

混合模态逻辑的有穷模型性研究

彭玉

林哲 

摘 要: 本文研究了混合模态逻辑的有穷模型性问题, 介绍了一种基于代数证明论的有穷模型性证明新方法, 并用该方法证明了混合时态逻辑 **K4.t** 和模态逻辑 **S5** 的混合逻辑具有有穷模型性。因此可推导出混合时态逻辑 **K4.t** 和模态逻辑 **S5** 是可判定的。该结果被延伸到其他常见的时态逻辑与模态逻辑的混合, 时态逻辑之间的混合和模态逻辑之间的混合, 并得到它们的有穷模型性证明。

关键词: 混合模态逻辑; 有穷模型性

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 引言

所谓一个逻辑具有有穷模型性是指如果一公式在该逻辑系统中不可证, 那么它在该逻辑系统的一有穷模型中不成立。有穷模型性是逻辑研究中重要的基础性质之一, 此概念不仅本身具有重要意义, 并且有广泛应用。一个有穷可公理化且具有有穷模型性的逻辑是可判定的。长久以来, 一逻辑是否具有有穷模型性是证明其是否可判定的重要方式。关于模态逻辑的有穷模型性有着广泛的研究。模态逻辑的有穷模型性的一般证明方法是滤子方法(见[6])。盖比(D. M. Gabbay, [4])给出了滤子方法在模态逻辑上的一般化方案, 证明了如 **K**、**T**、**B**、**S4**、**S4.1**、**S4.2**、**S5** 等熟知的经典模态逻辑具有有穷模型性。扎哈拉斯基夫(M. Zakharyashev)在[15, 16]中修改这种方法并用典范公式证明了 **K4** 以上的所有经典模态逻辑具有有穷模型性。时态逻辑的有穷模型性问题也备受研究者的关注, 有部分时态逻辑被证明具有有穷模型性, 也有部分被证明并不满足有穷模型性, 具体可参照赛格博格(K. Segerberg)的研究([12])。沃尔特(F. Wolter, [14])考虑了时态逻辑有穷模型性的一般化结论, 他将扎哈拉斯基夫在模态逻辑上的结论延伸到经典时态逻辑中, 证明了 **K4** 以上满足一定典范框架条件的所有经典时态逻辑具有有穷模型性。

收稿日期: 2021-05-18; 修订日期: 2021-08-05

作者信息: 彭玉 厦门大学哲学系
amberlogos@163.com

林哲  厦门大学哲学系
pennyshaq@163.com

基金项目: 本文受国家社科基金项目“非经典模态逻辑的证明论与语义学研究”(17CZX048)资助。

模态逻辑和时态逻辑有着广泛的应用场景,如认知、人工智能、逻辑程序、知识表达等,因此单模态不足以驾驭如此多的应用。许多逻辑学家早已敏锐地察觉到混合模态逻辑研究的重要性。范恩(K. Fine)和舒尔茨(G. Schurz)在[3]中提出了传递性定理(transfer theorem)来研究单模态逻辑的重要性质与混合多模态逻辑相应性质的关系。传递性定理是说如果一些重要的性质如完全性和有穷模型性等在某些单模态逻辑中成立,那么在基于这些单模态逻辑的混合模态逻辑中也成立。克拉赫特(M. Kracht)和沃尔特(F. Wolter)在[5]中通过代数的方法证明了在一些经典模态逻辑中传递性定理成立。遗憾的是没有已证的时态逻辑上的传递性定理的一般性结果。

