逻辑学研究　2021 年第 5 期，23–33
文章编号：1674-3202(2021)-05-0023-11

三门问题的概率动态认知逻辑分析

李章吕　　　潘易欣

摘　要：三门问题是一个反直观的概率问题，受到数学、逻辑学、心理学、经济学、计算机科学等众多领域的共同关注。概率动态认知逻辑是新近发展起来的一种逻辑理论，它把概率逻辑和动态认知逻辑相结合，将事件的概率处理成认知模型里的世界的概率，从而可以更加直观地展现事件的概率分布。借助概率动态认知逻辑为三门问题建立概率认知模型，可以清晰呈现换门与不换门各自赢得汽车的概率，并全面揭示三门问题的概率认知模型在概率乘积更新规则下的变化过程，从而帮助我们以一种整体的视角深入理解三门问题。

关键词：三门问题；概率动态认知逻辑；概率乘积更新规则；概率认知模型

中图分类号：B81　　　**文献标识码：**A

1　引言

三门问题（Monty Hall problem）源于美国的一档娱乐节目。该档节目设置了 A, B, C 三扇门，其中一扇门后有一辆汽车，另外两扇门后各有一头羊。玩家若选中后面有车的那扇门即可获得该汽车。游戏最开始让玩家先选一扇门，然后在尚未打开这扇门的情况下，由主持人打开另外两扇门后有羊的一扇（若两扇门后都是羊则任意打开一扇），让玩家看到门后的羊，并给玩家一次换门的机会。问题是：换门是否会增加玩家赢得汽车的概率？

从直观上看，似乎玩家选择的那扇门后有车的概率和主持人未打开的那扇门后有车的概率都是 1/2。Krauss 和 Wang 的实验也表明，只有 29% 的人选择换门，且即便在换门的这群人里也很少有人觉知到换门赢得汽车的概率大于不换门（[10]）。然而，Gillman 等人的研究表明，在主持人打开那扇没有车的门后，换门赢得汽车的概率更大。（[6,5,12,8]）这是一个非常反直观的结果，引发了旷日持久的讨论，不仅数学爱好者关注这个问题，心理学、经济学、计算机科学等领域的学者也对其进行了研究：实验心理学家通过设计实验来研究“害怕后悔”“错误表征”

收稿日期：2021-05-27
作者信息：李章吕　西南大学逻辑与智能研究中心
lizhanglv@126.com
潘易欣　西南大学逻辑与智能研究中心
Yixin0_0@126.com
基金项目：国家社会科学基金项目“贝叶斯决策理论的概率基础与应用研究”(19BZX134)。

等心理因素对玩家的影响，进而解释为什么有些玩家会选择不换门（[14]），但没有给出具体方案来比较换门与不换门赢得汽车的概率；经济学家基于玩家对主持人动机的不信任来研究玩家与主持人之间的博弈，从而得出玩家不应该换门的结论（[11]），但并没有给出非博弈视角下换门与不换门赢得汽车的概率；计算机科学家利用 R 语言对三门问题进行建模并进行大量的数据模拟，表明在获得一定信息的前提下，改变最初选择提高了赢得汽车的可能性（[15]），但它没有从演绎的角度向我们展现换门与不换门的概率分布[1]；数学家和逻辑学家主要基于贝叶斯定理，用条件概率来对先验概率进行更新，并得出换门赢得汽车的概率更大（[8]），但这种方案在运算过程和最终结果的呈现上不够直观。

为了更加直观地呈现三门问题中换门与不换门各自赢得汽车的概率，本文拟用概率动态认知逻辑来为三门问题建立概率认知模型，并用概率更新模型来对其进行更新，从而将主体认知概率的变化过程细致地刻画出来。

2 概率动态认知逻辑的模型及其更新规则

概率动态认知逻辑（Probabilistic Dynamic Epistemic Logic，简称 PDEL）是一种将概率逻辑与动态认知逻辑相结合的逻辑系统。相比于一般的动态认知逻辑，PDEL 加入了概率内容，其表达力更加丰富；相比于一般的概率逻辑，PDEL 将事件的概率处理成认知模型里的世界的概率，其更加直观。

