

二阶修正 KROM 逻辑的表达能力与复杂性

冯世光[✉]

王克诩

赵希顺

摘 要: 本文提出了二阶修正 KROM 逻辑 (SO-KROM^r), 二阶扩展 KROM 逻辑 (SO-EKROM) 和二阶扩展修正 KROM 逻辑 (SO-EKROM^r), 并对他们的表达能力和复杂性进行了研究。本文证明了在有序结构上, $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$ 与 $\Sigma_1^1\text{-KROM}$ 等价, 可以刻画 NL; 而 SO-EKROM 与 $\Pi_2^1\text{-EKROM}$ 等价, 他们都可以刻画 co-NP。在所有结构上, $\Pi_2^1\text{-KROM}^r$ 与 $\Pi_2^1\text{-EKROM}^r$ 等价, 他们也都可以刻画 co-NP。

关键词: 计算复杂性; 描述复杂性; KROM 逻辑; 有穷模型论

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 引言

有穷模型论以有穷结构为主要研究对象, 其发展受到了计算复杂性理论、数据库理论和形式语言的影响。1950 年 B. Trakhtenbrot 证明了在有穷模型上一个公式的可满足性问题是不可判定的 ([17]), 标志着有穷模型论的诞生。描述复杂性理论是有穷模型论的一个分支, 它从逻辑的角度对计算复杂性进行研究。计算复杂性理论关心的是解决一个问题所需要的时间和空间资源, 而描述复杂性则主要研究定义一个问题所需要的最小逻辑的表达能力。判断一个结构 $\mathcal{A}$ 是否满足公式 φ 的复杂性有三种: (1) 数据复杂性, 即公式 φ 给定, 结构 $\mathcal{A}$ 作为问题的输入; (2) 表达式复杂性, 即结构 $\mathcal{A}$ 给定, 公式 φ 作为问题的输入; (3) 混合复杂性, 即结构 $\mathcal{A}$ 和公式 φ 同时作为问题的输入。

本文主要考虑数据复杂性, 一般随着表达能力的增强一个逻辑的数据复杂性也会变大。例如一阶逻辑的数据复杂性在 L 中, 但它不能表达图的三着色问题。存在型二阶逻辑 ($\exists\text{SO}$) 可以表达图的三着色问题, 但它的数据复杂性是 NP 完

收稿日期: 2021-08-31

作者信息: 冯世光[✉] 南通大学信息科学技术学院
shigfeng@ntu.edu.cn

王克诩 中山大学逻辑与认知研究所
wangkx7@mail2.sysu.edu.cn

赵希顺 中山大学逻辑与认知研究所
hsszxs@mail.sysu.edu.cn

基金项目: 教育部人文社科重点研究基地重大项目 (19JJD720002), 国家自然科学基金面上项目 (62072259)。

全的。在描述复杂性中用“刻画”来定义这种表达能力与数据复杂性之间的关系。称逻辑 $\mathcal{L}$ 刻画复杂性类 $\mathcal{C}$ ，则他们满足：(1) 逻辑 $\mathcal{L}$ 的数据复杂性在 $\mathcal{C}$ 中；(2) 复杂性类 $\mathcal{C}$ 中的问题在逻辑 $\mathcal{L}$ 中可表达。

有了刻画的概念之后，可以通过比较不同逻辑的表达能力来研究他们所刻画的复杂性类之间的关系，即如果逻辑 $\mathcal{L}_1$ 刻画复杂性类 $\mathcal{C}_1$ ，逻辑 $\mathcal{L}_2$ 刻画复杂性类 $\mathcal{C}_2$ ，则 $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ 当且仅当 $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_2$ 。([5]) 1974 年，R. Fagin 证明了 $\exists\text{SO}$ 能够刻画 NP ([6])，这一定理的证明开启了描述复杂性研究的先河。1982 年，N. Immerman 和 M. Vardi 分别证明了最小固定点逻辑 FO(LFP) 可以在有序结构上刻画 P。([13, 19]) 1987 年，N. Immerman 证明了确定传递闭包逻辑 FO(DTC) 和传递闭包逻辑 FO(TC) 可以在有序结构上分别刻画 L 和 NL。([14]) 1989 年，S. Abiteboul 和 V. Vianu 证明了部分固定点逻辑 FO(PFP) 可以在有序结构上刻画 PSPACE。([1]) 还有一些研究者继续从二阶逻辑的角度对描述复杂性进行了研究。J. Büchi ([2, 3]) 和 B. Trakhtenbrot ([18]) 分别独立证明了一个语言是正则的当且仅当它可以被单二阶逻辑 (MSO) 定义。E. Grädel 证明了二阶 HORN 逻辑 (SO-HORN) 和二阶 KROM 逻辑 (SO-KROM) 在有序结构上分别可以刻画 P 和 NL。([10, 11]) S. Cook 和 A. Kolokolova 提出了基于约束算术的 V-Krom 逻辑，并研究了其对 NL 的刻画关系。([4]) 本文作者提出了二阶修正 HORN 逻辑，证明了其与 FO(LFP) 逻辑的等价性，并研究了对复杂性类 P 的刻画关系。([7, 8])

本文对二阶 KROM 逻辑进行扩充，然后提出了二阶修正 KROM 逻辑 (SO-KROM^r)，二阶扩展 KROM 逻辑 (SO-EKROM) 和二阶扩展修正 KROM 逻辑 (SO-EKROM^r)，并对他们的表达能力和复杂性进行了研究。本文结构如下：第二节是预备知识，给出了一些基本概念和定义。第三节研究了 SO-KROM^r 的描述复杂性，证明了在有序结构上 SO-KROM^r 的存在型部分 $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$ 与 $\Sigma_1^1\text{-KROM}$ 等价，可以刻画 NL；而它的全称存在型部分 $\Pi_2^1\text{-KROM}^r$ 可以刻画 co-NP。第四节研究了二阶扩展 KROM 逻辑 (SO-EKROM) 与二阶扩展修正 KROM 逻辑 (SO-EKROM^r) 的描述复杂性，证明了 SO-EKROM 与其全称存在型部分 $\Pi_2^1\text{-EKROM}$ 等价，他们可以在有序结构上刻画 co-NP；在所有结构上，SO-EKROM^r 的全称存在型部分 $\Pi_2^1\text{-EKROM}^r$ 与 $\Pi_2^1\text{-KROM}^r$ 等价，也可以刻画 co-NP。本文的部分结果见图 1。