除了上述的混合模态逻辑与混合时态逻辑外,时态逻辑与模态逻辑的混合也具有强烈的研究动机。一般单维时态逻辑被认为是复杂信息系统的表达和推理形式工具,而添加模态混合可以增强其表达力,使其可表达平行的论域、过程或代理,并且也让表示无限大小的系统成为可能。例如时态和模态逻辑的混合可以用来刻画知识或信仰如何随时间发生变化。从哲学的角度来看,时态和模态相结合的逻辑系统也是一个有趣的问题,因为这些逻辑在原始的哲学问题上有着广泛的应用领域,例如因果关系理论、行为理论等。这方面的研究始于托马斯(R. Thomason, [13])。不同的时态和模态逻辑的混合逻辑被许多学者所关注,例如在[10]中莱夫(J. Reif)和希斯塔拉(A. Sista)提出了一种时态和空间模态混合的逻辑,而雷洛兹(M. Reynolds)在[11]中考虑了时态逻辑 **K4.3.t** 和模态逻辑 **S5** 的混合逻辑,并证明了这种混合逻辑虽然具有可判定性但却不具有穷模型性。本文考虑了雷洛兹的混合逻辑的基础逻辑即时态逻辑 **K4.t** 和模态逻辑 **S5** 的混合逻辑。与时态逻辑 **K4.3.t** 和模态逻辑 **S5** 的混合逻辑不同,本文证明了 **K4.t** 和模态逻辑 **S5** 的混合逻辑具有有穷模型性。鉴于时态逻辑也是模态逻辑的一种,同时本文对混合时态模态逻辑的研究方法同样也适用于时态逻辑与时态逻辑,或者模态逻辑与模态逻辑之间的混合。因此在本文中统一将这三种混合逻辑称为混合模态逻辑。

本文给出了一种适用于混合模态逻辑有穷模型性的一般性证明方法,并用该方法证明了时态逻辑 **K4.t** 和模态逻辑 **S5** 的混合逻辑具有有穷模型性。该逻辑是传递性基础时态逻辑 **K4.t** 和认知逻辑 **S5** 的混合逻辑,是重要的基础混合时态模态逻辑,同时也是雷洛兹考虑的混合逻辑的基础逻辑。该逻辑的有穷模型性是未知的,本文给出了肯定的回答。同时本文所采用的有穷模型性证明方法还可以被直接应用到混合模态逻辑 $M \times M$, $M \times N$ 和 $N \times N$ 中。其中 M 为基础时态逻辑 **K.t** ([14]) 的 **D,T,B,4** 扩张,而 N 为模态逻辑的 **D,T,B,4** 扩张。本文证明有穷模型性的方法是一种代数证明论方法。该方法关键在于构造基于目标逻辑且满足内插引理的矢列。此条内插引理源于克拉格(Crag)的内插引理,由鲁达(D. Rooda)首次引入到兰贝克演算。这条性质被用来证明一些子结构逻辑的表达力等价于上下文无关文法语言。如彭图斯(M. Pentus, [9])证明了兰贝克演算的表达力等价于上

下文无关文法语法。该引理也被范拉列斯基 (M. Farulewski, [2]) 和布斯科沃斯基 (W. Buszkowski, [1]) 应用于证明非结合的兰贝克演算及其多种格上延伸的强有穷模型性和嵌入性。林哲 (Z. Lin, [7, 8]) 修改此条性质并应用于证明不同的非经典模态逻辑的有穷模型性或强有穷模型性。本文证明方法源自 [7, 8] 中的方法, 并在此基础上做了拓展, 简化并应用到经典时态与模态逻辑中。

本文结构安排如下: 第 2 节中引入 **K4.t**×**S5** 混合逻辑, 同时给出了其对应的代数及矢列演算系统。第 3 节中证明 **K4.t**×**S5** 混合逻辑具有有穷模型性, 并讨论了该结论如何扩展到其他一般混合时态和模态逻辑中, 第 4 节总结了本文的工作并展望了进一步的研究前景。

2 混合逻辑的代数语义及矢列演算系统

令 $L_{(\diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond})}$ 表示三模态语言。 $L_{(\diamond, \blacklozenge)}$ 表示不包含 $\hat{\diamond}$ 的时态子语言, $L_{(\hat{\diamond})}$ 表示不包含 $\diamond, \blacklozenge$ 的模态子语言。如果一个在 $L_{(\diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond})}$ 语言下的逻辑使得 $\diamond, \blacklozenge$ 满足时态逻辑 **M** 的公理和规则, $\hat{\diamond}$ 满足模态逻辑 **N** 的公理和规则, 那么称其为混合 (双)**MN** 模态逻辑。