Halpern 和 Tuttle（[7]）以及 Fagin 和 Halpern（[4]）将概率逻辑与静态的认知逻辑相结合，建立了静态概率认知逻辑；Kooi（[9]）和 van Benthem（[2]）在静态的概率认知逻辑基础上，分别在其中加入了公开宣告和行动模型，使概率认知逻辑动态化，建立了概率动态认知逻辑；van Benthem、Gerbrandy 和 Kooi（[3]）在概率动态认知逻辑的概率更新规则中又明确区分了先验概率（prior probability）、发生概率（occurrence probability）和观测概率（observation probability），明确定义了概率认知模型、概率更新模型和概率乘积更新规则，完善了 PDEL 的语义内容；Achimescu、Baltag 和 Sack（[1]）将 [3] 中的单主体推广到了多主体，使得 PDEL 可以刻画多主体之间的互动。下面，我们在 [3] 的基础上介绍 PDEL 的模型与更新规则，在 [1] 的基础上介绍 PDEL 的语言和语义，为第三部分建立三门问题的概率认知模型奠定理论基础。

定义 1 (概率动态认知逻辑的语言)**.** 给定一个主体集 Ag，一个原子命题集 At 和一个有理数集 $\mathbb{Q}$，概率动态认知逻辑的语言可定义如下：

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_i\varphi \mid [A, e]\varphi \mid \alpha_1 \cdot P_i(\varphi_1) + \cdots + \alpha_n \cdot P_i(\varphi_n) \geq \beta$$

[1]这里的具体做法是结合 R 语言进行大量的编程模拟，并对模拟结果进行统计，发现换门赢得汽车的概率趋向于 2/3，不换门赢得汽车的概率趋向于 1/3。这实际上是一种归纳的方法。

其中，$p \in At$，$i \in Ag$ 且 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{Q}$。

根据这个定义，其它几个概率公式可定义如下：

$$P_i(\varphi) \geq P_i(\psi) := P_i(\varphi) - P_i(\psi) \geq 0$$
$$P_i(\varphi) \leq \beta := -P_i(\varphi) \geq -\beta$$
$$P_i(\varphi) = \beta := P_i(\varphi) \leq \beta \wedge P_i(\varphi) \geq \beta$$
$$P_i(\varphi) < \beta := \neg P_i(\varphi) \geq \beta$$
$$P_i(\varphi) > \beta := \neg P_i(\varphi) \leq \beta$$

定义 2 (概率认知模型). 给定一个主体集 Ag 和一个原子命题集 At，概率认知模型 $\mathfrak{M} = (S, \sim, P, V)$ 定义如下：

S 是一个有穷非空世界集；

$\sim$ 是主体 i 建立在 S 上的等价关系集；

$P : Ag \rightarrow (S \rightarrow (S \rightarrow [0,1]))$，$P$ 刻画了主体 i 在 S 中某个世界上对 S 中任意世界的概率指派，一般表示为 $P_i(s_m)(s_n)$，其中 $s_m, s_n \in S$，$m, n \in \mathbb{N}$；

$V : At \rightarrow \wp(S)$，$V$ 对每个原子命题指派一个 S 的子集。

与一般的认知模型相比，概率认知模型多了概率指派 P。直观上看，概率指派函数 P 表示的是主体在某个世界上对另一个世界指派概率，特别地，主体在任意一个世界上对 S 中所有世界的概率指派总和为 1。[3] 将概率认知模型中的 P 指派的概率命名为先验概率。

定义 3 (概率更新模型). 给定一个主体集 Ag 和一个原子命题集 At，概率更新模型 $\mathfrak{A} = (E, \sim, \Phi, pre, P)$ 定义如下：

E 是一个有穷非空事件集；

$\sim$ 是主体 i 建立在 E 上的等价关系集；

Φ 是 E 中事件发生的前提条件集，$\Phi \subseteq At$，Φ 是两两不一致的公式集；

pre : $\Phi \rightarrow (E \rightarrow [0,1])$，指前提条件 p 为真的情况下，事件 e 发生的概率，一般表示为 *pre*(p, e)，其中 $p \in \Phi$，$e \in E$，特别地，若 $\mathfrak{M}, s \vDash p$，则可以用 *pre*(s, e) 表示 *pre*(p, e)；

$P : Ag \rightarrow (E \rightarrow (E \rightarrow [0,1]))$，$P$ 刻画了主体 i 在 E 中某个事件上对 E 中任意事件指派概率，一般表示为 $P_i(e_m)(e_n)$，其中 $e_m, e_n \in E$，$m, n \in \mathbb{N}$。