有序结构	所有结构	
$\Sigma_1^1\text{-KROM}^r \equiv \Sigma_1^1\text{-KROM}$		刻画 NL
$\text{SO-EKROM} \equiv \Pi_2^1\text{-EKROM}$	$\Pi_2^1\text{-KROM}^r \equiv \Pi_2^1\text{-EKROM}^r$	刻画 co-NP

图 1: SO-KROM^r、SO-EKROM 与 SO-EKROM^r 的表达能力与刻画关系

2 预备知识

本文假设读者对数理逻辑和计算复杂性理论有基本的了解, 相关内容可以查阅文献 [5, 12, 16]。下面我们简单介绍本文所涉及的概念和定义。

令 $\tau = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ 是一个词汇表, 其中 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ 是常项符号, $P_1, P_2, \dots, P_n$ 是关系符号。一个 τ -结构 $\mathcal{A}$ 具有如下形式:

$$\mathcal{A} = \langle A, \mathbf{c}_1^A, \mathbf{c}_2^A, \dots, \mathbf{c}_m^A, P_1^A, P_2^A, \dots, P_n^A \rangle$$

其中 A 是一个非空集合, 是结构 $\mathcal{A}$ 的论域, $\mathbf{c}_1^A, \dots, \mathbf{c}_m^A, P_1^A, \dots, P_n^A$ 分别是 τ 中的常项符和关系符在 A 上的解释 (我们默认每个词汇表都包含等词 “=”, 并且被解释为论域中元素之间的相等关系)。在不引起歧义的情况下我们通常会省略常项和关系的上标 A 。我们称 $\mathcal{A}$ 是有穷结构当且仅当它的论域 A 是一个有限集。如无特别说明, 本文中所涉及到的结构均为有穷结构。我们用符号 $|\cdot|$ 来代表一个集合的基数或者一个元组的维数, 例如 $|A|$ 代表论域 A 的基数。如果在有穷结构 $\mathcal{A}$ 上添加一个二元关系 “ $\leq$ ” 并且解释为线序关系, 添加二元关系 “SUCC” 并解释为相对于 “ $\leq$ ” 的后继关系, 添加常项 “**min**” 和 “**max**” 分别作为对最小元和最大元的解释, 则称 $\mathcal{A}$ 为有序结构。

定义 2.1. 以 τ 为词汇表的二阶 KROM 逻辑, 记为 $\text{SO-KROM}(\tau)$, 是具下列形式的二阶公式的集合

$$Q_1 R_1 \cdots Q_m R_m \forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$$

其中 $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $R_1, \dots, R_m$ 是二阶变元, $C_1, \dots, C_n$ 是相对于 $R_1, \dots, R_m$ 的 KROM 子句, 即每个 C_j 都是一个具有如下形式的析取式

$$\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_q \vee H_1 \vee H_2$$

其中

- (1) 每个 β_s ($1 \leq s \leq q$) 要么是 $P\bar{y}$, 要么是 $\neg P\bar{y}$, 其中 $P \in \tau$;
- (2) 每个 H_t ($t \in \{1, 2\}$) 要么是 $R_i \bar{u}$, 要么是 $\neg R_i \bar{u}$ ($R_i \in \{R_1, \dots, R_m\}$), 要么是布尔常项 $\perp$ (代表假)。

如果我们把条件 (2) 改为

- (2') 每个 H_t ($t \in \{1, 2\}$) 要么是 $R_i \bar{u}$, 要么是 $\neg R_i \bar{u}$, 要么是 $\exists \bar{z} R_i \bar{z}$ ($R_i \in \{R_1, \dots, R_m\}$), 要么是布尔常项 $\perp$ 。

则我们称这一逻辑为二阶修正 KROM 逻辑, 记为 $\text{SO-KROM}^r(\tau)$ 。

在不引起混淆时我们通常省略记号 $\text{SO-KROM}^r(\tau)$ 中的 τ , 简记为 SO-KROM^r 。我们用 $\Pi_k^1\text{-KROM}^r$ 和 $\Sigma_k^1\text{-KROM}^r$ 来分别代表 SO-KROM^r 中 Π_k^1 -型公式和 Σ_k^1 -型公式的集合, 即公式前缀中的二阶量词分别以全称量词“ $\forall$ ”和存在量词“ $\exists$ ”开始, 并且不同类型的量词一共交替 $k-1$ 次。

例 1. 一个有向图是强连通的当且仅当任意两点之间都有一条路径相连。图的强连通问题定义为

输入: 一个有向图 $G = (V, E)$, 其中 V 是顶点的集合, E 是边的集合。

输出: 是, 如果 G 是强连通的; 否则为否。

图的强连通问题是 NL 完全的, 因为 $\text{NL} = \text{co-NL}$, 因此它的补也是 NL 完全的。下面的 $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$ 公式定义了图的强连通问题的补:

$$\exists R \exists T \forall x \forall y \forall z \left(\begin{array}{l} (Exy \rightarrow Rxy) \wedge (Exy \wedge Ryz \rightarrow Rxz) \\ \wedge (\neg Rxy \leftrightarrow Txy) \wedge \exists u \exists v Tuv \end{array} \right)$$

其中二阶变元 R 定义了图上的连通关系, T 定义了 R 的补。若某个图满足上述公式, 则必然存在两个节点 a, b 使得 Tab 为真, 即 a 不可通达 b , 此图为非强连通图。

一个非强连通图的子图可能是强连通的, SO-KROM 在子结构下保持 ([11]), 因此图的强连通的问题的补在 SO-KROM 中无法表达。例 1 说明了 SO-KROM^r 的表达要能力要严格强于 SO-KROM 。

