

集值信息系统的公理系统

曹发生

摘 要: 自从波兰数学家 Z. Pawlak 建立信息表的逻辑系统以来, 出现了各种信息系统及其逻辑的研究。集值信息系统在机器学习方面有着重要的应用, 本文从一个具体的集值信息系统的例子引发出建立集值信息系统的公理系统必要性。首先借助相容性关系给出模态算子的语义; 然后给出集值信息系统的逻辑的语法和语义; 最后建立集值信息系统的公理系统的公理和推理规则, 并且利用传统方法证明集值信息系统的逻辑系统的可靠性和完全性。从逻辑本质上看, 集值信息系统的逻辑系统就是一种多模态逻辑系统, 它也给出多模态逻辑的非常完美的诠释。

关键词: 集值信息系统; 过滤; 典范模型; 公理系统

中图分类号: B81

文献标识码: A

数据库的知识发现有许多方法, 使用的数学工具也很多。为了能够准确地评估和处理不确定、不一致、不完全数据, 波兰数学家 Z. Pawlak 于二十世纪八十年代提出一种数学理论——粗糙集理论。([11–18]) 他在文 [14] 中给出粗糙集逻辑, 并且建立了表达信息表的逻辑语言——决策逻辑语言。([14, 26]) 随着对信息系统深入研究, 从经典信息系统到扩展的信息系统, 都有从信息系统的语义和逻辑系统的构建。2015 年曹发生在文 [23] 建立了经典信息系统的自动机, 将逻辑系统与形式自动机结合起来以利于推广经典信息系统。2006 年文 [4] 提出集值信息系统以来, 就有许多关于集值信息系统和其他结构的结合。如 2009 年文 [19] 对集值信息系统中添加了序结构, 2019 年文 [22] 研究了不完全的概率集值信息系统, 主要从概率测度方面研究。2020 年在文 [20] 对集值信息系统的模糊性研究, 2021 年文 [21] 对格值粗糙集进行公理刻画, 2020 年文 [2] 对不完全集值信息系统的高斯核方法进行研究, 从而使得集值信息系统对机器学习方面建立联系。另一方面, Khan 等人在文 [6] 中利用多个等价关系 $IND(B)$ 与相似关系 $SIM(B)$ 建立经典信息系统的公理系统, 再接下来将单主体的信息系统推广到多主体的情形, 他们在文 [7] 中构造多主体的信息系统的公理系统。2017 年, Khan 又在文 [5] 中将概率引进信息系统, 进而构建了概率信息系统的公理系统。

收稿日期: 2021-12-14; 修订日期: 2022-08-02

作者信息: 曹发生 贵州民族大学民族文化与认知科学学院
caofasheng@163.com

基金项目: 国家社科基金项目“多模态逻辑的代数语义研究”(项目批准号 20XZX017)。

但是这些研究中都没有从逻辑角度构建集值信息系统的公理系统，于是本文利用多模态逻辑理论构建集值信息系统的公理系统。下面先从具体的例子来看集值信息系统的逻辑构建的出发点。([25])

例 1. 下面表格给出有四种症状头痛、肌肉痛、体温、流感和 8 个病例 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 所表示的信息系统。

病人	头痛	肌肉痛	体温	流感
x_1	是	是	正常	否
x_2	是	是	高	是
x_3	是	是	很高	是
x_4	否	是	正常	否
x_5	否	否	高	否
x_6	否	是	很高	是
x_7	否	否	高	是
x_8	否	是	很高	否

表 1: 病例的信息表

用决策逻辑语言可以将由例 1 引出的自然语言“若头痛并且体温很高则是流感”表述成

$$(\text{头痛, 是}) \wedge (\text{体温, 很高}) \rightarrow (\text{流感, 是})$$

但是这套语言没有引入模态算子符号,因此没能表达上述信息表中这样的语句“若所有与他肌肉痛不痛有相同症状的人都是流感则他是流感”。

于是 Khan 等人在文 [6, 7] 中给出表达信息系统的逻辑语言，并且建立了完整的公理系统。这个公理系统就能保证形式推演是可靠的。用他们的信息系统语言就能将“若所有与他肌肉痛不痛有相同症状的人都是流感则他是流感”表述成 $[\text{IND}(\{\text{肌肉痛}\})](\text{流感, 是}) \rightarrow (\text{流感, 是})$ 。

当经典信息系统中的每一个属性值看为一个集合时，经典信息系统就自然推广为集值信息系统。下面我们给出一个集值信息系统的例子来说明学校评价应聘教师试讲情况的问题。

例 2. 假设 a_1 表示“内容熟悉程度”， a_2 表示“思维逻辑表达情况”， a_3 表示“语言表达情况”， a_4 表示“板书规范程度”， a_5 表示“重点与详略把握情况”。这五个评价指标都有三个评价值：差等级、中等级、高等级，不妨分别用数字 1, 2, 3 表示这三个评价值。现在假如学校组织了几位经验丰富的老师听课，不同听课老师对同一应聘者的同一评价指标可能给出不同的评价值，如果把所有听课老师对应聘者的评价信息收集在一起，则可以用下表所示的集值信息系统来表达这一问题。

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	{1}	{2, 3}	{3}	{3}	{1, 3}
x_2	{1}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}	{2, 3}
x_3	{3}	{2}	{1, 2}	{2, 3}	{3}
x_4	{3}	{1, 2, 3}	{1, 3}	{1, 2}	{1, 2, 3}
x_5	{1, 2}	{2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2}
x_6	{1, 3}	{13}	{2, 3}	{1, 2}	{1, 2, 3}
x_7	{2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 3}	{1}	{2}
x_8	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2}	{2, 3}	{1, 2, 3}

表 2: 评价的集值信息表

在这个集值信息表中, 用文 [6, 7] 所给出表达信息系统的逻辑语言表达不了这样的语句:

- “若与他在内容熟悉程度被评有相同等级的所有的人在思维逻辑表达情况上给了高等级评价, 则他在思维逻辑表达情况上给了高等级评价”;
- 若在与他对内容熟悉程度评价一致的所有人中, 这些人在思维逻辑表达情况上给了高等级评价, 则在与他对内容熟悉程度评价一致的所有人中, 对于这些所有人中的每一个个体来说, 在与每一个个体自己对内容熟悉程度评价一致的所有人中, 最后一个‘所有人’中的这些人在思维逻辑表达情况上也给高等级评价。

那么怎么来表达这样的自然语言并进行推理呢? 怎么判断这样的语句的有效性? 怎样建立集值信息系统的公理系统呢? 这正是本文最初的动机, 也是本文所要刻画的重要内容。

1 集值信息系统

理论上将信息系统推广到集值信息系统是非常自然的。在实际应用中, 由于问题的复杂性, 人们通常得到的数据并不一定是精确的、完整的。某个对象的属性值是未知(不知道取何值)或部分已知(比如肯定不取某值)的不完全信息系统是非常常见的。

集值信息系统除了能反映信息的不确定性, 还可以部分反映信息的不完备性。比如不完备信息系统, 如果对象在某属性下的缺省值是存在型的, 则可以将该属性的所有可能取值作为该对象的取值, 从而将不完备信息系统转化为一类特殊的集值信息系统进行研究。未知值一般有三种情形: 一是存在型, 即对象关于该属