其中，[3] 将概率更新模型中 *pre* 运算出来的结果命名为发生概率，将 P 指派的概率命名为观测概率。主体在任意一个事件上对 E 中所有事件的概率指派（观测概率）总和为 1。

定义 4 (概率乘积更新规则). 令 $\mathfrak{M}$ 是一个概率认知模型，$\mathfrak{A}$ 是一个概率更新模型。概率更新模型 $\mathfrak{A}$ 对概率认知模型 $\mathfrak{M}$ 的更新规则如下：

(1) $S' = \{(s,e) \mid s \in S, e \in E \quad 且 \quad pre(s,e) > 0\}$

(2) $(s,e) \sim_i' (s',e')$ 当且仅当 $s \sim_i s'$ 且 $e \sim_i e'$

(3) $P_i'((s,e))((s',e'))$

$$= \begin{cases} \dfrac{P_i(s)(s') \cdot pre(s',e') \cdot P_i(e)(e')}{\sum\limits_{s'' \in S, e'' \in E} P_i(s)(s'') \cdot pre(s'',e'') \cdot P_i(e)(e'')}, & \text{如果分母} > 0\text{；} \\ 0, & \text{其他情况；} \end{cases}$$

(4) $V'((s,e)) = V(s)$

更新后的概率认知模型 $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \times \mathfrak{A} = (S', \sim', P', V')$。

定义 5 (概率认知逻辑的语义)**.**

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{M}, s \vDash p & \text{当且仅当} & s \in V(p) \\ \mathfrak{M}, s \vDash \neg\varphi & \text{当且仅当} & \mathfrak{M}, s \nvDash \varphi \\ \mathfrak{M}, s \vDash \varphi \wedge \psi & \text{当且仅当} & \mathfrak{M}, s \vDash \varphi \text{ 且 } \mathfrak{M}, s \vDash \psi \\ \mathfrak{M}, s \vDash K_i\varphi & \text{当且仅当} & \text{对于所有 } t \in S\text{，} \\ & & \text{如果 } s \sim_i t\text{，那么 } \mathfrak{M}, t \vDash \varphi \\ \mathfrak{M}, s \vDash [A,e]\varphi & \text{当且仅当} & \text{对于所有 } \psi \in \Phi\text{，} \\ & & \text{如果 } \mathfrak{M}, s \vDash \psi\text{，那么 } \mathfrak{M} \times \mathfrak{A}, (s,e) \vDash \varphi \\ \mathfrak{M}, s \vDash \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j P_i(\varphi_j) \geq \beta & \text{当且仅当} & \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j P_i^s(\varphi_j) \geq \beta \end{array}$$

其中，$P_i^s(\varphi_j)$ 是 $\sum_{t \in S \& t \vDash \varphi_j} P_i(s)(t)$ 的缩写。

上述 PDEL 的语言和语义（定义 1 和 5）之所以借鉴 [1] 中的定义，是因为 [3] 采用的是带等号的概率公式，但带不等号的概率公式的表达力更为丰富。模型和更新规则（定义 2、3、4）之所以借鉴 [3] 中的定义，是因为三门问题只涉及单主体，这样可以保持语义的简洁性。

3 三门问题的概率动态认知逻辑解

我们将三门问题里的玩家视为认知主体。基于第二部分给出的 PDEL，首先建立三门问题的初始概率认知模型，然后根据主持人可能采取的行动来建立概率更新模型，最后求出更新后的概率认知模型，并将这个模型里概率赋值最高的世界作为主体的最优选择。

3.1 三门问题的概率认知模型

根据定义 2，用 a, b, c 分别表示原子命题“车在 A 门后”“车在 B 门后”“车在 C 门后”。三门问题最初的概率认知模型 $\mathfrak{M} = (S, \sim, P, V)$ 如图 1 所示，其中 $S = \{s_a, s_b, s_c\}$。根据无差别原则，在获取更多信息之前，主体对命题 a, b, c 指派的

概率是相等的，故对于 $s_m, s_n \in S$（$m, n \in \{a, b, c\}$），都有 $P_i(s_m)(s_n) = 1/3$。由于在同一个世界上，命题 a, b, c 有且只有一个为真，所以 $V(a) = \{s_a\}$，$V(b) = \{s_b\}$，$V(c) = \{s_c\}$。