例 2. 集合 $\{\phi \mid \phi \text{ 是一个不可满足的命题 CNF 公式}\}$ 的判定问题是 co-NP 完全的。([16]) 令词汇表 $\tau = \{C, V, P, N\}$, 其中 C 和 V 是两个一元关系符, P 和 N 是两个二元关系符。对每个 CNF 公式 ϕ , 可以用一个 τ -结构 $\mathcal{A}_\phi = \langle A, C, V, P, N \rangle$ 对其进行编码 ([15]), 其中 A 是论域, 对任意 $i, j \in A$ 有: Ci 为真当且仅当 i 是一个子句; Vj 为真当且仅当 j 是一个变元; Pij 为真当且仅当变元 j 在子句 i 中有正出现; Nij 为真当且仅当变元 j 在子句 i 中有负出现。例如公式 $(p_1 \vee p_3) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1)$ 可以编码成 $\langle \{1, 2, 3, 4\}, C, V, P, N \rangle$, 其中

$$\begin{aligned} C &= \{1, 2, 3, 4\}, V = \{1, 2, 3\}, N = \{(2, 3), (4, 1)\}, \\ P &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}. \end{aligned}$$

一个 CNF 公式不可满足当且仅当对任意的赋值都存在一个子句使得这个子句中的所有文字在这个赋值下都为假。这一事实可以用下面的 SO-KROM^r 公式表达:

$$\Phi = \forall X \exists Y \forall x \forall y \left(\begin{array}{l} \exists z Yz \wedge (Yx \rightarrow Cx) \\ \wedge (Yx \wedge Vy \wedge Pxy \rightarrow \neg Xy) \\ \wedge (Yx \wedge Vy \wedge Nxy \rightarrow Xy) \end{array} \right)$$

公式 Φ 表达了对任意的赋值 X (X_j 为真当且仅当变元 j 在这个赋值下为真), 都存在一个子句的集合 Y 使得其中的子句在这一赋值下都为假。容易看出对所有的 CNF 公式 ϕ , $\mathcal{A}_\phi \models \Phi$ 当且仅当 ϕ 不可满足。上面的公式 Φ 是一个 Π_2^1 -KROM^r 公式, 由此可知 SO-KROM^r 可以表达 co-NP 完全的问题。

3 修正 KROM 逻辑的描述复杂性

本节研究 SO-KROM^r 的描述复杂性。由例 2 可以知道 SO-KROM^r 的数据复杂性至少是 co-NP 难的。本节证明它的存在型部分 Σ_1^1 -KROM^r 的数据复杂性在 NL 中, 并且可以在有序结构上刻画 NL; 而它的全称存在型部分 Π_2^1 -KROM^r 可以在所有结构上刻画 co-NP。

命题 3.1. 每个 Π_1^1 -KROM^r 公式都等价于一个全称型的一阶公式 $\forall \bar{x} \varphi$, 其中 φ 是一个不含量词的 CNF 公式。

证明. 给定一个 Π_1^1 -KROM^r 公式 $\forall X_1 \dots \forall X_n \forall \bar{x} (C_1 \wedge \dots \wedge C_m)$, 我们对每个子句 C_j ($1 \leq j \leq m$) 进行如下处理。令 α 代表子句 C_j 中的一阶部分,

- (1) 如果 $C_j = \alpha \vee \neg X_i \bar{x}_1 \vee \exists \bar{x}_2 X_i \bar{x}_2$ ($1 \leq i \leq n$), 那么将子句 C_j 删除;
- (2) 如果 $C_j = \alpha \vee X_i \bar{x}_1 \vee \neg X_i \bar{x}_2$, 那么用 $C'_j = (\alpha \vee \bar{x}_1 = \bar{x}_2)$ 代替 C_j ;
- (3) 对于其他情况, 我们把子句 C_j 中出现的所有二阶变元删除。

最后可以得到一个全称型的一阶公式 $\forall \bar{x} (C'_1 \wedge \dots \wedge C'_{m'})$ 。

在上述规则 (1) 中, $\neg X_i \bar{x}_1 \vee \exists \bar{x}_2 X_i \bar{x}_2$ 为永真式, 无论对 X_i 赋何值都为真, 子句也为真, 因此将子句删除。(2) 中当 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ 时, 无论对 X_i 赋何值 $X_i \bar{x}_1 \vee \neg X_i \bar{x}_2$ 都为真, 子句也为真; 当 $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ 时总有一个对 X_i 的赋值令 $X_i \bar{x}_1 \vee \neg X_i \bar{x}_2$ 为假, 此时子句为真当且仅当 α 为真。由此可知公式 $\forall X_i \forall \bar{x} (\alpha \vee X_i \bar{x}_1 \vee \neg X_i \bar{x}_2)$ 等价于 $\forall \bar{x} (\alpha \vee \bar{x}_1 = \bar{x}_2)$, 可以将子句中的二阶部分用 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ 替换。对于 (3) 中其他情况的子句, 总有一个对二阶变元的赋值令子句中的二阶公式全部为假, 此时子句为真当且仅当其中的一阶部分为真, 因此可以将子句中出现的二阶变元删除。通过上面分析可知得到的一阶公式与原二阶公式等价。 $\square$

从命题 3.1 可知如果一个 SO-KROM^r 公式的前缀中最后的二阶量词是全称型的, 则可以把通过变换把它删除, 由此可以得出以下推论。

推论 1. 令 $k \geq 1$, 如果 k 为奇数, 则 Σ_k^1 -KROM^r $\equiv \Sigma_{k+1}^1$ -KROM^r; 如果 k 为偶数, 则 Π_k^1 -KROM^r $\equiv \Pi_{k+1}^1$ -KROM^r。

下面我们将证明 Σ_1^1 -KROM^r 的数据复杂性在 NL 中, 在此之前先证明一个引理。我们用 $\varphi[\alpha/\beta]$ 表示将公式 φ 中的变元 (或公式) α 用 β 替换。

引理 3.1. 令 $\exists x_1 \dots \exists x_n \phi$ 是一个量化命题布尔公式, 则它等价于如下公式

$$\phi[x_1/\perp, \dots, x_n/\perp] \vee \bigvee_{1 \leq i \leq n} \exists x_1 \dots \exists x_{i-1} \exists x_{i+1} \dots \exists x_n \phi[x_i/\top]$$