性的取值理论上是存在的,但暂时不能确定;二是不存在型,即对象关于该属性无法取值;三是占位型,即无法确定是存在型或不存在型空值。信息除了缺省外,在某些实际问题中还可能出现一些对象的某些属性值不是取一个值,也不是取空值,而是取几个值,它是信息受到干扰的一种反映,刻画的是信息的不确定性。因此,利用粗糙集理论和逻辑理论直接研究集值信息系统的逻辑系统具有一定的理论和实际意义。

下面先给出集值信息系统的定义,具体表达如下。([4, 25])

定义 1.1. 一个集值信息系统 S 是一个多元组 $S = (W, A, V_A, f)$ 。其中

1. W 是对象的非空集合,称为论域;
2. A 是属性的有限非空集合;
3. $V_A = \bigcup_{a \in A} V_a$, V_a 是属性 a 的值域,其元素也称为关于属性 a 的属性值,或简称为属性值;
4. $f: W \times A \rightarrow 2^{V_A}$ 是一个映射,即对每一个对象的任意属性都赋予了一个属性值的集合;

下文将 V_A 简记为 V 。

文 [25] 中不完全信息系统的例子。设 $S = (W, A, V, f)$, 其中 $W = \{x_1, \dots, x_6\}$, $A = \{\text{size, price, colour, Max-Speed}\}$, f 如表 3 所示。

car	size	price	colour	Max-Speed
x_1	compact	high	red	high
x_2	full	high	ϵ	high
x_3	middle	high	black	ϵ
x_4	compact	low	red	low
x_5	ϵ	high	white	high
x_6	full	low	white	low

表 3: 车辆不完全信息系统 S 的信息表

可以转成下面的集值信息系统: 设 $S = (W, A, V, f)$, 其中 $W = \{x_1, \dots, x_6\}$, $A = \{\text{size, price, colour, Max-Speed}\}$, f 如表 4 或 5 所示。

上面是将不完全信息系统转成集值信息系统的例子,其实在现实生活中有很多集值信息系统例子。例如,在论文审稿系统中,不同的评阅专家对同一篇论文的创新性可能给出不同的评阅结果,这些不同结果都作为该论文创新性的可能取值。不同的评阅专家对同一篇论文的修改要求给出不同的建议,编辑部要求论文作者按这些修改要求逐一修改。所以无论从理论还是应用上都需要将信息系统推广到集值信息系统。集值信息系统中一些对象的属性值不唯一,反映的是信息的

car	size	price	colour	Max-Speed
x_1	{compact}	{high}	{red}	{high}
x_2	{full}	{high}	{red, black, white}	{high}
x_3	{middle}	{high}	{red}	{low, high}
x_4	{compact}	{low}	{black}	{low}
x_5	{compact, full, middle}	{high}	{white}	{high}
x_6	{full}	{low}	{white}	{low}

表 4: 车辆集值信息系统 S 的信息表

car	size	price	colour	Max-Speed
x_1	{compact}	{high}	{red}	{high}
x_2	{full}	{high}	$\emptyset$	{high}
x_3	{middle}	{high}	{red}	$\emptyset$
x_4	{compact}	{low}	{black}	{low}
x_5	$\emptyset$	{high}	{white}	{high}
x_6	{full}	{low}	{white}	{low}

表 5: 车辆集值信息系统 S' 的信息表

不确定性与不完备性，是完备信息系统的一种重要推广形式。集值信息系统是单值信息系统的更一般化模型，不完备信息系统可以看作是集值信息系统不连续表示。集值信息系统中对象的某些属性可能有多个值。

在信息系统的研究发展过程中，研究学者对于集值信息系统给出过很多种语义。([3, 8–10]) 设 (U, A, V, f) 为集值信息系统，对任意 $a \in A$ ，任意 $x \in U$ ，文 [4, 19] 对集值信息系统的研究，但是没有给出信息系统的公理系统，给出 $f(a, x)$ 的值从语义方面主要有两种解释方式：

一是 $f(a, x)$ 的值被合取地解释。例如，设 a 表示属性“病例症状”，则 $f(a, x) = \{\text{发烧, 头痛, 打喷嚏}\}$ 可以解释为个体对象 x 发烧、头痛和打喷嚏。“个体对象 x 发烧、头痛和打喷嚏”逻辑等价于“若症状 $s \in \{\text{发烧, 头痛, 打喷嚏}\}$ ，则个体对象 x 具有症状 s ”。这样逻辑等价的转述就能处理 $f(a, x) = \emptyset$ 时“个体对象 x 具有症状 $\emptyset$ ”的逻辑真假性。

二是 $f(a, x)$ 的值被析取地解释。例如，设 a 表示属性“病例症状”，则 $f(a, x) = \{\text{发烧, 头痛, 打喷嚏}\}$ 也可以解释为个体对象 x 会有发烧、头痛、打喷嚏中的一种症状。对于不完全经典信息系统，如果个体对象 x 在属性 a 下取未知值，则 $f(a, x)$ 可以表示取属性 a 的值域 V_a 中的任意值，这时可以用 a 的可能取值 V_a 作为 $f(a, x)$ 的取值；如果已知 $f(a, x)$ 必定不取某些值，比如不取 v_1, v_2 ，则可用 $V_a \setminus \{v_1, v_2\}$

作为 $f(a, x)$ 的取值。因此, 不完全经典信息系统可以转化为析取解释的集值信息系统进行研究。

本文采用合取的解释方式, 这也符合“如果一个个体 x 具有症状发烧、头痛和打喷嚏, 那么它具有症状发烧和打喷嚏”这样的命题是恒真的。按照这种合取的解释方式, 我们给出关于描述子的解释的定义。

像经典信息系统的情况一样, 在集值信息系统中也可引入上、下近似的定义。([11, 12])

定义 1.2. 任给二元关系 $R \subseteq W \times W$, 对于任意的 $x \in W$, 记 $xR = \{y \mid xRy\}$; 对于任意的 $X \subseteq W$, 定义 W 的两个子集合 $\underline{R}X = \{x \in W \mid xR \subseteq X\}$ 及 $\overline{R}X = \{x \in W \mid xR \cap X \neq \emptyset\}$, 分别称它们为 X 的 R 下近似集合和上近似集合。

定义 1.3. 设 $f: W \times A \rightarrow 2^V$ 是一个映射, 可以定义一个部分映射 $m: A \times 2^V \rightarrow 2^W$, $m(a, u) = \{x \mid f(x, a) \supseteq u\}$ 。设一个部分映射 $m: A \times 2^V \rightarrow 2^W$, 可以定义 $f: W \times A \rightarrow 2^V$, $f(x, a) = \bigcap \{v \mid x \in m(a, v)\}$ 是一个映射。

易得由 f 可以构造其对应的 m , 下文 2.2 语义中由 m 也可以定义一个 f 。此时 f 也记为 f_m , m 也记为 m_f 。这里部分映射的定义可以参考沈复兴著作 [24]。