令 $S_{(\diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond})}$ 为一混合模态逻辑, $S_{(\diamond, \blacklozenge)}$ 和 $S_{(\hat{\diamond})}$ 分别为其相应不包含 $\hat{\diamond}, \diamond, \blacklozenge$ 的片段。于是 $S_{(\diamond, \blacklozenge)} = S_{(\diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond})} \cap S_{(\diamond, \blacklozenge)}$ 和 $S_{(\hat{\diamond})} = S_{(\diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond})} \cap S_{(\hat{\diamond})}$ 都是单维模态逻辑。给定两个单维模态逻辑 $S_{(\diamond, \blacklozenge)}$ 和 $S_{(\hat{\diamond})}$, 得到混合 $S_{(\diamond, \blacklozenge)} \times S_{(\hat{\diamond})}$, 它是包含 $S_{(\diamond, \blacklozenge)}$ 和 $S_{(\hat{\diamond})}$ 的最小的混合模态逻辑。若 $S = S_{(\diamond, \blacklozenge)} \times S_{(\hat{\diamond})}$, 则称 S 独立可公理化。令 S 为一独立可公理化的混合逻辑, $S_{(\diamond, \blacklozenge)}$ 和 $S_{(\hat{\diamond})}$ 为其单维模态片段。虽然像完全性和有穷模型性这样的性质分别在 $S_{(\diamond, \blacklozenge)}$ 并且 $S_{(\hat{\diamond})}$ 中成立, 但是也无法直接得到这些性质在 S 中成立。同理在 $L_{(\diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond})}$ 四模态语言和 $L_{(\diamond, \hat{\diamond})}$ 双模态语言下可自然定义双时态 $S_{(\diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond})}$ 和双模态 $S_{(\diamond, \hat{\diamond})}$ 逻辑。虽然在本文中我们只考虑两个模态逻辑的混合, 但我们的方法可以应用到多模态逻辑的混合。

在本节我们将考虑在 $L_{(\diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond})}$ 语言下的 **K4.t**×**S5** 混合时态逻辑。下面引入 **K4.t**×**S5** 的一种矢列演算系统, 首先引入一些基本概念。

定义 1. 令 Var 为命题变元集, 公式集 F 可递归定义如下:

$$F \ni \alpha ::= p \mid \top \mid \perp \mid \alpha \vee \alpha \mid \alpha \wedge \alpha \mid \neg \alpha \mid \diamond \alpha \mid \blacklozenge \alpha \mid \hat{\diamond} \alpha \mid \Box \alpha \mid \blacksquare \alpha \mid \hat{\Box} \alpha.$$

其中 $p \in \text{Var}$, 定义 $\alpha \rightarrow \beta = \neg \alpha \vee \beta$ 。

定义 2. 令 $\circ, \bullet, \dagger$ 分别为 $\diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond}$ 的结构联结词, 公式结构集合 FS 可递归定义如下:

$$FS \ni \Gamma := \Gamma \mid \circ \Gamma \mid \bullet \Gamma \mid \dagger \Gamma$$

例如 $\circ(\bullet(\circ \alpha))$ 是一个公式结构。通常我们使用大写希腊字母 $\Gamma, \Delta, \dots$ 来表达公式结构。

语境是一个形如 $\Gamma[-]$ 的结构, 其中 $[-]$ 是一个特别的位置, 可以代入公式结构形成新的公式结构。如 $\Gamma[\Delta]$ 是在 $\Gamma[-]$ 中代入 Δ 得到的公式结构。定义函数 $f: FS \mapsto F$ 使得 $f(\Gamma)$ 表示从公式结构 Γ 通过将所有出现的结构联结词 $\circ, \bullet, \dagger$ 分别替换成 $\diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond}$ 后得到的公式, 如 $f(\circ^3(\alpha)) = \diamond^3\alpha$ 。一个矢列是一个形如 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 的表达式, 其中 Γ 是一个公式结构称为矢列的前件, β 是一个公式称为矢列的后件。用 $\alpha \Leftrightarrow \beta$ 表示 $\alpha \Rightarrow \beta$ 并且 $\beta \Rightarrow \alpha$ 。

