴涵逻辑, 以此建立起这些逻辑的无切割规则的 $G3$ -型矢列演算。另外, 切割消去定理的一个应用就是给出克雷格内插性质 (Craig Interpolation Property, 简称 CIP) 甚至比其更强的林登内插性质 (Lyndon Interpolation Property, 简称 LIP) 的构造性证明。艾博利安和艾利扎德 ([1]) 根据阿盖伊和阿德希尔 ([2]) 证明 BPL 具有 CIP 的方法, 给出与 GF 等价的一个变种矢列演算 GFs , 在该演算中矢列的后件至多含有一个公式, 从而构造性的方法证明了 F 具有 LIP。然而, 这类方法都是借助扩张的语言, 即引入受限的实质蕴涵, 来刻画严格蕴涵, 从而实现目的。但是本文建立的矢列演算不引入额外的语言, 因此, 能否根据本文的这类演算, 运用证明论的方法给出 F 以及其他严格蕴涵逻辑的内插性质 (如果有的话) 的构造性证明也是一项有意义的工作。

参考文献

- [1] N. Aboolian and M. Alizadeh, 2020, "Lyndon's interpolation property for the logic of strict implication", *Logic Journal of the IGPL*: eprint, <https://doi.org/10.1093/jigpal/jzaa029>.
- [2] M. Aghaei and M. Ardeshir, 2001, "Gentzen-style axiomatizations for some conservative extensions of basic propositional logic", *Studia Logica*, **68(2)**: 263–285.
- [3] C. Cerrato, 1994, "Natural deduction based upon strict implication for normal modal logics", *Notre Dame J. Formal Logic*, **35(4)**: 471–495.
- [4] A. Chagrov and M. Zakharyashev, 1997, *Modal Logic*, Oxford: Oxford University Press.
- [5] W. Conradie, S. Ghilardi and A. Palmigiano, 2014, "Unified correspondence", *Johan van Benthem on Logic and Information Dynamics*, pp. 933–975, Cham: Springer.
- [6] G. Corsi, 1987, "Weak logics with strict implication", *Mathematical Logic Quarterly*, **33(5)**: 389–406.
- [7] K. Gödel, 1933, "Eine interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines Mathematisches Kolloquiums*, **4**: 39–40.
- [8] R. Hakli and S. Negri, 2012, "Does the deduction theorem fail for modal logic", *Synthese*, **187(3)**: 849–867.

- [9] R. Ishigaki and R. Kashima, 2008, “Sequent calculi for some strict implication logics”, *Logic Journal of the IGPL*, **16**(2): 155–174.
- [10] K. Ishii, R. Kashima, K. Kikuchi *et al.*, 2001, “Sequent calculi for Visser’s propositional logics”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **42**(1): 1–22.
- [11] D. Leivant, 1981, “On the proof theory of the modal logic for arithmetic provability”, *The Journal of Symbolic Logic*, **46**(3): 531–538.
- [12] M. Ma and Z. Zhao, 2017, “Unified correspondence and proof theory for strict implication”, *Journal of Logic and Computation*, **27**(3): 921–960.
- [13] J. C. McKinsey and A. Tarski, 1948, “Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting”, *The Journal of Symbolic Logic*, **13**(1): 1–15.
- [14] G. Mints, 1990, “Gentzen-type systems and resolution rules Part I: Propositional logic”, *COLOG 1988 Lecture Notes in Computer Science*, pp. 198–231, Berlin: Springer.
- [15] S. Negri, J. von Plato and A. Ranta, 2008, *Structural Proof Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [16] E. Orlandelli, 2020, “Sequent calculi and interpolation for non-normal modal and deontic logics”, *Logic and Logical Philosophy*, **30**(1): 139–183.
- [17] G. Restall, 1994, “Subintuitionistic logics”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **35**(1): 116–129.
- [18] G. Sambin and S. Valentini, 1982, “The modal logic of provability. The sequential approach”, *Journal of Philosophical Logic*, **11**(3): 311–342.
- [19] K. Sasaki, 2001, *Logic and Provability*, PhD thesis, Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam.
- [20] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg, 2000, Cambridge: Cambridge University Press.
- [21] A. Visser, 1981, “A propositional logic with explicit fixed points”, *Studia Logica*, **40**(2): 155–175.
- [22] H. Wansing, 1998, *Displaying Modal Logic*, Dordrecht: Springer.
- [23] S. Yamasaki and K. Sano, 2016, “Constructive embedding from extensions of logics of strict implication into modal logics”, *Structural Analysis of Non-classical Logics*, pp. 223–251, Berlin, Heidelberg: Springer.
- [24] S. Yamasaki and K. Sano, 2017, “Proof-theoretic embedding from Visser’s basic propositional logic to modal logic k_4 via non-labelled sequent calculi”, *Philosophical Logic: Current Trends in Asia*, pp. 233–257, Singapore: Springer.
- [25] J. Yu, 2014, *Self-referentiality in Constructive Semantics of Intuitionistic and Modal Logics*, PhD thesis, Graduate Center, City University of New York.
- [26] 朱吟秋, “维瑟形式命题逻辑 FPL 的循环矢列演算”, 2018 年, 清华大学硕士学位论文。

(责任编辑: 袁之)

Sequent Calculus for Weak Logic F

Yu Chen

Abstract

In the present paper, we propose a G3-style sequent calculus G3F for weak logic F. We show that the structural rules (weakening, contraction and cut rule) are admissible in G3F. And a proof-theoretic embedding from G3F into G3K via Gödel–McKinsey–Tarski translation is also established.

Yu Chen Department of Philosophy, Tsinghua University
yu-chen16@mails.tsinghua.edu.cn