证明. $\exists x_1 \dots \exists x_n \phi$ 为真当且仅当要么所有变元 $x_1, \dots, x_n$ 都为假时 ϕ 为真, 要么某个 x_i ($1 \leq i \leq n$) 为真时 $\exists x_1 \dots \exists x_{i-1} \exists x_{i+1} \dots \exists x_n \phi$ 为真. $\square$

命题 3.2. 每个 $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$ 公式都等价于一个形如 $\exists \bar{y}_1 \phi_1 \vee \dots \vee \exists \bar{y}_n \phi_n$ 的公式, 其中每个 ϕ_i ($1 \leq i \leq n$) 是一个 $\Sigma_1^1\text{-KROM}$ 公式。

证明. 令 $\exists R \exists \bar{Y} \forall \bar{x} \phi$ 是一个 $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$ 公式, $\alpha(\bar{z}) = (\bar{z} = \bar{y}) \vee R\bar{z}$, 其中 $\bar{y}$ 不在 ϕ 中出现。易见如果 $\bar{z} = \bar{y}$ 则 $\alpha(\bar{z})$ 为真; 如果 $\bar{z} \neq \bar{y}$ 则 $\alpha(\bar{z})$ 等价于 $R\bar{z}$ 。根据引理 3.1 可以得出 $\exists R \exists \bar{Y} \forall \bar{x} \phi$ 等价于下面的公式

$$\Psi = \exists \bar{Y} \forall \bar{x} \phi[R\bar{z}/\perp] \vee \exists \bar{y} \exists R \exists \bar{Y} \forall \bar{x} \phi[R\bar{z}/\alpha(\bar{z})]$$

Φ 中所有的 $\exists \bar{z} R\bar{z}$ 出现要么被替换为 $\exists \bar{z} \perp$ (永假式), 要么被替换为 $\exists \bar{z} \alpha(\bar{z})$ (永真式)。我们把 Ψ 中出现的所有 $\exists \bar{z} \perp$ 删除, 并且把包含 $\exists \bar{z} \alpha(\bar{z})$ 的子句删除。对于 $\bar{Y}$ 中的每个 Y_i 我们都重复这一过程, 最后 Ψ 可以转化为一个等价的公式 $\exists \bar{y}_1 \phi_1 \vee \dots \vee \exists \bar{y}_n \phi_n$, 其中每个 ϕ_i ($1 \leq i \leq n$) 是一个 $\Sigma_1^1\text{-KROM}$ 公式。 $\square$

命题 3.3. $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$ 的数据复杂性在 NL 中。

证明. 根据命题 3.2 只需证明公式 $\exists \bar{y}_1 \phi_1 \vee \dots \vee \exists \bar{y}_n \phi_n$ (每个 ϕ_i ($1 \leq i \leq n$) 是一个 $\Sigma_1^1\text{-KROM}$ 公式) 的数据复杂性在 NL 中即可。给定一个结构, 一个图灵机可以在对数空间内随机选择 $i \in \{1, \dots, n\}$ 并且对 $\bar{y}_i$ 进行赋值。 ϕ_i 是一个 $\Sigma_1^1\text{-KROM}$ 公式, 它的模型判定问题在 NL 中 ([11]), 此命题得证。 $\square$

定理 3.2. 在有序结构上, $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$ 刻画 NL。

证明. 在命题 3.3 中证明了 $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$ 的数据复杂性在 NL 中。由于每个 $\Sigma_1^1\text{-KROM}$ 公式也是一个 $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$ 公式, 并且已知 $\Sigma_1^1\text{-KROM}$ 在有序结构上能够刻画 NL ([11]), 由此可知 $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$ 也能在有序结构上刻画 NL。 $\square$

由推论 1 可知 $\Sigma_2^1\text{-KROM}^r$ 等价于 $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$, 因此可以得到:

推论 2. 在有序结构上, $\Sigma_2^1\text{-KROM}^r$ 也可以刻画 NL。

Fagin 证明了 $\exists \text{SO}$ (即 $\Sigma_1^1\text{-SO}$) 可以在所有结构上刻画 NP ([6]), 与其对应的全称型二阶逻辑 $\Pi_1^1\text{-SO}$ 可以在所有结构上刻画 co-NP。接下来我们证明 SO-KROM^r 的全称存在型部分 $\Pi_2^1\text{-KROM}^r$ 也可以在所有结构上刻画 co-NP。

命题 3.4. $\Pi_2^1\text{-KROM}^r$ 的数据复杂性在 co-NP 中。

证明. 给定一个 $\Pi_2^1\text{-KROM}^r$ 公式 $\Phi = \forall T_1 \cdots \forall T_n \exists R_1 \cdots \exists R_m \forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_k)$, 对于任意的结构 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \Phi$ 当且仅当对 $\mathcal{A}$ 上所有的关系 $T_1^{\mathcal{A}}, \dots, T_n^{\mathcal{A}}$ 都有

$$(\mathcal{A}, T_1^{\mathcal{A}}, \dots, T_n^{\mathcal{A}}) \models \exists R_1 \cdots \exists R_m \forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_k)$$

注意到 $\exists R_1 \cdots \exists R_m \forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_k)$ 是一个 $\Sigma_1^1\text{-KROM}^r$ 公式, 根据命题 3.3 知道它的模型判定问题在 NL 中。因此 $\mathcal{A} \models \Phi$ 可以在 co-NP 中判定。 $\square$