定义 3. 矢列演算系统 G 包含如下的公理和规则:

(1) 公理:

$$\alpha \Rightarrow \alpha(\text{Id}) \quad \Gamma[\perp] \Rightarrow \alpha(\perp) \quad \Gamma \Rightarrow \top(\top)$$

$$\alpha \wedge \neg\alpha \Rightarrow \perp(\text{LC}) \quad \top \Rightarrow \alpha \vee \neg\alpha(\text{LEM})$$

(2) 逻辑规则:

$$\frac{\Gamma[\alpha_1] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\alpha_1 \wedge \alpha_2] \Rightarrow \beta}(\wedge\text{L})(i=1,2) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha_1 \quad \Gamma \Rightarrow \alpha_2}{\Gamma \Rightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2}(\wedge\text{R})$$

$$\frac{\Gamma[\alpha_1] \Rightarrow \beta \quad \Gamma[\alpha_2] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\alpha_1 \vee \alpha_2] \Rightarrow \beta}(\vee\text{L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha_1}{\Gamma \Rightarrow \alpha_1 \vee \alpha_2}(\vee\text{R})(i=1,2)$$

$$\frac{\Gamma[\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \vee \alpha_3)] \Rightarrow \beta}{\Gamma[(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_3)] \Rightarrow \beta}(\text{D}_1) \quad \frac{\Gamma[(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_3)] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \vee \alpha_3)] \Rightarrow \beta}(\text{D}_2)$$

$$\frac{\Gamma[\alpha] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\neg\neg\alpha] \Rightarrow \beta}(\neg\neg_1) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg\alpha}(\neg\neg_2) \quad \frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha}(\neg)$$

(3) 时态规则:

$$\frac{\Gamma[\circ\alpha] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\hat{\diamond}\alpha] \Rightarrow \beta}(\hat{\diamond}\text{L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\circ\Gamma \Rightarrow \hat{\diamond}\alpha}(\hat{\diamond}\text{R})$$

$$\frac{\Gamma[\bullet\alpha] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\blacklozenge\alpha] \Rightarrow \beta}(\blacklozenge\text{L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\bullet\Gamma \Rightarrow \blacklozenge\alpha}(\blacklozenge\text{R})$$

$$\frac{\Gamma[\alpha] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\bullet\Box\alpha] \Rightarrow \beta}(\Box\text{L}) \quad \frac{\bullet\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Box\alpha}(\Box\text{R})$$

$$\frac{\Gamma[\alpha] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\circ\blacksquare\alpha] \Rightarrow \beta}(\blacksquare\text{L}) \quad \frac{\circ\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \blacksquare\alpha}(\blacksquare\text{R})$$

$$\frac{\circ^n\alpha \Rightarrow \neg\beta}{\bullet^n\beta \Rightarrow \neg\alpha}(\circ\bullet)(n \geq 1) \quad \frac{\bullet^n\alpha \Rightarrow \neg\beta}{\circ^n\beta \Rightarrow \neg\alpha}(\bullet\circ)(n \geq 1)$$

$$\frac{\Gamma[\circ\Delta] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\circ\circ\Delta] \Rightarrow \beta}(4\hat{\diamond}) \quad \frac{\Gamma[\bullet\Delta] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\bullet\bullet\Delta] \Rightarrow \beta}(4\blacklozenge)$$

(4) 模态规则:

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma[\dagger\alpha] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\hat{\diamond}\alpha] \Rightarrow \beta}(\hat{\diamond}L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\dagger\Gamma \Rightarrow \hat{\diamond}\alpha}(\hat{\diamond}R) \\ \frac{\Gamma[\alpha] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\dagger\hat{\square}\alpha] \Rightarrow \beta}(\hat{\square}L) \quad \frac{\dagger\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \hat{\square}\alpha}(\hat{\square}R) \\ \frac{\Gamma[\dagger\Delta] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\Delta] \Rightarrow \beta}(T_{\hat{\diamond}}) \quad \frac{\Gamma[\dagger\Delta] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\dagger\dagger\Delta] \Rightarrow \beta}(4_{\hat{\diamond}}) \quad \frac{\dagger^n(\alpha) \Rightarrow \neg\beta}{\dagger^n(\beta) \Rightarrow \neg\alpha}(B)(n \geq 1) \end{array}$$

(5) 切割规则:

$$\frac{\Delta \Rightarrow \alpha \quad \Gamma[\alpha] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\Delta] \Rightarrow \beta}(\text{Cut})$$

如果在矢列演算 G 中存在一个矢列 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 的推演, 那么就说 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 在 G 中可证, 记为 $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \beta$ 。

引理 1. 以下性质在 G 中成立:

- (1) $\vdash_G \diamond(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \diamond\alpha \vee \diamond\beta, \vdash_G \blacklozenge(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \blacklozenge\alpha \vee \blacklozenge\beta$ 且 $\vdash_G \hat{\diamond}(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \hat{\diamond}\alpha \vee \hat{\diamond}\beta$;
- (2) $\vdash_G \blacklozenge\perp \Leftrightarrow \perp, \diamond\perp \Leftrightarrow \perp$ 且 $\vdash_G \hat{\diamond}\perp \Leftrightarrow \perp$;
- (3) $\vdash_G \alpha \Rightarrow \hat{\diamond}\alpha$;
- (4) $\vdash_G \diamond\diamond\alpha \Rightarrow \diamond\alpha, \vdash_G \blacklozenge\blacklozenge\alpha \Rightarrow \blacklozenge\alpha$ 且 $\vdash_G \hat{\diamond}\hat{\diamond}\alpha \Rightarrow \hat{\diamond}\alpha$;
- (5) $\vdash_G \neg\square\alpha \Leftrightarrow \diamond\neg\alpha, \vdash_G \neg\blacksquare\alpha \Leftrightarrow \blacklozenge\neg\alpha$ 且 $\vdash_G \neg\hat{\square}\alpha \Leftrightarrow \hat{\diamond}\neg\alpha$;
- (6) $\vdash_G \square\alpha \Leftrightarrow \neg\diamond\neg\alpha, \vdash_G \blacksquare\alpha \Leftrightarrow \neg\blacklozenge\neg\alpha$ 且 $\vdash_G \hat{\square}\alpha \Leftrightarrow \neg\hat{\diamond}\neg\alpha$;

证明. (1)-(4) 证明简单, (6) 由 (5) 易得, 因此这里仅证明 (5)。首先证明 $\neg\square\alpha \Rightarrow \diamond\neg\alpha$, 因为 $\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha$, 由 $(\diamond R)$ 得 $\diamond\neg\alpha \Rightarrow \diamond\neg\alpha$ 。由 $(\circ\bullet)$ 和 $(\neg\neg 2)$ 得 $\bullet\neg\diamond\neg\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha$ 。因为 $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$, 由 (Cut) 得 $\bullet\neg\diamond\neg\alpha \Rightarrow \alpha$ 。再由 $(\square R)$ 得 $\neg\diamond\neg\alpha \Rightarrow \square\alpha$, 因此由 $(\neg)$ 得 $\neg\square\alpha \Rightarrow \neg\neg\diamond\neg\alpha$ 。所以有 $\neg\square\alpha \Rightarrow \diamond\neg\alpha$ 。反之因为 $\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha$, 由 $(\square L)$ 得 $\bullet\square\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha$, 再由 $(\bullet\circ)$ 得 $\diamond\neg\alpha \Rightarrow \neg\square\alpha$ 。因此由 $(\diamond L)$ 得 $\diamond\neg\alpha \Rightarrow \neg\square\alpha$ 。同样易证 $\neg\blacksquare\alpha \Leftrightarrow \blacklozenge\neg\alpha, \neg\hat{\square}\alpha \Leftrightarrow \hat{\diamond}\neg\alpha$ 。 $\square$