注 1. 若是采用析取的方式解释方式, 只要如下给出描述子 (a, u) 的解释的定义: $m(a, u) = \{x \mid f(x, a) \subseteq u\}$ 也可以相仿地建立形式系统。

经典信息系统中等价关系可以给出个体分类的精确分类, 而实际生活中在有些不同等价类之间的无精确的边界。在集值信息系统中, 同一个对象可能同时具有多种属性特征, 如: 一个 35 岁的人可认为同时具有“中年”与“青年”两个属性值。所以, 在集值信息系统中, 不可能像在完备信息系统中那样定义不可分辨关系来对对象进行分类。因此研究学者引入相容关系。([4])

定义 1.4. 集值信息系统 $S = (W, A, V_A, f)$ 中, 任给 $a \in A$, 称 x 与 y 关于 a 相容 (并记为 $xT_a y$), 如果 $f(x, a) \cap f(y, a) \neq \emptyset$ 。任给 $B \subseteq A$, 称 x 与 y 关于 B 相容 (并记为 $xT_B y$), 如果对任意 $b \in B$, $xT_b y$ 。

下面给出相容关系的几条有用的简单性质: ([25])

- 性质 1: T_B 是自反的。
- 性质 2: T_B 是对称的。

2 集值信息系统的逻辑系统

下面来建立集值信息系统的逻辑 **LSVIS**, 依次给出语法、语义、公理系统。

2.1 语法

定义 2.1. 集值信息系统的逻辑 **LSVIS** 语言 $\mathcal{L}$ 的字母表包括以下部分:

- (1) 有穷集合 A , 其元素称为属性常元, 用 a, b, c, d 或加数字下标表示;
- (2) 集合 A 的子集合符号, 用 B, C, D 或加下标表示;
- (3) 对每一个 $a \in A$ 有一个有穷集合 V_a , 其元素是属性值常元, 用符号 v 或 v^a 或加数字下标表示, V_a 子集合用符号 $\bar{v}$ 或 $\bar{v}^a$ 或加数字下标表示;
- (4) 一个特殊的属性集常元 $\emptyset$;
- (5) 两个常元符号 $\top, \perp$;
- (6) 命题变元符号集合 PV , 其元素用符号 p 或加数字下标表示;
- (7) 逻辑联结符号 $\neg, \wedge, [T_B]$;
- (8) 技术性符号 $(,), \cdot, \backslash,]$ 。

定义 2.2. 集值信息系统的逻辑 **LSVIS** 语言 $\mathcal{L}$ 的合式公式的形成规则:

- (1) 常元符号 $\top, \perp$, 命题变元符号是合式公式;
- (2) (a, u) 是合式公式, 称为描述子; $(u ::= \bar{v} \mid \neg u \mid u_1 \wedge u_2)$
- (3) 若 α, β 是合式公式, 则 $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, [T_B]\alpha$ 是合式公式;
- (4) 仅由以上三条形成合式公式。

全体描述子的集合记为 $\mathcal{D}$, 全体合式公式的集合记为 $\mathcal{P}$ 。除去形成规则 (3) 中的构造方式 $[T_B]\alpha$ 而得到的公式也称为布尔合式公式。

下文中的合式公式 $\alpha \vee \beta$ 定义为 $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$; 合式公式 $\alpha \rightarrow \beta$ 定义为 $(\neg\alpha \vee \beta)$; 合式公式 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 定义为 $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ 。

2.2 语义

集值信息系统的逻辑 **LSVIS** 语言 $\mathcal{L}$ 的语义是基于模态逻辑 ([1]) 的模型结构的。

定义 2.3. 一个模型 $\mathfrak{M}$ 是一个多元组 $\mathfrak{M} = (W, \{T_B\}_{B \subseteq A}, m, P)$ 。其中

1. $m : \mathcal{D} \rightarrow 2^W$;
2. 多元组 $S = (W, A, V_A, f)$ 是一个集值信息系统, 其中 f 是由 m (仅仅考虑对原子公式的解释 $m(a, u)$) 按定义 1.3 所对应映射;
3. $P : PV \rightarrow 2^W$ 。

注 2. m, P 可以按保持布尔同态的方式而推广到由 $\mathcal{D}, PV$ 的符号所形成的布尔合式公式的集合 $\mathcal{P}_{\text{Boolean}}$ 上, 这个映射记为 $\tilde{m} : \mathcal{P}_{\text{Boolean}} \rightarrow 2^W$, 即 $\tilde{m}(\neg\alpha) = W \setminus \tilde{m}(\alpha)$, $\tilde{m}(\alpha \wedge \beta) = \tilde{m}(\alpha) \cap \tilde{m}(\beta)$ 。

由 f 可以定义 m , 模型结构 $\mathfrak{M}$ 也可以诱导出一个集值信息系统, 这个集值信息系统也记为 $S_{\mathfrak{M}}$ 。

给定集值信息系统 $S = (W, A, V_A, f)$, 它本质上是语义的, 自然地就有语言 $\mathcal{L}$ 下的一套语法系统。下文中提到集值信息系统 $S = (W, A, V_A, f)$ 后就将集值信息系统的语义符号和语言的语法符号用了同样的形式字符表示, 这并不影响理解本文的内容。

定义 2.4. 给定集值信息系统 $S = (W, A, V_A, f)$ 。定义集值信息系统的框架 $\mathfrak{F}_S = (W, A, V_A, \{T_B\}_{B \subseteq A}, m)$, 其中 m 是由 f 按定义 1.3 所对应映射。模型结构 $(\mathfrak{F}_S, P)$ 也记为 $\mathfrak{M}_S$ 。

下面给出集值信息系统的逻辑系统的合式公式在模型中的可满足性的定义:

定义 2.5. 任给语言 $\mathcal{L}$ 中的合式公式 α , 如下归纳定义 $w \in W$ 在模型 $\mathfrak{M}$ 上满足公式 α , 记为 $\mathfrak{M}, w \models \alpha$:

- (1) $\mathfrak{M}, w \models \top$;
- (2) 并非 $\mathfrak{M}, w \models \perp$;
- (3) $\mathfrak{M}, w \models (a, u)$ 当且仅当, $w \in m(a, u)$;
- (4) $\mathfrak{M}, w \models p$ 当且仅当, $w \in P(p)$;
- (5) $\mathfrak{M}, w \models \neg \alpha$ 当且仅当, 非 $\mathfrak{M}, w \models \alpha$;
- (6) $\mathfrak{M}, w \models \alpha \wedge \beta$ 当且仅当, $\mathfrak{M}, w \models \alpha$ 并且 $\mathfrak{M}, w \models \beta$;
- (7) 对于任意属性集合 B , $\mathfrak{M}, w \models [T_B]\alpha$ 当且仅当, 对任意的 $w T_B w'$ 的 w' 都有 $\mathfrak{M}, w' \models \alpha$ 。

注 3. $\mathfrak{M}, w \models \alpha \vee \beta$ 当且仅当, $\mathfrak{M}, w \models \alpha$ 或者 $\mathfrak{M}, w \models \beta$; $\mathfrak{M}, w \models \alpha \rightarrow \beta$ 当且仅当, 若 $\mathfrak{M}, w \models \alpha$ 则 $\mathfrak{M}, w \models \beta$ 。