命题 3.5. 在所有的结构上, 每个 $\Pi_1^1\text{-SO}$ 公式等价于一个 $\Pi_2^1\text{-KROM}^r$ 公式。

证明. 令 σ 是某个给定的词汇表, Θ 是一个以 σ 为词汇表的 $\Pi_1^1\text{-SO}$ 公式, K 是所有满足 Θ 的 σ -结构的集合。则 K 可以在 co-NP 中判定, 它的补集可以在 NP 中判定。 $\neg\Theta$ 刻画了 K 的补集, 它等价于一个 $\Sigma_1^1\text{-SO}$ 公式, 使用 Skolem 关系可以将其转换为一个等价的 Σ_1^1 -型公式 $\Psi = \exists R_1 \cdots \exists R_m \forall \bar{x} (\exists \bar{z} R_m \bar{y} \bar{z} \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$, 其中 $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$ 是一个不含量词的 CNF 公式。([5, 10]) 令 $\mathcal{A}$ 是一个 σ -结构, 我们构造一个命题 CNF 公式 ψ : 假设 $\bar{x} = x_1, \dots, x_s$, 把 Ψ 的一阶部分替换成 $\bigwedge_{\bar{a} \in A^s} (\exists \bar{z} R_m \bar{y} \bar{z} \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)[\bar{x}/\bar{a}]$, 将公式 $\exists \bar{z} R_m \bar{y} \bar{z}[\bar{x}/\bar{a}]$ 替换为 $\bigvee_{\bar{b} \in A^{|\bar{z}|}} R_m \bar{y} \bar{z}[\bar{x}/\bar{a}, \bar{z}/\bar{b}]$; 对每个子句中的一阶公式用他们在 $\mathcal{A}$ 中的真值代替, 并且将每个原子公式 $R_i \bar{c}$ 视为是一个命题变元。容易看出 $\mathcal{A} \models \Theta$ 当且仅当 $\mathcal{A} \models \Psi$ 当且仅当 ψ 不可满足。

由例 2 可以知道每个命题 CNF 公式都可以编码成一个 τ -结构, 并且存在一个 $\Pi_2^1\text{-KROM}^r(\tau)$ 公式 Φ 定义所有不可满足的 CNF 公式编码成的结构。下面我们根据 Ψ 构造一个 τ 在 σ 中的不含量词的解释 (即用 σ -结构来编码 τ -结构, 相关定义可参考文献 [5], 第十一章第二节)

$$\Pi = (\pi_{uni}(\bar{v}), \pi_C(\bar{v}), \pi_V(\bar{v}), \pi_P(\bar{v}_1, \bar{v}_2), \pi_N(\bar{v}_1, \bar{v}_2))$$

其中 Π 中的公式均为不含量词的 σ -公式, π_{uni} 定义了 τ -结构的论域, $\pi_C, \pi_V, \pi_P, \pi_N$ 分别定义了 τ -结构中的关系 C, V, P, N 。 Π 的宽度即元组 $\bar{v}$ 的维数 $|\bar{v}|$ 且 $|\bar{v}| = |\bar{v}_1| = |\bar{v}_2|$ 。我们根据例 2 中的 Φ 构造出一个 $\Pi_2^1\text{-KROM}^r(\sigma)$ 公式 $\Phi^{-\Pi}$ 使得对任意至少包含两个元素的 σ -结构 $\mathcal{A}$ 都有 $\mathcal{A} \models \Theta$ 当且仅当 $\mathcal{A} \models \Phi^{-\Pi}$ 。

公式 ψ 中包含的子句的数目最多为 $(n+1)|A^s|$, 由于把每个 $R_i \bar{c}$ 看成是一个命题变元, 那么它包含的变元的数目最多为 $\sum_{i=1}^m |A^{arity(R_i)}|$ 。因此可以找到一个固定的数 k 使得可以用 A^k 中的元素对所有的子句和变元进行编码。令 $g = \max\{arity(R_1), \dots, arity(R_m)\}$, $k = 3 + \max\{(n+1+s), (g+m)\}$ 。定义解释 Π 的宽度为 k , $\bar{v} = v_1, \dots, v_k$, 定义 $\pi_{uni}(\bar{v}) = \bigwedge_{i=1}^k (v_i = v_i)$ 。对于 A^k 中的元组 $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, 我们用前两个元素 a_1, a_2 来表示这一元组编码的是子句还是变元, 即如果 $a_1 \neq a_2$ 则这一元组编码子句, 否则编码变元。

如果 $\bar{a}$ 编码了一个子句, 我们对其进行如下划分:

$$\underbrace{a_1 a_2}_{a_1 \neq a_2} \underbrace{a_3 \cdots a_{n+4}}_{n+2 \text{ 个}} \underbrace{a_{n+5} \cdots a_{n+4+s}}_{s \text{ 个}} \underbrace{a_{n+5+s} \cdots a_k}_{\text{填充作用}}$$

其中 a_1, a_2 后面的 $n+2$ 个元素 $(a_3, \dots, a_{n+4})$ 表示编码的是 $\exists \bar{z} R_m \bar{y} \bar{z}, C_1, \dots, C_n$ 中的哪一个子句, 接下来的 s 个元素表示这一子句出现在对 $(\exists \bar{z} R_m \bar{y} \bar{z} \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$ 赋值为 $(a_{n+5}, \dots, a_{n+4+s})$ 的分支中, 剩下的元素起填充作用。对每个子句 $C_j (1 \leq j \leq n)$, 令 C'_j 代表 C_j 中只含有一阶公式的部分。令公式 $\varphi_h = \bigwedge_{i=3}^h (v_1 = v_i) \wedge \bigwedge_{j=h+1}^{n+4} (v_2 = v_j)$ 。定义 $\pi_C(\bar{v})$ 为以下两个公式的合取:

- $(v_1 \neq v_2) \wedge \bigwedge_{j=n+5+s}^k (v_1 = v_j)$ ($\bar{v}$ 编码了一个子句并且所有的填充元素都等于 v_1),
- $(v_1 = v_3) \wedge \bigwedge_{j=4}^{n+4} (v_2 = v_j) \vee \bigvee_{h=4}^{n+3} (\varphi_h \wedge \neg C'_{h-3} [x_1/v_{n+5}, \dots, x_s/v_{n+4+s}])$ ($\bar{v}$ 编码子句 $\exists \bar{z} R_m \bar{y} \bar{z}$ 或者子句 C_{h-3} , 并且 C_{h-3} 一阶部分的真值为假)。

如果 $\bar{a}$ 编码了一个变元, 我们对其进行如下划分:

$$\underbrace{a_1 a_2}_{a_1 = a_2} \underbrace{a_3 \cdots a_{m+3}}_{m+1 \text{ 个}} \underbrace{a_{m+4} \cdots a_{m+3+arity(R_i)}}_{arity(R_i) \text{ 个}} \underbrace{a_{m+4+arity(R_i)} \cdots a_k}_{\text{填充作用}}$$