由于在下一节证明有穷模型性时的技术需求, 在下面提到的矢列演算系统 G 中, $(4_{\diamond})$ 、 $(4_{\blacklozenge})$ 及 $(4_{\hat{\diamond}})$ 将替代为下面三个对应等价公理:

$$(4_{\square}) \quad \square\alpha \Rightarrow \square\square\alpha \quad (4_{\blacksquare}) \quad \blacksquare\alpha \Rightarrow \blacksquare\blacksquare\alpha \quad (4_{\hat{\square}}) \quad \hat{\square}\alpha \Rightarrow \hat{\square}\hat{\square}\alpha$$

下面我们考虑 $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 逻辑的代数语义 ($\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 代数)。

定义 4. 代数结构 $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \neg, \diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond}, 1)$ 被称为 $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 代数当且仅当 A 为一非空集, $\wedge, \vee$ 是定义在 A 上的二元算子, $\neg, \diamond, \blacklozenge, \hat{\diamond}$ 是定义在 A 上的一元算子, 使得对于任意的 $a, b \in A$ 满足如下条件:

- (1) $a \leq b \wedge c$ 当且仅当 $a \leq b$ 且 $a \leq c$;

- (2) $a \vee b \leq c$ 当且仅当 $a \leq c$ 且 $b \leq c$;
- (3) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$;
- (4) 若 $a \leq b$ 则 $\neg b \leq \neg a$;
- (5) $\neg\neg a = a$;
- (6) $a \vee \neg a = 1$;
- (7) $\diamond(a \vee b) = \diamond a \vee \diamond b$, $\blacklozenge(a \vee b) = \blacklozenge a \vee \blacklozenge b$; 且 $\widehat{\diamond}(a \vee b) = \widehat{\diamond}a \vee \widehat{\diamond}b$;
- (8) $\diamond 0 = 0$, $\blacklozenge 0 = 0$ 且 $\widehat{\diamond} 0 = 0$;
- (9) $a \leq \blacksquare \diamond a, a \leq \square \blacklozenge a$ 且 $a \leq \widehat{\square} \widehat{\diamond} a$;
- (10) $a \leq \widehat{\diamond} a$;
- (11) $\diamond \diamond a \leq \diamond a$, $\blacklozenge \blacklozenge a \leq \blacklozenge a$ 且 $\widehat{\diamond} \widehat{\diamond} a \leq \widehat{\diamond} a$ 。

其中代数结构 $(A, \wedge, \vee, \neg, 1)$ 是一个布尔代数。偏序关系为格序关系即 $\leq$ 被定义为: $a \leq b$ 当且仅当 $a \wedge b = a$ 或 $a \vee b = b$ 。条件 (9) 中的 $\square, \blacksquare, \widehat{\square}$ 被分别定义为: $\square a = \neg \diamond \neg a$, $\blacksquare a = \neg \blacklozenge \neg a$, $\widehat{\square} a = \neg \widehat{\diamond} \neg a$ 。0 和 $\rightarrow$ 可以被分别定义为: $0 = \neg 1$ 且 $a \rightarrow b = \neg a \vee b$ 。

引理 2. 令 $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \neg, \diamond, \blacklozenge, \widehat{\diamond}, 1)$ 为一 **K4.t**×**S5** 代数, 则以下条件成立:

- (1) $a \wedge \neg a = 0$, $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$, $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$;
- (2) $\square 1 = 1$, $\blacksquare 1 = 1$, $\widehat{\square} 1 = 1$;
- (3) $\neg \diamond a = \square \neg a$, $\neg \square a = \diamond \neg a$, $\neg \blacklozenge a = \blacksquare \neg a$, $\neg \blacksquare a = \blacklozenge \neg a$, $\neg \widehat{\diamond} a = \widehat{\square} \neg a$, $\neg \widehat{\square} a = \widehat{\diamond} \neg a$;
- (4) 若 $a \leq b$, 则 $\diamond a \leq \diamond b$, $\blacklozenge a \leq \blacklozenge b$ 且 $\widehat{\diamond} a \leq \widehat{\diamond} b$;
- (5) 若 $a \leq b$, 则 $\square a \leq \square b$, $\blacksquare a \leq \blacksquare b$ 且 $\widehat{\square} a \leq \widehat{\square} b$;
- (6) $\square(a \wedge b) = \square a \wedge \square b$, $\blacksquare(a \wedge b) = \blacksquare a \wedge \blacksquare b$ 且 $\widehat{\square}(a \wedge b) = \widehat{\square} a \wedge \widehat{\square} b$;
- (7) $\square(a \rightarrow b) \leq \square a \rightarrow \square b$, $\blacksquare(a \rightarrow b) \leq \blacksquare a \rightarrow \blacksquare b$ 且 $\widehat{\square}(a \rightarrow b) \leq \widehat{\square} a \rightarrow \widehat{\square} b$;
- (8) $\diamond \blacksquare a \leq a$, $\blacklozenge \square a \leq a$ 且 $\widehat{\diamond} \widehat{\square} a \leq a$;
- (9) $\widehat{\square} a \leq a$;
- (10) $\square a \leq \square \square a$, $\blacksquare a \leq \blacksquare \blacksquare a$ 且 $\widehat{\square} a \leq \widehat{\square} \widehat{\square} a$;
- (11) $\diamond^n a \leq \neg b$ 当且仅当 $\blacklozenge^n b \leq \neg a$ ($n \geq 1$);
- (12) $\widehat{\diamond}^n a \leq \neg b$ 当且仅当 $\widehat{\diamond}^n b \leq \neg a$ ($n \geq 1$)。

证明. 易证 (1)-(10), 下面证明 (11), 另 (12) 证明与 (11) 类似。假设 $\diamond^n a \leq \neg b$ 且 $n \geq 1$, 由定义 4 (4) 可得 $\neg \neg b \leq \neg \diamond^n a$ 。根据引理 2 (3) 可得 $\neg \neg b \leq \square^n \neg a$ 。其次因为 $\neg \neg b = b$, 所以 $b \leq \square^n \neg a$ 。由 (4) 可得 $\blacklozenge b \leq \blacklozenge \square^n \neg a$ 。由 (8) 有 $\blacklozenge \square \square^{(n-1)} \neg a \leq \square^{(n-1)} \neg a$, 因此 $\blacklozenge \square^{(n-1)} b \leq \square^{(n-1)} \neg a$ 。重复上述证明 (n-1) 次可得 $\blacklozenge^n b \leq \neg a$ 。用同样的方式可以证明另外一个方向, 因此引理得证。□

注: 引理 2 中的 (11), (12) 等价于定义 4 中的条件 (9)。由引理 2 的证明可以知定义 4 (8) 可以推出引理 2 中的 (11), (12)。反之假设引理 2 (11) 成立, 因为 $\diamond a \leq \neg \neg \diamond a$,

根据引理2, (11) 成立, 那么 $\blacklozenge \neg a \leq \neg a$ 。由定义4 (4), 可得 $\neg \neg a \leq \neg \blacklozenge \neg a$, 即 $\neg \neg a \leq \blacksquare a$, 因此 $a \leq \blacksquare a$ 。同样易证 $a \leq \square a$ 。假设引理2 (12) 成立, 同样可证明 $a \leq \widehat{\square} a$ 。