有了上面的准备工作就可以给出集值信息系统的逻辑系统的合式公式的有效性的定义。

定义 2.6. 任给语言 $\mathcal{L}$ 中的合式公式 α , 称 α 在模型 $\mathfrak{M}$ 上是可满足的, 如果对于任意的 $w \in W$ 都有, $\mathfrak{M}, w \models \alpha$ 。称 α 是有效的, 如果对于任意的模型 $\mathfrak{M}$ 中 α 是满足的。

下文记 $\alpha^{\mathfrak{M}} = \{x \mid \mathfrak{M}, x \models \alpha\}$ 。

在集值信息系统的模型中, 可证得, $[T_B]\alpha$ 在模型解释下集合和粗糙集有着紧密的联系, 具体如下: $([T_B]\alpha)^{\mathfrak{M}} = \underline{T_B}(\alpha)^{\mathfrak{M}}$ 。

现在可以表达引言中那两个语句。

“若与他在内容熟悉程度被评有相同等级的所有的人在思维逻辑表达情况上给了高等级评价,则他在思维逻辑表达情况上给了高等级评价”可以表示为 $[T_{\{a_1\}}](a_2, 3) \rightarrow (a_2, 3)$ 。

“若在与他对内容熟悉程度评价一致的所有人中,这些人在思维逻辑表达情况上给了高等级评价,则在与他对内容熟悉程度评价一致的所有人中,对于这些所有人中的每一个个体来说,在与每一个个体自己对内容熟悉程度评价一致的所有人中,最后一个‘所有人’中的这些人在思维逻辑表达情况上也给高等级评价”可以表示为 $[T_{\{a_1\}}](a_2, 3) \rightarrow [T_{\{a_1\}}][T_{\{a_1\}}](a_2, 3)$ 。

利用有效性的定义可以验证:前面一个语句是有效的,后面的语句不是有效的,因为 $x_5 \models [T_{\{a_1\}}](a_2, 3)$ 但是 $x_5 \not\models [T_{\{a_1\}}][T_{\{a_1\}}](a_2, 3)$ 。

2.3 公理及规则

本节的主要目标是给出集值信息系统 **LSVIS** 的逻辑系统,给出公理及其可靠性和完全性。下面先给出公理及推理规则:

公理

- A1. 命题逻辑中的三条公理;
- A2. $(a, \emptyset)$;
- A3. $(a, u) \rightarrow (a, u')$, 如果 $u \supseteq u'$;
- A4. $[T_B](\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ([T_B]\alpha \rightarrow [T_B]\beta)$;
- A5. $[T_B]\alpha \rightarrow \alpha$;
- A6. $\neg[T_B]\neg[T_B]\alpha \rightarrow \alpha$;
- A7. $[T_B]\alpha \rightarrow [T_{B'}]\alpha$, 如果 $B \supseteq B'$;
- A8. $((a, u) \wedge [T_{B \cup \{a\}}]\alpha) \rightarrow [T_B]((a, u) \rightarrow \alpha)$, 这里 $u \neq \emptyset$ 。

注 4. 由于属性集合和属性值的集合都是有穷集合,因此这里仅仅含有穷条公理。

推理规则

- MP. $\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}; ^1$

- N. $\frac{\alpha}{[T_B]\alpha}。$

¹下文的形式证明中把 MP 规则写成 $\alpha, \alpha \rightarrow \beta / \beta$, 其他规则同仿。

2.4 形式证明

集值信息系统的逻辑系统的可靠性和完全性留待下一节给出证明, 先来看看该系统的形式证明。

例 3. 证明 $(\neg[T_B]\neg[T_B]\alpha \wedge \neg[T_B]\neg[T_B]\beta) \rightarrow [T_B]\neg[T_B]\neg(\alpha \wedge \beta)$ 。

证明.

- (1) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow [T_B]\neg[T_B]\neg(\alpha \wedge \beta)$ A6
 - (2) $\neg[T_B]\neg[T_B]\alpha \rightarrow \alpha$ A6
 - (3) $\neg[T_B]\neg[T_B]\beta \rightarrow \beta$ A6
 - (4) $(\neg[T_B]\neg[T_B]\alpha \wedge \neg[T_B]\neg[T_B]\beta) \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$ (2)(3), PC
 - (5) $(\neg[T_B]\neg[T_B]\alpha \wedge \neg[T_B]\neg[T_B]\beta) \rightarrow [T_B]\neg[T_B]\neg(\alpha \wedge \beta)$ (4)(1), PC
-

例 4. 证明 $((a, u) \wedge [T_b](a, u) \wedge [T_{\{a,b\}}](b, u')) \rightarrow [T_b](b, u')$, 这里 $u \neq \emptyset$ 。

证明.

- (1) $((a, u) \wedge [T_{\{a,b\}}](b, u')) \rightarrow [T_b]((a, u) \rightarrow (b, u'))$ A8
 - (2) $[T_b]((a, u) \rightarrow (b, u')) \rightarrow ([T_b](a, u) \rightarrow [T_b](b, u'))$ A4
 - (3) $((a, u) \wedge [T_{\{a,b\}}](b, u')) \rightarrow ([T_b](a, u) \rightarrow [T_b](b, u'))$ (1)(2), PC
 - (4) $((a, u) \wedge [T_b](a, u) \wedge [T_{\{a,b\}}](b, u')) \rightarrow [T_b](b, u')$ (3), PC
-

例 5. 证明 $\neg[T_B]\neg\alpha \rightarrow \beta / \alpha \rightarrow [T_B]\beta$ 。

证明.

- (1) $\neg[T_B]\neg\alpha \rightarrow \beta$ 前提
 - (2) $[T_B](\neg[T_B]\neg\alpha \rightarrow \beta)$ (1), N 规则
 - (3) $[T_B]\neg[T_B]\neg\alpha \rightarrow [T_B]\beta$ (2), A4, PC
 - (4) $\alpha \rightarrow [T_B]\neg[T_B]\neg\alpha$ A6
 - (5) $\alpha \rightarrow [T_B]\beta$ (4), PC
-

例 6. 证明 $([T_B]\psi_1 \wedge [T_B]\psi_2 \wedge \cdots \wedge [T_B]\psi_n) \rightarrow [T_B](\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$ 。

取 $n = 2$ 的情形给出证明, 可以归纳到一般的情形。

证明.

- (1) $\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2)$ PC
 - (2) $[T_B](\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2))$ (1), N 规则
 - (3) $[T_B]\psi_1 \rightarrow [T_B](\psi_2 \rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2)$ (2), A4, PC
 - (4) $[T_B](\psi_2 \rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow ([T_B]\psi_2 \rightarrow [T_B](\psi_1 \wedge \psi_2))$ A4
 - (5) $[T_B]\psi_1 \rightarrow ([T_B]\psi_2 \rightarrow [T_B](\psi_1 \wedge \psi_2))$ (3)(4), PC
 - (6) $[T_B]\psi_1 \wedge [T_B]\psi_2 \rightarrow [T_B](\psi_1 \wedge \psi_2)$ PC
-

例 7. RK 规则: $(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \beta / ([T_B]\psi_1 \wedge [T_B]\psi_2 \wedge \cdots \wedge [T_B]\psi_n) \rightarrow [T_B]\beta$ 。

证明.