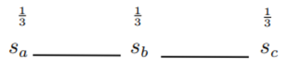

图 1: 三门问题的概率认知模型

3.2　三门问题的概率更新模型

根据定义 3，在主体选择 A 门的情况下，主持人打开 B 门或 C 门的概率更新模型 $\mathfrak{A} = (E, \sim, \Phi, pre, P)$，其中 $E = \{open\ B, open\ C\}$，$open\ B$ 和 $open\ C$ 分别表示"主持人打开了 B 门"和"主持人打开了 C 门"，$\Phi = \{a, b, c\}$。函数 pre 和概率指派函数 P 的值可以用全概率规则来计算。

令 $P(a)$、$P(b)$、$P(c)$ 分别表示汽车在 A 门后的概率、汽车在 B 门后的概率、汽车在 C 门后的概率，则 $P(a) = P(b) = P(c) = 1/3$；$P(open\ B \mid a)$，$P(open\ B \mid b)$，$P(open\ B \mid c)$ 分别表示汽车在 A 门后主持人打开 B 门的概率、汽车在 B 门后主持人打开 B 门的概率、汽车在 C 门后主持人打开 B 门的概率；$P(open\ C \mid a)$、$P(open\ C \mid b)$、$P(open\ C \mid c)$ 分别表示汽车在 A 门后主持人打开 C 门的概率、汽车在 B 门后主持人打开 C 门的概率、汽车在 C 门后主持人打开 C 门的概率。汽车所在的位置及主持人相应的行动共有如下三种情况：

(1) 当汽车在 A 门后时，按照无差别原则，主持人打开 B 门和 C 门的概率是相等的，即 $P(open\ B \mid a) = P(open\ C \mid a) = 1/2$。

(2) 当汽车在 B 门后时，因为 A 门已经被主体选中，所以主持人不可能打开 A 门，即 $P(open\ A \mid b) = 0$；又因为主持人要打开一扇没有车的门，所以他也不会打开 B 门，即 $P(open\ B \mid b) = 0$；因此，主持人只能打开 C 门，即 $P(open\ C \mid b) = 1$。

(3) 当汽车在 C 门后时，同理，$P(open\ A \mid c) = P(open\ C \mid c) = 0$；因此，主持人只能打开 B 门，即 $P(open\ B \mid c) = 1$。

根据全概率规则，在主体选择 A 门的情况下，$open\ B$ 和 $open\ C$ 发生的概率分别为：

$$
\begin{aligned}
& P(open\ B) \\
=& P(a) \cdot P(open\ B \mid a) + P(b) \cdot P(open\ B \mid b) + P(c) \cdot P(open\ B \mid c) \\
=& 1/3 \times 1/2 + 1/3 \times 0 + 1/3 \times 1 \\
=& 1/2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&P(open\ C)\\=&P(a)\cdot P(open\ C\mid a)+P(b)\cdot P(open\ C\mid b)+P(c)\cdot P(open\ C\mid c)\\=&1/3\times 1/2+1/3\times 1+1/3\times 0\\=&1/2\end{aligned}$$

根据 [3]，对于任意的 $p\in\Phi$ 和任意的 $e\in E$，PDEL 中 $pre(p,e)$ 的值就等于概率逻辑中 $P(e\mid p)$ 的值。因此，

$$\begin{aligned}&pre(s_a,open\ B)=P(open\ B\mid a)=1/2\\&pre(s_a,open\ C)=P(open\ C\mid a)=1/2\\&pre(s_b,open\ B)=P(open\ B\mid b)=0\\&pre(s_b,open\ C)=P(open\ C\mid b)=1\\&pre(s_c,open\ B)=P(open\ B\mid c)=1\\&pre(s_c,open\ C)=P(open\ C\mid c)=0\end{aligned}$$

根据 [3]，对于任意的 $e_m,e_n\in E$，PDEL 中 $P_i(e_m)(e_n)$ 的值就等于概率逻辑中 $P(e_n)$ 的值，因此，

$$\begin{aligned}&P_i(open\ B)(open\ B)=P(open\ B)=1/2\\&P_i(open\ B)(open\ C)=P(open\ C)=1/2\\&P_i(open\ C)(open\ C)=P(open\ C)=1/2\\&P_i(open\ C)(open\ B)=P(open\ B)=1/2\end{aligned}$$