其中 a_1, a_2 后面的 $m+1$ 个元素 $(a_3, \dots, a_{m+3})$ 表示编码的是 $R_1, \dots, R_m$ 中的某个。若编码的是 R_i , 则接下来的 $arity(R_i)$ 个元素代表被编码的变元是 $R_i a_{m+4} \cdots a_{m+3+arity(R_i)}$, 剩下的元素起填充作用。定义公式 $\psi_l (1 \leq l \leq m)$ 为下面两个公式的合取:

- $\bigwedge_{i=3}^{l+2} (v_1 = v_i) \wedge \bigwedge_{t=m+4+arity(R_l)}^k (v_1 = v_t)$ (编码了类型为 R_l 的变元, 令 $v_3, \dots, v_{l+2}$ 和填充元素全部等于 v_1),
- $(v_1 \neq v_{l+3}) \wedge \bigwedge_{j=l+4}^{m+3} (v_{l+3} = v_j)$ ($v_{l+3}, \dots, v_{m+3}$ 之间互相相等但是不等于 v_1)。

定义公式 $\pi_V(\bar{v}) = (v_1 = v_2) \wedge \bigvee_{l=1}^m \psi_l$ 。

令 $\bar{v}_1 = v_{1,1}, \dots, v_{1,k}$, $\bar{v}_2 = v_{2,1}, \dots, v_{2,k}$ 。假设 $\bar{v}_1$ 编码了子句 $C_j[x_1/v_{1,n+5}, \dots, x_s/v_{1,n+4+s}]$, $(\neg) R_l \bar{x}'$ 出现在子句 C_j 中, $R_l \bar{x}'[x_1/v_{1,n+5}, \dots, x_s/v_{1,n+4+s}] = R_l v_{1,i_1} \cdots v_{1,i_{arity(R_l)}}$, $\bar{v}_2$ 编码了变元 $R_l v_{2,m+4} \cdots v_{2,m+3+arity(R_l)}$ 。我们用 $\alpha_{R_l \bar{x}', j}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ 代表公式 $\bigwedge_{a=1}^{arity(R_l)} v_{1,i_a} = v_{2,m+3+a}$ 。我们用 $Pos(C_j)$ 代表所有在子句 C_j 中有正出现的二阶原子公式的集合, 用 $Neg(C_j)$ 代表所有在子句 C_j 中有负出现的二阶原子公式的集合。定义公式 $\pi_N(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ 为

$$\pi_C(\bar{v}/\bar{v}_1) \wedge \pi_V(\bar{v}/\bar{v}_2) \wedge (v_{1,1} = v_{2,1}) \wedge (v_{1,2} = v_{2,m+3}) \wedge \bigvee_{h=4}^{n+3} (\varphi_h[\bar{v}/\bar{v}_1] \wedge \bigvee_{R_l \bar{x}' \in Neg(C_{h-3})} (\psi_l(\bar{v}/\bar{v}_2) \wedge \alpha_{R_l \bar{x}', h-3}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)))$$

考虑公式 $\exists \bar{z} R_m \bar{y} \bar{z}$, 假设 $\bar{v}_1$ 编码了子句 $\exists \bar{z} R_m \bar{y} \bar{z}$, 且 $\exists \bar{z} R_m \bar{y} \bar{z}[x_1/v_{1,n+5}, \dots, x_s/v_{1,n+4+s}] = \exists \bar{z} R_m v_{1,i_1} \dots v_{1,i_{|\bar{y}|}} \bar{z}$ 。定义 $\varphi_{R_m}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ 为下列公式的合取:

- $(v_{1,1} = v_{1,3}) \wedge \bigwedge_{j=4}^{n+4} (v_{1,2} = v_{1,j})$ ($\bar{v}_1$ 编码了子句 $\exists \bar{z} R_m \bar{y} \bar{z}$),
- $\bigwedge_{j=3}^{m+2} (v_{2,1} = v_{2,j}) \wedge (v_{2,m+2} \neq v_{2,m+3})$ ($\bar{v}_2$ 编码了 R_m 类型的变元),
- $\bigwedge_{j=m+4}^{m+3+|\bar{y}|} v_{2,j} = v_{1,i_{j-m-3}}$ ($\bar{v}_2$ 与 $\bar{v}_1$ 中编码了 $\exists \bar{z} R_m \bar{y} \bar{z}$ 中 $\bar{y}$ 的部分相等)。

定义公式 $\pi_P(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ 为:

$$\pi_C(\bar{v}/\bar{v}_1) \wedge \pi_V(\bar{v}/\bar{v}_2) \wedge (v_{1,1} = v_{2,1}) \wedge (v_{1,2} = v_{2,m+3}) \wedge (\varphi_{R_m}(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \vee \bigvee_{h=4}^{n+3} (\varphi_h[\bar{v}/\bar{v}_1] \wedge \bigvee_{R_l \bar{x}' \in Pos(C_{h-3})} (\psi_l(\bar{v}/\bar{v}_2) \wedge \alpha_{R_l \bar{x}', h-3}(\bar{v}_1, \bar{v}_2))))$$

定义公式 $\Phi^{-\Pi}$ 为:

$$\forall X \exists Y \forall \bar{v}_1 \forall \bar{v}_2 \left(\begin{array}{l} \exists \bar{z} Y \bar{z} \wedge (Y \bar{v}_1 \rightarrow \pi_C(\bar{v}_1)) \wedge \\ (Y \bar{v}_1 \wedge \pi_V(\bar{v}_2) \wedge \pi_P(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \rightarrow \neg X \bar{v}_2) \wedge \\ (Y \bar{v}_1 \wedge \pi_V(\bar{v}_2) \wedge \pi_N(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \rightarrow X \bar{v}_2) \end{array} \right)$$