- (1) $(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \beta$ 前提
 - (2) $[T_B]((\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \beta)$ (1), N 规则
 - (3) $[T_B]((\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n)) \rightarrow [T_B]\beta$ (2), A4, PC
 - (4) $([T_B]\psi_1 \wedge [T_B]\psi_2 \wedge \cdots \wedge [T_B]\psi_n) \rightarrow [T_B](\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$ 例 6
 - (5) $([T_B]\psi_1 \wedge [T_B]\psi_2 \wedge \cdots \wedge [T_B]\psi_n) \rightarrow [T_B]\beta$ (4)(3), PC
-

文 [7] 给出了信息系统及其动态更新系统的可靠性和完全性, 本节来证明集值信息系统的逻辑系统的可靠性和完全性。

3 集值信息系统的逻辑系统的可靠性

引理 3.1. LSVIS 的每一条公理都是有效的。

证明. 我们选证公理 A2、A4、A5、A6 和 A8 的有效性, 其余的公理也能证明。

A2. $(a, \emptyset)$, 任给模型 $\mathfrak{M}$ 及任意的 $w \in W$, 都有 $f(x, a) \supseteq \emptyset$, 由公式的可满足性的定义有 $w \in (a, \emptyset)^{\mathfrak{M}}$ 。由有效性的定义得 A2 有效。

A4. $[T_B](\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ([T_B]\alpha \rightarrow [T_B]\beta)$, 任给模型 $\mathfrak{M}$ 及任意的 $w \in W$, 要证得 $w \in (A4)^{\mathfrak{M}}$, 即要证命题: 若 $w \in ([T_B](\alpha \rightarrow \beta))^{\mathfrak{M}}$ 则 $w \in ([T_B]\alpha \rightarrow [T_B]\beta)^{\mathfrak{M}}$ 。

若 $w \in ([T_B](\alpha \rightarrow \beta))^{\mathfrak{M}}$, 于是对任意的 wT_Bw' , $\mathfrak{M}, w' \models \alpha \rightarrow \beta$ 。设 $\mathfrak{M}, w \models [T_B]\alpha$ 即是对任意的 wT_Bw' , $\mathfrak{M}, w' \models \alpha$, 结合 $\mathfrak{M}, w' \models \alpha \rightarrow \beta$, 于是有对任意的 wT_Bw' , $\mathfrak{M}, w' \models \beta$ 。这即是 $\mathfrak{M}, w \models [T_B]\beta$ 。故 $w \in ([T_B]\alpha \rightarrow [T_B]\beta)^{\mathfrak{M}}$ 。

A5. $[T_B]\alpha \rightarrow \alpha$, 任给模型 $\mathfrak{M}$ 及任意的 $w \in W$, 要证得 $w \in (A5)^{\mathfrak{M}}$, 即要证命题: 若 $w \in ([T_B](\alpha))^{\mathfrak{M}}$ 则 $w \in (\alpha)^{\mathfrak{M}}$ 。由 $w \in ([T_B](\alpha))^{\mathfrak{M}}$ 得对任意的 wT_Bw' , $\mathfrak{M}, w' \models \alpha$, 而 wT_Bw , 故 $\mathfrak{M}, w \models \alpha$ 。

A6. $\neg[T_B]\neg[T_B]\alpha \rightarrow \alpha$, 任给模型 $\mathfrak{M}$ 及任意的 $w \in W$, 要证得 $w \in (A6)^{\mathfrak{M}}$, 即要证命题: 若 $w \in (\neg[T_B]\neg[T_B]\alpha)^{\mathfrak{M}}$ 则 $w \in (\alpha)^{\mathfrak{M}}$. 由 $w \in (\neg[T_B]\neg[T_B]\alpha)^{\mathfrak{M}}$ 得, 存在 wT_Bw' , 对任意的 $w'T_Bw''$, $\mathfrak{M}, w'' \models \alpha$, 而存在 wT_Bw' 就会有, $w'T_Bw$, 故 $\mathfrak{M}, w \models \alpha$.

A8. $((a, u) \wedge [T_{B \cup \{a\}}]\alpha) \rightarrow [T_B]((a, u) \rightarrow \alpha)$, 任给模型 $\mathfrak{M}$ 及任意的 $w \in W$, 要证得 $\mathfrak{M}, w \models A8$, 即要证命题: 若 (1) $\mathfrak{M}, w \models (a, u) \wedge [T_{B \cup \{a\}}]\alpha$ 则 (2) $\mathfrak{M}, w \models ([T_B]((a, u) \rightarrow \alpha))$.

要证明 (2), 由公式可满足的定义 (7) 也就是要证明出对于任给的 wT_Bw' , 都有 $\mathfrak{M}, w' \models ((a, u) \rightarrow \alpha)$. 这即是要证明出若 $\mathfrak{M}, w' \models (a, u)$ 则 $\mathfrak{M}, w' \models \alpha$. 现在来问: 是否有 $wT_{B \cup \{a\}}w'$? 若回答是肯定, 则由已经设有 $\mathfrak{M}, w \models (a, u) \wedge [T_{B \cup \{a\}}]\alpha$ 得到 $\mathfrak{M}, w \models [T_{B \cup \{a\}}]\alpha$, 再由公式可满足的定义 (7) 得 $\mathfrak{M}, w' \models \alpha$. 若否, 这时已有 wT_Bw' , 于是只能是 $f(w, a) \cap f(w', a) = \emptyset$. 由已设 $\mathfrak{M}, w \models (a, u)$ 和 $\mathfrak{M}, w' \models (a, u)$, 于是 $f(w, a) \supseteq u$ 且 $f(w', a) \supseteq u$, 故 $f(w, a) \cap f(w', a) \supseteq u \neq \emptyset$, 这与刚得到的 $f(w, a) \cap f(w', a) = \emptyset$ 矛盾. 所以只能是肯定的回答, 这样前面已经证得. 综上所述, 故 A8 有效. $\square$

引理 3.2. LSVIS 的每一规则都保持有效性。

证明. MP 规则保持有效性的证明: 任给模型 $\mathfrak{M}$ 及任意的 $w \in W$, 因 $\alpha, \alpha \rightarrow \beta$ 都是有效的, 故 $w \in \alpha^{\mathfrak{M}}$, $w \in (\alpha \rightarrow \beta)^{\mathfrak{M}}$, 于是 $w \in \beta^{\mathfrak{M}}$. 由有效性的定义得 β 是有效的, 因此 MP 规则保持有效性。

N 规则保持有效性的证明: 任给模型 $\mathfrak{M}$ 及任意的 $w \in W$, 因 α 是有效的, 故对于任意 wT_Bw' 都有 $\mathfrak{M}, w' \models \alpha$, 由有效性的定义得 $\mathfrak{M}, w \models [T_B]\alpha$, 因此 N 规则保持有效性. $\square$