概率更新模型 $\mathfrak{A}$ 可以用图 2 直观地表示：

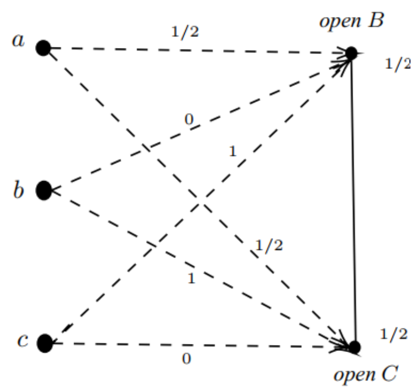

图 2: 三门问题的概率更新模型

其中，虚线表示函数 *pre*，分别表示在命题 a,b,c 为真的情况下，主体对事件 $open\ B$ 和 $open\ C$ 的概率指派，虚线上的数字是发生概率；实线表示主体对事件

open B 和 *open* C 的认知不可区分关系，实线右侧的数字是观测概率。

3.3 三门问题更新后的概率认知模型

三门问题最初的概率认知模型 $\mathfrak{M}$，在经过概率更新模型 $\mathfrak{A}$ 更新后为 $\mathfrak{M}' = (S', \sim', P', V')$，该模型本来共有六个世界（如图 3 所示）：

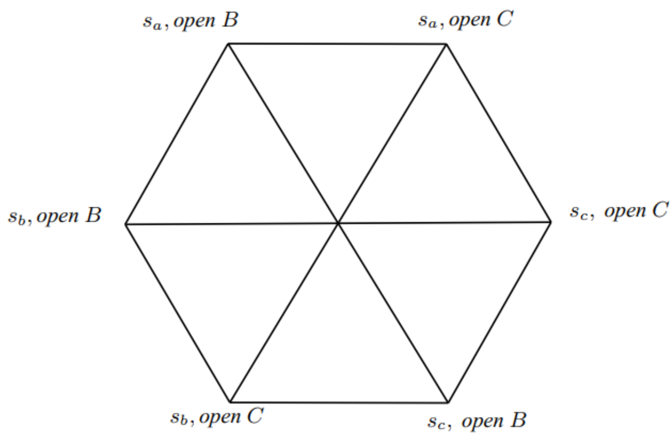

图 3: 三门问题更新后的概率认知模型 1

其中，世界 $(s_a, \mathit{open}\ B)$ 表示“车在 A 门后并且主持人打开了 B 门”，其余世界类似。

根据定义 4 的第一条规则，需要删去概率指派为 0 的世界。由于 $\mathit{pre}(s_b, \mathit{open}\ B) = 0$ 且 $\mathit{pre}(s_c, \mathit{open}\ C) = 0$，因此，应该在世界集中删去 $(s_b, \mathit{open}\ B)$ 和 $(s_c, \mathit{open}\ C)$。

再根据定义 4 的第三条规则，世界 $(s_a, \mathit{open}\ B)$ 的概率为 $1/6$，计算过程如下：

$$\begin{aligned}
&P_i((s_a, \mathit{open}\ B))((s_a, \mathit{open}\ B)) \\
=&\frac{P_i(s_a)(s_a)\cdot \mathit{pre}(s_a, \mathit{open}\ B)\cdot P_i(\mathit{open}\ B)(\mathit{open}\ B)}{\sum\limits_{s''\in S, e''\in E} P_i(s)\left(s''\right)\cdot \mathit{pre}\left(s'', e''\right)\cdot P_i(e)\left(e''\right)} \\
=&\frac{1/3\times 1/2\times 1/2}{1/3\times 1/2\times 1/2+1/3\times 1/2\times 1/2+1/3\times 1\times 1/2+1/3\times 1\times 1/2} \\
=&1/6
\end{aligned}$$

另外三个世界 $(s_a, \mathit{open}\ C)$，$(s_b, \mathit{open}\ C)$，$(s_c, \mathit{open}\ B)$ 的概率计算方法类似，它们的概率分别为 $1/6$，$1/3$，$1/3$。