对于任意有穷结构 $\mathcal{A}$, 都有一个不含量词的一阶公式 $\phi_{iso}(x_1, \dots, x_{|A|})$ 刻画它的同构型 ([5]), 其中 A 是 $\mathcal{A}$ 的论域。所有单元元素 (论域中只包含一个元素) σ -结构是有限的, 因此对单元元素结构组成的集合都可以用一个一阶公式对其进行刻画。由此可知任何二阶公式在单元元素 σ -结构上都等价于一个全称型的一阶公式。假设 Θ 等价于 $\forall \bar{w} \phi$ (在单元元素结构上), 其中 ϕ 是一个不含量词的公式。那么对任意的 σ -结构 $\mathcal{A}$ 都有 $\mathcal{A} \models \Theta$ 当且仅当 $\mathcal{A} \models \Phi^{-\Pi} \vee \forall \bar{w} \phi$ 。由于 $\pi_C, \pi_V, \pi_P, \pi_N, \phi$ 全部是不含量词的公式, 因此通过基本的变换操作可以将 $\Phi^{-\Pi} \vee \forall \bar{w} \phi$ 转化为一个 Π_2^1 -KROM^r 公式。 $\square$

根据命题 3.4 和命题 3.5 我们可以得出以下结论。

定理 3.3. 在所有的结构上, Π_2^1 -KROM^r 与 Π_1^1 -SO 具有相同的表达能力, 可以刻画 co-NP。

4 扩展修正 KROM 逻辑的描述复杂性

在 SO-KROM 的定义中如果我们要求每个子句都只相对于存在二阶变元是 KROM 的, 那么可以得到二阶扩展 KROM 逻辑 (SO-EKROM)。与此类似, 如果在 SO-KROM^r 的定义中要求每个子句都只相对于存在二阶变元是 KROM 的, 那么可以到二阶扩展修正 KROM 逻辑 (SO-EKROM^r)。本节证明 SO-EKROM 可以在有序结构上刻画 co-NP, 而 Π_2^1 -EKROM^r 可以在所有结构上刻画 co-NP。

定义 4.1. 以 τ 为词汇表的二阶扩展 KROM 逻辑, 记为 $\text{SO-EKROM}(\tau)$, 是下面一些二阶公式的集合

$$\forall T_1 \exists R_1 \cdots \forall T_m \exists R_m \forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$$

其中 $T_1, \dots, T_m, R_1, \dots, R_m$ 是关系符号, $C_1, \dots, C_n$ 是相对于 $R_1, \dots, R_m$ 的扩展 KROM 子句, 即每个 C_j 是一个具有如下形式的析取式

$$\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_q \vee H_1 \vee H_2$$

其中

- (1) 每个 β_s ($1 \leq s \leq q$) 要么是 $Q\bar{y}$, 要么是 $\neg Q\bar{y}$, 其中 $Q \in \tau \cup \{T_1, \dots, T_m\}$,
- (2) 每个 H_t ($t \in \{1, 2\}$) 要么是 $R_i \bar{u}$, 要么是 $\neg R_i \bar{u}$ ($R_i \in \{R_1, \dots, R_m\}$), 要么是布尔常项 $\perp$ 。

如果我们把条件 (2) 改为

- (2') 每个 H_t ($t \in \{1, 2\}$) 要么是 $R_i \bar{u}$, 要么是 $\neg R_i \bar{u}$, 要么是 $\exists \bar{z} R_i \bar{z}$ ($R_i \in \{R_1, \dots, R_m\}$), 要么是布尔常项 $\perp$ 。

则我们称这一逻辑为二阶扩展修正 KROM 逻辑, 记为 SO-EKROM^r 。

下面我们首先考虑 SO-EKROM 和 SO-EKROM^r 的数据复杂性。

命题 4.1. SO-EKROM 的数据复杂性在 co-NP 中。

证明. 给定一个 SO-EKROM 公式 $\Phi = \forall T_1 \exists R_1 \cdots \forall T_m \exists R_m \forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$, 对任意结构 $\mathcal{A}$, 我们把判定 $\mathcal{A} \models \Phi$ 的问题归约成一个 QE2-CNF 公式 $\varphi_{\mathcal{A}}$: 把 Φ 的一阶部分 $\forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$ 用 $\bigwedge_{\bar{a} \in A^{|\bar{x}|}} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)[\bar{x}/\bar{a}]$ 替换, 并且对每个子句中的一阶公式用他们在 $\mathcal{A}$ 中的真值替换; 把二阶前缀中的 $\forall T_i$ 和 $\exists R_i$ 分别用 $\forall T_i \bar{a}_1 \cdots \forall T_i \bar{a}_{|A| \text{arity}(T_i)}$ 和 $\exists R_i \bar{a}_1 \cdots \exists R_i \bar{a}_{|A| \text{arity}(R_i)}$ 替换, 把每个原子公式 $T_i \bar{c}$ (或 $R_i \bar{c}$) 看成是一个命题变元。易见 $\mathcal{A} \models \Phi$ 当且仅当 $\varphi_{\mathcal{A}}$ 为真。相对于 $\mathcal{A}$, $\varphi_{\mathcal{A}}$ 可以在多项式时间内计算出来, 并且其前缀中量词交替次数是固定的。此类 QE2-CNF 公式的真值判定问题在 co-NP 中 ([9])。因此可以在 co-NP 内对 $\mathcal{A} \models \Phi$ 进行判定。 $\square$

与命题 3.4 的证明类似, 我们还可以得到以下结论。

命题 4.2. $\Pi_2^1\text{-EKROM}^r$ 的数据复杂性在 co-NP 中。

由于每个 $\Pi_2^1\text{-KROM}^r$ 公式也是一个 $\Pi_2^1\text{-EKROM}^r$ 公式, 结合定理 3.3 可得:

定理 4.1. 在所有的结构上, $\Pi_2^1\text{-EKROM}^r$ 可以刻画 co-NP 。

下面我们研究 SO-EKROM 在有序结构上的描述复杂性。

定理 4.2. 在有序结构上, Π_2^1 -EKROM 可以刻画 co-NP。

证明. 由于每个 Π_2^1 -EKROM 公式也是一个 Π_2^1 -EKROM^r 公式, 由定理 4.1 可知只需要证明在有序结构上 Π_2^1 -EKROM^r 与 Π_2^1 -EKROM 等价即可。对任意的 Π_2^1 -EKROM^r 公式

$$\Phi = \forall T_1 \cdots \forall T_n \exists R_1 \cdots \exists R_m \forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_k)$$