由引理 3.1 和 3.2 即得可靠性定理。

定理 3.3 (可靠性). 若 $\vdash \alpha$ 则 $\models \alpha$ 。

4 集值信息系统的逻辑系统的完全性

用典范模型方法可以证明集值信息系统的逻辑系统的完全性。先来定义集值信息系统的逻辑系统的典范模型。

定义 4.1. 设 $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$ (LSVIS 所有合式公式的集合), 称 Γ 是一致协调集, 如果对于任意的有穷集合 $\Phi \subseteq \Gamma$, $\nVdash \bigwedge_{\phi \in \Phi} \phi$. Γ 是极大一致协调集, 当且仅当同时满足下面两条

(1) Γ 是一致协调集;

(2) 任给合式公式 α 有 $\alpha \in \Gamma$ 或 $\neg\alpha \in \Gamma$ 。

不一致协调集还有下面的刻画。

引理 4.1. $w \cup \{\alpha\}$ 不是一致协调集, 当且仅当, 存在有穷集 $u \subseteq w$, 使得 $\vdash \bigwedge_{\phi \in u} \phi \rightarrow \neg\alpha$ 。

证明. 设 $w \cup \{\alpha\}$ 不是一致协调集, 由定义可得存在有穷集 $v \subseteq w \cup \{\alpha\}$ 使得 $\vdash \neg \bigwedge_{\phi \in v} \phi$ 。若 $\alpha \in v$, 令 $u = v \setminus \{\alpha\}$, 则 $\vdash \neg(\bigwedge_{\phi \in u} \phi \wedge \alpha)$, 故 $\vdash \bigwedge_{\phi \in u} \phi \rightarrow \neg\alpha$ 。若 $\alpha \notin v$, 令 $u = v$, 则据由 $\vdash \neg B$ 可以推出 $\vdash \neg(B \wedge C)$ 得, $\vdash \neg(\bigwedge_{\phi \in u} \phi \wedge \alpha)$, 故 $\vdash \bigwedge_{\phi \in u} \phi \rightarrow \neg\alpha$ 。

另一方面, 设存在有穷集 $u \subseteq w$ 使得 $\vdash \bigwedge_{\phi \in u} \phi \rightarrow \neg\alpha$, 则有 $\vdash \neg(\bigwedge_{\phi \in u} \phi \wedge \alpha)$ 。令 $v = u \cup \{\alpha\}$, 则存在有穷集 $v \subseteq w$ 使得 $\vdash \neg \bigwedge_{\phi \in v} \phi$ 成立。由不一致协调集的定义易得, $w \cup \{\alpha\}$ 不是一致协调集。□

下面给出极大一致协调集的简单性质:

命题 4.1. 设 Γ 是极大一致协调集, 则

- (1) $\alpha, \neg\alpha$ 恰有一个属于 Γ ;
- (2) $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$ 当且仅当 $\alpha \in \Gamma$ 且 $\beta \in \Gamma$ 。

证明.

(1) 由极大一致协调集的定义易得。

(2) 设 $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$, 反证, 假设 α 不在 Γ 中或 β 不在 Γ 中。据 (1) 有 $\neg\alpha$ 或 $\neg\beta$ 在 Γ 中, 即是说 $\{\alpha \wedge \beta, \neg\alpha\}$ 或者 $\{\alpha \wedge \beta, \neg\beta\}$ 是 Γ 的有穷子集。由 Γ 是一致协调的, 故 $\not\vdash \neg(\alpha \wedge \beta \wedge \neg\alpha)$ 或 $\not\vdash \neg(\alpha \wedge \beta \wedge \neg\beta)$ 。这与 $\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \alpha$ 或 $\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \beta$ 是命题逻辑中的定理矛盾。所以 $\alpha \in \Gamma$ 且 $\beta \in \Gamma$ 。

另一方面设 $\alpha \in \Gamma$ 且 $\beta \in \Gamma$, 假设 $\alpha \wedge \beta \notin \Gamma$ 。据 (1) 有 $\{-(\alpha \wedge \beta), \alpha, \beta\}$ 是 Γ 的有穷子集, 由 Γ 是一致协调的, 于是 $\not\vdash \neg(\alpha \wedge \beta \wedge \neg(\alpha \wedge \beta))$ 。这与 $\neg\alpha \vee \beta \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$ 是命题逻辑中的定理矛盾。所以 $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$ 。□

定理 4.2 (Lindenbaum 引理). 如果 Γ 是一致协调集, 则存在极大一致协调集 Γ^+ , 使得 $\Gamma \subseteq \Gamma^+$ 。

证明. 设 Γ 是一致协调集, 枚举的所有公式如下: $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ 。

根据一致性, 可以构造一个集合链如下: $\Gamma = \Psi_0 \subseteq \Psi_1 \subseteq \dots \subseteq \Psi_n \subseteq \dots$, 使得对每一个 $n < \omega$ 有:

$$\Psi_{n+1} = \begin{cases} \Psi_n \cup \{\alpha_n\}, & \text{若 } \Psi_n \cup \{\alpha_n\} \text{ 是一致集;} \\ \Psi_n \cup \{\neg\alpha_n\}, & \text{若 } \Psi_n \cup \{\alpha_n\} \text{ 不是一致集;} \end{cases}$$

施归纳于 $n < \omega$:

- 基础步。根据设定条件, 已知 $\Gamma = \Psi_0$ 是一致协调集。
- 归纳步。假设 Ψ_n 是一致协调集, 下证 Ψ_{n+1} 是一致协调集。为此考虑的一致性,
 - 情况 1。 $\Psi_n \cup \{\alpha_n\}$ 是一致协调集, 此时 $\Psi_{n+1} = \Psi_n \cup \{\alpha_n\}$, 故 Ψ_{n+1} 是一致协调集。
 - 情况 2。 $\Psi_n \cup \{\alpha_n\}$ 不是一致协调集, 此时 $\Psi_{n+1} = \Psi_n \cup \{\neg\alpha_n\}$, 反证 Ψ_{n+1} 是一致协调集。假设 $\Psi_{n+1} = \Psi_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ 不是一致协调集, 由定义有存在有穷集合 $\Phi \subseteq \Psi_{n+1}$, $\Psi_n, \neg\alpha_n \vdash \neg \bigwedge_{\phi \in \Phi} \phi$, 而 $\Psi_n, \neg\alpha_n \vdash \bigwedge_{\phi \in \Phi} \phi$ 故由命题逻辑的推理得 $\Psi_n \vdash \alpha_n$ 。在此情况下有, $\Psi_n \cup \{\alpha_n\}$ 不是一致协调集, 于是同理可得 $\Psi_n \vdash \neg\alpha_n$ 。故 $\Psi_n \vdash \alpha_n, \neg\alpha_n$, 于是存在有穷集合 $\Phi \subseteq \Psi_{n+1}$, $\Psi_n, \neg\alpha_n \vdash \neg \bigwedge_{\phi \in \Phi} \phi$, 这与归纳假设 Ψ_n 是一致协调集矛盾。因此该情况下也证得存在有穷集合 Ψ_{n+1} 是一致协调集。

于是对于任意的自然数 $n < \omega$, Ψ_n 是一致协调集。

令 $\Gamma^+ = \bigcup_{n < \omega} \Psi_n$, 再来证明 Γ^+ 是极大一致协调集。任给合式公式 α , 总存在自然数 n 使得 $\alpha_n = \alpha$ 。据 Ψ_{n+1} 的构造, $\alpha_n, \neg\alpha_n$ 总有一个属于 Ψ_{n+1} , 故 Γ^+ 是极大一致协调集。 $\square$