三门问题删去概率指派为 0 的世界后的概率认知模型 $\mathfrak{M}' = (S', \sim', P', V')$ 如图 4 所示：

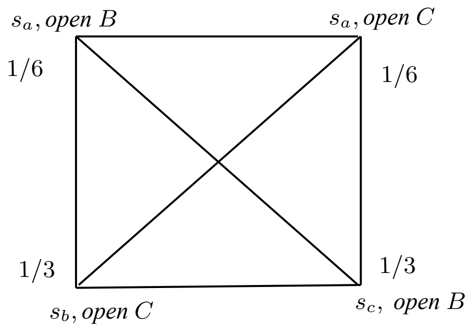

图 4: 三门问题更新后的概率认知模型 2

在主体选择 A 门并且主持人打开 B 门的情况下，比较车在 A 门后和车在 C 门后的概率，就是比较 $(s_a, open\ B)$ 和 $(s_c, open\ B)$ 的概率。由图 4 可知，$(s_c, open\ B)$ 的概率更高，因此主体应该换为 C 门；同理，在主体选择 A 门并且主持人打开 C 门的情况下，主体应该换为 B 门。总之，在主体选中 A 门后，无论主持人打开哪一扇门，换门赢得汽车的概率都更高。

上述是在模型层面直观地比较模型 $\mathfrak{M}'$ 中各个世界的概率，下面我们基于语义定义来证明公式 $P_i(a) < P_i(\neg a)$ 在模型 $\mathfrak{M}'$ 中有效。

根据定义 4 的第四条规则，$V'(a) = \{(s_a, open\ B), (s_a, open\ C)\}$，$V'(b) = \{(s_b, open\ C)\}$，$V'(c) = \{(s_c, open\ B)\}$。又由于 a，b，c 在任意一个世界上有且只有一个为真，因此，

$$\mathfrak{M}', (s_a, open\ B) \vDash a;$$
$$\mathfrak{M}', (s_a, open\ C) \vDash a;$$
$$\mathfrak{M}', (s_b, open\ C) \vDash \neg a;$$
$$\mathfrak{M}', (s_c, open\ B) \vDash \neg a。$$

再根据定义5中关于概率公式的语义解释，在模型 $\mathfrak{M}'$ 中的任意一个世界 $(s, e) \in S'$ 上，都有：

$$\mathfrak{M}', (s, e) \vDash P_i(a) = 1/3;$$
$$\mathfrak{M}', (s, e) \vDash P_i(\neg a) = 2/3。$$ [2]

因此，在主体最初选择了 A 门且主持人打开了一扇没有汽车的门后，汽车在 A 门后的概率要小于汽车不在 A 门后的概率，也就是说，主体选择换门能提高赢得汽车的概率。

从三门问题最初的概率认知模型（图 1）到更新后的概率认知模型（图 4），

[2] 其中，$P_i(a)$ 的值就是主体对 $(s_a, open\ B)$ 和 $(s_a, open\ C)$ 的概率指派之和，即 $1/6 + 1/6 = 1/3$；$P_i(\neg a)$ 的值就是主体对 $(s_b, open\ C)$ 和 $(s_c, open\ B)$ 的概率指派之和，即 $1/3 + 1/3 = 2/3$

清晰地刻画了以下过程：在主持人没有开门之前，任何一扇门后有车的概率都是 $1/3$，所以主体选中的 A 门后有车的概率是 $1/3$，而未被选中的那两扇门后有车的概率是 $2/3$，也就是 $P(A)=1/3$ 和 $P(B)+P(C)=2/3$。当主持人打开一扇没有汽车的门时，也就是确认了要么 $P(B)=0$ 要么 $P(C)=0$。因此，要么 $P(B)=2/3$ 要么 $P(C)=2/3$，即换门会增加主体赢得汽车的概率。

4　结语

本文结合 [3] 和 [1]，给出了 PDEL 的语言和语义，并为三门问题建立了概率认知模型，清晰呈现了换门与不换门各自赢得汽车的概率（主体的认知概率分布），全面展现了三门问题的概率认知模型在概率更新模型下的变化过程，帮助我们更加直观地理解了三门问题。这不仅体现了概率动态认知逻辑强大的表达力，亦为分析彩票悖论、睡美人难题等概率问题提供了借鉴方案。以彩票悖论为例（关于彩票悖论的逻辑结构可参见 [13]），可以利用本文所给的 PDEL 语言和语义，为其建立初始概率认知模型 $\mathfrak{M}_0$，该模型里共有 100 万个世界，这些世界刻画的都是它所对应的那张彩票会中奖。然后将“否认第一张彩票会中奖”作为概率更新模型 $\mathfrak{A}_0$ 对 $\mathfrak{M}_0$ 进行更新，得到概率认知模型 $\mathfrak{M}_1$。$\mathfrak{M}_1$ 删除了刻画“第一张彩票会中奖”的世界。接着将“否定第二张彩票会中奖”作为概率更新模型 $\mathfrak{A}_1$ 来更新 $\mathfrak{M}_1$，得到概率认知模型 $\mathfrak{M}_2$。如此更新下去，概率认知模型 $\mathfrak{M}_{n-1}$（$n=100$ 万）将只有一个世界，它刻画的是“最后这张彩票会中奖”。这就表明，主体在否认其它彩票会中奖之后，不能再否认最后这一张彩票会中奖，否则会导致矛盾。