我们把 $T_1, \dots, T_n$ 看成是固定的关系符号, 那么公式 $\phi = \exists R_1 \cdots \exists R_m \forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_k)$ 是一个 Σ_1^1 -KROM^r 公式。根据定理 3.2 知道存在一个 Σ_1^1 -KROM 公式 $\phi' = \exists R'_1 \cdots \exists R'_m \forall \bar{x}' (C'_1 \wedge \cdots \wedge C'_k)$ 使得 ϕ 和 ϕ' 在有序结构上等价。令 $\Phi' = \forall T_1 \cdots \forall T_n \phi'$, 那么对任意的有序结构 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \Phi$ 当且仅当 $\mathcal{A} \models \Phi'$ 。容易看出 Φ' 是一个 Π_2^1 -EKROM 公式。□

根据定理 4.2 和命题 4.1 容易得出:

定理 4.3. 在有序结构上, SO-EKROM 等价于它的全称存在型部分 Π_2^1 -EKROM, 并且可以刻画 co-NP。

5 结论

本文为刻画 NL 和 co-NP 提出了新的逻辑, 为研究它们之间的关系提供了新的途径。本文证明了 SO-KROM^r 具有非常强的表达能力, 在有序结构上 Σ_1^1 -KROM^r 等价于 Σ_1^1 -KROM, 可以刻画 NL; 在所有结构上 Π_2^1 -KROM^r 可以刻画 co-NP。另外, 本文还提出了二阶扩展 KROM 逻辑和二阶扩展修正 KROM 逻辑, 并对他们的复杂性和表达能力进行了研究。本文证明了在有序结构上 SO-EKROM 与 Π_2^1 -EKROM 等价, 它们都可以刻画 co-NP; 在所有结构上 Π_2^1 -EKROM^r 与 Π_2^1 -KROM^r 等价, 也都可以刻画 co-NP。关于整个 SO-KROM^r 和 SO-EKROM^r 的表达能力和复杂性还有待研究, 可以作为今后的工作。

参考文献

- [1] S. Abiteboul and V. Vianu, 1989, "Fixpoint extensions of first-order logic and Datalog-like languages", *Proceedings of the 4th Annual Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 71–72, Washington, D. C.: Computer Society Press.
- [2] J. R. Büchi, 1960, "Weak second-order arithmetic and finite automata", *Mathematical Logic Quarterly*, 6: 66–92.

- [3] J. R. Büchi, 1990, "On a decision method in restricted second order arithmetic", *The Collected Works of J. Richard Büchi*, pp. 425–435, New York: Springer-Verlag.
- [4] S. Cook and A. Kolokolova, 2004, "A second-order theory for NL", *Proceedings of the 19th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 398–407, Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society.
- [5] H.-D. Ebbinghaus and J. Flum, 1995, *Finite Model Theory*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- [6] R. Fagin, 1974, "Generalized first-order spectra and polynomial-time recognizable sets", *SIAM-AMS Proceedings*, **7**: 43–73.
- [7] S. Feng and X. Zhao, 2012, "The complexity and expressive power of second-order extended logic", *Studies in Logic*, **5(1)**: 11–34.
- [8] S. Feng and X. Zhao, 2013, "Complexity and expressive power of second-order extended Horn logic", *Mathematical Logic Quarterly*, **59(1-2)**: 4–11.
- [9] A. Flögel, M. Karpinski and H. K. Büning, 1990, "Subclasses of quantified boolean formulas", *Proceedings of the 4th Workshop on Computer Science Logic*, pp. 145–155, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- [10] E. Grädel, 1991, "The expressive power of second order Horn logic", *Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pp. 466–477, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- [11] E. Grädel, 1992, "Capturing complexity classes by fragments of second-order logic", *Theoretical Computer Science*, **101(1)**: 35–57.
- [12] A. G. Hamilton, 1988, *Logic for Mathematicians*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [13] N. Immerman, 1982, "Relational queries computable in polynomial time", *Proceedings of the 14th annual ACM symposium on Theory of computing*, pp. 147–152, New York: ACM Press.
- [14] N. Immerman, 1987, "Languages that capture complexity classes", *SIAM Journal on Computing*, **16(4)**: 760–778.
- [15] N. Immerman, 1988, "Nondeterministic space is closed under complementation", *SIAM Journal on Computing*, **17(5)**: 935–938.
- [16] M. Sipser, 1996, *Introduction to the Theory of Computation*, London: International Thomson Publishing.
- [17] B. Trakhtenbrot, 1950, "The impossibility of an algorithm for the decidability problem on finite classes", *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, **70(4)**: 569–572.
- [18] B. Trakhtenbrot, 1961, "Finite automata and the logic of monadic predicates", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **140(2)**: 326–329.
- [19] M. Y. Vardi, 1982, "The complexity of relational query languages", *Proceedings of the 14th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 137–146, New York: ACM Press.

(责任编辑: 袁之)

The Expressive Power and Complexity of Second-order Revised KROM Logic

Shiguang Feng[✉] Kexu Wang Xishun Zhao

Abstract

We introduce second-order revised KROM logic (SO-KROM^r), second-order extended KROM logic (SO-EKROM) and second-order extended revised KROM logic (SO-EKROM^r), and study their expressive power and complexity. We show that, on ordered finite structures, Σ_1^1 -KROM^r is equivalent to Σ_1^1 -KROM, it can capture NL; SO-EKROM and Π_2^1 -EKROM are equivalent, and both of them can capture co-NP. On all finite structures, Π_2^1 -KROM^r and Π_2^1 -EKROM^r are equivalent, and both of them can also capture co-NP.

Shiguang Feng[✉] School of Information Science and Technology, Nantong University
shigfeng@ntu.edu.cn

Kexu Wang Institute of Logic and Cognition, Sun Yat-sen University
wangkx7@mail2.sysu.edu.cn

Xishun Zhao Institute of Logic and Cognition, Sun Yat-sen University
hsszxs@mail.sysu.edu.cn