下面来给出典范模型的定义。

定义 4.2 (LSVIS 典范模型). 称 $\mathfrak{M}^c = (W^c, \{T_B^c\}_{B \subseteq A}, m^c, P^c)$ 为 **LSVIS** 典范模型, 如果满足下面条件:

- (1) $W^c = \{w \mid w \text{ 是极大一致协调集}\};$
- (2) 对于每一个 $B \subseteq A$, wT_B^cu 当且仅当: 对于任意的合式公式 α , 若 $[T_B]\alpha \in w$, 则 $\alpha \in u$;
- (3) $m^c(a, v) = \{w \in W^c \mid (a, v) \in w\};$
- (4) $P^c(p) = \{w \in W^c \mid p \in w\}.$

极大一致协调对演绎是保持封闭的。

引理 4.3. 设 w 是极大一致协调集, 如果 $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \in w$, 那么 $\beta \in w$ 。

证明. 设 $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \in w$, 反证, 假设 $\beta \notin w$, w 是极大一致协调集, 于是 $\neg\beta \in w$ 。由 w 是一致协调集知, $\not\vdash \neg(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta)$ 。这矛盾于 $\vdash \neg(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta)$ (它等价于 $(\neg\alpha \vee \beta \vee \alpha) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\beta)$)。故 $\beta \in w$ 。 $\square$

引理 4.4. 对每一个一致协调集 Φ 和公式 β 都有: $\Phi \vdash \beta$ 当且仅当, β 属于每一个以 Φ 为子集的极大一致协调集。

证明. β 属于每一个以 Φ 为子集的极大一致协调集逻辑等价于: 对于任意的极大一致协调集 Ψ 有, 若 $\Phi \subseteq \Psi$ 则 $\beta \in \Psi$ 。原命题就是要证 $\Phi \vdash \alpha$ 当且仅当, 对于任意的极大一致协调集 Ψ 有, 若 $\Phi \subseteq \Psi$ 则 $\beta \in \Psi$ 。

一方面, 设 $\Phi \vdash \beta$ 。反证法, 假设存在某个极大一致协调集 Ψ 使得, $\Phi \subseteq \Psi$ 且 $\beta \notin \Psi$, 于是由命题 4.1 有 $\neg\beta \in \Psi$ 。由 $\Phi \vdash \beta$ 得, 存在有穷集 $\Theta \subseteq \Phi$ 使得 $\vdash \bigwedge \Theta \rightarrow \beta$, 于是由命题逻辑可得

$$\vdash \neg(\bigwedge \Theta \wedge \neg\beta) \quad (1)$$

由 $\Phi \subseteq \Psi$ 知 $\Theta \cup \{\neg\beta\} \subseteq \Psi$ 是有穷集, 于是

$$\vdash (\bigwedge \Theta \wedge \neg\beta) \quad (2)$$

(1)、(2) 与是 Ψ 一致协调集矛盾。

另一方面, 设对于任意的极大一致协调集 Ψ 有, 若 $\Phi \subseteq \Psi$ 则 $\beta \in \Psi$ 。构造极大一致协调集。反证法, 假设 $\Phi \not\vdash \beta$, $\Phi \cup \{\neg\beta\}$ 是一致协调的, 据 Lindenbaum 引理知, 存在极大一致协调集 $\Phi \cup \{\neg\beta\} \subseteq \Psi$, 于是由命题 4.1 知 $\beta \notin \Psi$ 。这与已设的前提矛盾。所以该引理得证。□

记 $[R]^-w = \{\beta \mid [R]\beta \in w\}$ 。

引理 4.5. 设 w 是极大一致协调集, 对于任意 $R \in \{T_B\}_{B \subseteq A}$ 都有: $[R]\beta \in w$ 当且仅当, 对于任意的极大一致协调集 u 有, 若 $[R]^-w \subseteq u$ 则 $\beta \in u$ 。

证明. 设 $[R]\beta \in w$ 。任给极大一致协调集 u 使得 $[R]^-w \subseteq u$, 由 $[R]\beta \in w$ 和集合 $[R]^-w$ 的定义得 $\beta \in [R]^-w \subseteq u$ 。故 $\beta \in u$ 。

另一方面, 设对于任意的极大一致协调集 u 有, 若 $[R]^-w \subseteq u$ 则 $\beta \in u$ 。这意味着 β 属于每一个以 $[R]^-w$ 为子集的极大一致协调集。据引理 4.4 有 $[R]^-w \vdash \beta$, 故存在 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \in [R]^-w$ 使得 $\vdash (\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \beta$ 。于是由 RK 规则便有

$$\vdash ([R]\psi_1 \wedge [R]\psi_2 \wedge \dots \wedge [R]\psi_n) \rightarrow [R]\beta \quad (3)$$

而 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \in [R]^-w$, 于是 $[R]\psi_1, [R]\psi_2, \dots, [R]\psi_n \in w$ 。由命题 4.1 知,

$$[R]\phi_1 \wedge \dots \wedge [R]\phi_n \in w. \quad \square$$

再由 (3) 和引理 4.3 得 $[R]\beta \in w$ 。

定理 4.6 (典范模型基本定理). 对于语言 $\mathcal{L}$ 中任给的一个合式公式 α , 任意的 $w \in W^c$ 都有 $\alpha \in w$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^c, w \models \alpha$ 。

证明. 施归纳于合式公式 α 的结构。

基础步:

- 情形 1: α 是 p 的形式, 按 P^c 定义即得。
- 情形 2: α 是 (a, u) 的形式, 按 m^c 定义即得。

归纳步:

- 情形 3: α 是 $\neg\beta$ 的形式, 设 $\neg\beta \in w$, 则由命题 4.1 有, $\beta \notin w$, 由归纳假设有, $\mathfrak{M}^c, w \not\models \beta$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^c, w \models \neg\beta$; 另一方面若 $\mathfrak{M}^c, w \models \neg\beta$, 即非 $\mathfrak{M}^c, w \models \beta$, 由归纳假设有 $\beta \notin w$, 于是由极大一致协调集的定义有 $\neg\beta \in w$ 。
- 情形 4: α 是 $\beta_1 \wedge \beta_2$ 的形式, 设 $\beta_1 \wedge \beta_2 \in w$, 由命题 4.1 知, $\beta_1 \in w$ 且 $\beta_2 \in w$ 。由归纳假设有, $\mathfrak{M}^c, w \models \beta_1$ 且 $\mathfrak{M}^c, w \models \beta_2$ 。故 $\mathfrak{M}^c, w \models \beta_1 \wedge \beta_2$; 另一方面若 $\mathfrak{M}^c, w \models \beta_1 \wedge \beta_2$, 即是 $\mathfrak{M}^c, w \models \beta_1$ 且 $\mathfrak{M}^c, w \models \beta_2$ 。由归纳假设有 $\beta_1 \in w$ 且 $\beta_2 \in w$, 于是由命题 4.1 得 $\beta_1 \wedge \beta_2 \in w$ 。
- 情形 5: α 是 $[R]\beta$ 的形式, 这里 $R \in \{T_B\}_{B \subseteq A}$, 设 $[R]\beta \in w$, 下面来证明 $\mathfrak{M}^c, w \models [R]\beta$ 。要证 $\mathfrak{M}^c, w \models [R]\beta$ 按定义即要证, 对于任意 wR^c 可达的 u 来说有 $\mathfrak{M}^c, u \models \beta$ 按 wR^c 可达 u 的定义即是若 $[R]\beta \in w$ 则 $\beta \in u$, 而已设 $[R]\beta \in w$, 故 $\beta \in u$, 于是由归纳假设有 $\mathfrak{M}^c, u \models \beta$, 所以证得 $\mathfrak{M}^c, w \models [R]\beta$ 。另一方面, 设 $\mathfrak{M}^c, w \models [R]\beta$, 下面来证明 $[R]\beta \in w$ 。反证法, 假设 $[R]\beta \notin w$, 由引理 4.5 得存在 $u \in W^c [R]^-w$ 且 $\beta \notin u [R]\beta \in w$ 。据按 R^c 的定义及归纳假设, $wR^c u$ 且有 $\mathfrak{M}^c, u \not\models \beta$, 故由 **LSVIS** 合式公式可满足的定义得, $\mathfrak{M}^c, w \not\models [R]\beta$, 这与前提矛盾。综上所述, 该命题得证。□

定理 4.7 (完全性). 若 $\models \alpha$ 则 $\vdash \alpha$ 。

证明. 设 $\models \alpha$, 于是它在典范模型中也是有效的, 下面采用反证法来证明它是可证的。假设它不可证, 即 $\not\vdash \alpha$, 于是由一致协调集的定义知道: $\{\neg\alpha\}$ 是一致协调集。由 Lindenbaum 引理知, 存在极大协调集 w 使得 $\{\neg\alpha\} \subseteq w$ 根据命题 4.1 知 $\alpha \notin w$ 。此时存在这样一个典范模型使得 $\mathfrak{M}^c, w \not\models \alpha$, 矛盾, 因此完全性定理得证。□

5 结语

本文对集值属性值的解释是合取型, 给出的关系是基于一种自反和对称的相容关系而建立的集值信息系统的逻辑的公理系统。接下来进一步的工作可以建立集值信息更新的公理系统, 还可以结合 2017 年 Khan 在文 [5] 给出的概率和集值信息系统作出模糊和概率方面的推广。

参考文献

- [1] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema, 2001, *Modal Logic*, Cambridge: Cambridge University Press,
- [2] L. Chen *et al.*, 2020, “Measures of uncertainty for an incomplete set-valued information system with the optimal selection of subsystems: Gaussian kernel method”, *IEEE Access*, **8**: 212022–212035.
- [3] I. Duntsch, G. Gediga and E. Orłowska, 2001, “Relational attribute systems”, *International Journal of Human–Computer Studies*, **55**(3): 293–309.
- [4] Y. Guan and H. K. Wang, 2006, “Set-valued information systems”, *Information Sciences*, **176**(17): 2507–2525.
- [5] M. A. Khan, 2017, “A probabilistic approach to rough set theory with modal logic perspective”, *Information Sciences*, **406–407**: 170–184.
- [6] M. A. Khan and M. Banerjee, 2009, “A logic for complete information systems”, *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*. pp. 829–840, Berlin and Heidelberg: Springer.
- [7] M. A. Khan and M. Banerjee, 2011, “Logics for information systems and their dynamic extensions”, *ACM Transactions on Computational Logic (TOCL)*, **12**(4): 1–36.
- [8] W. Lipski, 1979, “On semantic issues connected with incomplete information databases”, *ACM Transactions Database Systems*, **4**(3): 262–296.
- [9] E. Orłowska, 1986, “Semantics analysis of inductive reasoning”, *Theoretical Computer Science*, **43**: 81–89.
- [10] E. Orłowska and Z. Pawlak, 1987, “Representation of nondeterministic information”, *Theoretical Computer Science*, **29**(1-2): 27–39.
- [11] Z. Pawlak, 1981, “Information systems theoretical foundations”, *Information systems*, **6**(3): 205–218.
- [12] Z. Pawlak, 1982, “Rough sets”, *International Journal of Computer and Information Sciences*, **11**(5): 341–356.
- [13] Z. Pawlak, 1985, “Rough sets and fuzzy sets”, *Fuzzy Sets And Systems*, **17**(1): 99–102.
- [14] Z. Pawlak, 1991, *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [15] Z. Pawlak, 1997, “Rough set approach to knowledge-based decision support”, *European Journal of Operational Research*, **99**(1): 48–57.
- [16] Z. Pawlak, 1998, “Rough set theory and its applications in data analysis”, *International Journal of Cybernetics Systems*, **29**(7): 661–685.
- [17] Z. Pawlak, 2001, “Drawing conclusions from data—the rough set way”, *International Journal of Intelligent Systems*, **16**(1): 3–11.
- [18] Z. Pawlak and R. Slowinski, 1994, “Rough set approach to multi-attribute decision analysis”, *European Journal of Operational Research*, **72**(3): 443–459, Invited Review.

- [19] Y. Qian *et al.*, 2009, “Set-valued ordered information systems”, *Information Sciences*, **179(16)**: 2809–2832.
- [20] S. Singh *et al.*, 2020, “A fuzzy similarity-based rough set approach for attribute selection in set-valued information systems”, *Soft Computing*, **24(6)**: 4675–4691.
- [21] X. Wei, B. Bing and J. Mi, 2021, “Axiomatic characterizations of L-valued rough sets using a single axiom”, *Information Sciences*, **580(C)**: 283–310.
- [22] X. Xie *et al.*, 2019, “Information structures and uncertainty measures in an incomplete probabilistic set-valued information system”, *IEEE Access*, **7**: 27501–27514.
- [23] 曹发生, “信息系统更新的自动机”, 逻辑学研究, 2015年第1期, 第79–94页。
- [24] 沈复兴, 模型论导引, 1995年, 北京: 北京师范大学出版社。
- [25] 张文修, 梁怡, 吴伟志, 信息系统与知识发现, 2003年, 北京: 科学出版社。
- [26] 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 李德玉, 粗糙集理论与方法, 2001年, 北京: 科学出版社。

(责任编辑: 袁之)

Axiomatic System of the Set-Valued Information System

Fasheng Cao

Abstract

Since the Polish mathematician Z. Pawlak established the logical system of information tables, there have been studies on various information systems and their logics. Set-valued information systems have important applications in machine learning. In this paper, necessity of establishing the axiomatic system for set-valued information system is derived from a specific example of set-valued information system. Firstly, the semantics of modal operators are given by means of compatibility relation; Then the syntax and semantics of the logic for set-valued information system are given; Finally, the axioms and reasoning rules of the axiom system for the set-valued information system are established, and the reliability and completeness of the logic system for the set-valued information system are proved by using traditional methods. In terms of the logic essence, the logic system for set-valued information system is a multimodal logic system, which also gives a perfect interpretation of multimodal logic.