参考文献

[1] A. Achimescu, A. Baltag and J. Sack, 2019, “The probabilistic logic of communication and change”, *Journal of Logic and Computation*, **29(7)**: 1015–1040.

[2] J. van Benthem, 2003, “Conditional probability meets update logic”, *Journal of Logic, Language and Information*, **12(4)**: 409–421.

[3] J. van Benthem, J. Gerbrandy and B. P. Kooi, 2009, “Dynamic update with probabilities”, *Studia Logica*, **93(1)**: 67–96.

[4] R. Fagin and J. Y. Halpern, 1994, “Reasoning about knowledge and probability”, *Journal of the ACM (JACM)*, **41(2)**: 340–367.

[5] D. Friedman, 1998, “Monty Hall’s three doors: Construction and deconstruction of a choice anomaly”, *The American Economic Review*, **88(4)**: 933–946.

[6] L. Gillman, 1992, “The car and the goats”, *The American Mathematical Monthly*, **99(1)**: 3–7.

[7] J. Y. Halpern and M. R. Tuttle, 1993, “Knowledge, probability, and adversaries”, *Journal of the ACM (JACM)*, **40(4)**: 917–960.

[8] M. Janssen and S. Pernice, 2020, “Sleeping beauty on Monty Hall”, *Philosophies*, https://doi.org/10.3390/philosophies5030015.

[9] B. P. Kooi, 2003, “Probabilistic dynamic epistemic logic”, *Journal of Logic, Language and Information*, **12(4)**: 381–408.

[10] S. Krauss and X.-T. Wang, 2003, “The psychology of the Monty Hall problem: Discovering psychological mechanisms for solving a tenacious brain teaser.” *Journal of Experimental Psychology: General*, **132(1)**: 3–22.

[11] P. E. Otto, 2021, “Monty Hall three door ‘anomaly’ revisited: A note on deferment in an extensive form game”, *Mind & Society*, https://doi.org/10.1007/s11299-021-00277-1.

[12] E. Tubau and D. Alonso, 2003, “Overcoming illusory inferences in a probabilistic counterintuitive problem: The role of explicit representations”, *Memory & Cognition*, **31(4)**: 596–607.

[13] 李章吕、詹莹，“彩票悖论与序言悖论的同构性与统一解”，重庆理工大学学报: 社会科学，2021 年第 4 期，第 52–58 页。

[14] 王宝玺、向玲、张庆林，“表征影响三门问题解决的实验研究”，心理发展与教育，2006 年第 4 期，第 29–34 页。

[15] 郭念国，“基于 R 语言的随机模拟分析三门问题及扩展”，周口师范学院学报，2020 年第 2 期，第 113–117 页。

（责任编辑：映之）

Analysing Monty Hall Problem with Probabilistic Dynamic Epistemic Logic

Zhanglv Li　Yixin Pan

Abstract

Monty Hall problem is a counterintuitive problem of probability, which is a hot issue of many fields like Logic, Mathematics, Psychology, Economics and Computer Science. PDEL (Probabilistic Dynamic Epistemic Logic) is a latest logic theory, which combines Probabilistic Logic with Dynamic Epistemic Logic, and treats the probability of an event as the probability of a world in the epistemic model, showing the probability distribution of the events more intuitively. With PDEL, a probabilistic epistemic model is established for the Monty Hall problem, which can clearly show the probability of winning the car with and without changing the door, and fully demonstrate the changes of the probabilistic epistemic model of the Monty Hall problem under the probability product update rule, therefore, help us to understand the Monty Hall problem with a holistic perspective.

Zhanglv Li　Institute of Logic and Intelligence Southwest University
lizhanglv@126.com

Yixin Pan　Institute of Logic and Intelligence Southwest University
Yixin0_0@126.com