对于任意论域为 A 的代数结构 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ 中的一个赋值就是一个映射 $\sigma : \text{Var} \mapsto A$, σ 可通过递归的方式自然扩充到 $\widehat{\sigma} : F \mapsto A$ 。一个代数模型是一组 $(\mathcal{A}, \sigma)$ 。如果 $\widehat{\sigma}(f(\Gamma)) \leq \widehat{\sigma}(\beta)$, 那么一个矢列 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 在一个代数模型 $(\mathcal{A}, \sigma)$ 下有效, 记为 $\models_{(\mathcal{A}, \sigma)} \Gamma \Rightarrow \beta$ 。在一个代数 $\mathcal{A}$ 上有效, 记作 $\models_{\mathcal{A}} \Gamma \Rightarrow \beta$, 指得是对于任意赋值 σ , $\models_{(\mathcal{A}, \sigma)} \Gamma \Rightarrow \beta$, 对于任意的 $\mathbb{K}$ 代数类, 对于任意 $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$, $\models_{\mathcal{A}} \Gamma \Rightarrow \beta$, 则称 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 在 $\mathbb{K}$ 上有效, 记为 $\models_{\mathbb{K}} \Gamma \Rightarrow \beta$ 。

定义 5. 如果对于任意矢列 $\Gamma \Rightarrow \beta$, 若 $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \beta$, 则 $\models_{\mathbb{K}} \Gamma \Rightarrow \beta$ 。那么称矢列演算系统 G 对于 $\mathbb{K}$ 代数类是有效的。若 $\models_{\mathbb{K}} \Gamma \Rightarrow \beta$, 则 $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \beta$, 那么称矢列演算系统 G 对于 $\mathbb{K}$ 代数类是完全的。

定理 1. 矢列演算系统 G 对于 $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 代数类是有效完全的。

对于有效性的证明, 只需要逐条检验定义4中的 (1)-(10) 在 G 中都成立即可。而完全性的证明可以由经典的塔斯基林登鲍姆构造证明, 也可由下节有穷模型性的证明得到。

3 有穷模型性

本节证明矢列演算系统 G 具有代数有穷模型性。令 S 为一矢列演算, $\mathbb{K}(S)$ 为其对应的完全有效的代数类。如 $S = G$, 则 $\mathbb{K}(G)$ 是 $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 代数类。一个矢列演算系统 S 有代数有穷模型性指的是: 如果对于 S 中的任意矢列 $\Gamma \Rightarrow \beta$, $\not\models_S \Gamma \Rightarrow \beta$, 那么必然存在一个有穷代数 $\mathcal{A} \in \mathbb{K}(S)$, 使得 $\not\models_{\mathcal{A}} \Gamma \Rightarrow \beta$ 。对任意公式 α , 令 $\text{sub}(\alpha)$ 表示其所有子公式组成的集合。令 T 为一个公式集合, 定义 $s(T)$ 。

定义 6. 令 $s(T)$ 为满足下面所有条件的最小公式集:

- (1) $T \subseteq s(T)$ 且 $\perp, \top \in s(T)$;
- (2) 如果 $\alpha \in s(T)$, 那么 $\text{sub}(\alpha) \subseteq s(T)$;
- (3) 如果 $\diamond\alpha, \blacklozenge\beta, \widehat{\diamond}\gamma \in s(T)$; 那么 $\blacksquare\alpha, \blacksquare\blacksquare\alpha, \square\blacklozenge\beta, \square\square\blacklozenge\beta, \widehat{\square}\widehat{\diamond}\gamma, \widehat{\square}\widehat{\square}\widehat{\diamond}\gamma \in s(T)$;
- (4) 如果 $\square\alpha, \blacksquare\beta, \widehat{\square}\gamma \in T$ 且 $\alpha \neq \square\alpha', \beta \neq \blacksquare\beta', \gamma \neq \widehat{\square}\gamma'$; 那么 $\square\square\alpha, \blacksquare\blacksquare\beta, \widehat{\square}\gamma \in s(T)$ 。

令 $c(s(T))$ 为 $s(T)$ 的 $\wedge, \vee, \neg$ 闭包集。令 $l = \{\alpha \mid \alpha \in s(T)\}$ 。若 $\alpha \in l$, 则称 α 为字母。令 $l' = \{\alpha, \neg\alpha \mid \alpha \in l\}$, 若 $\alpha \in l'$, 则称 α 为文字。令 $C = \{\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \gamma_i \mid \gamma_i \in l' \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$, 若 $\alpha \in C$, 则称 α 为合取子句。令 $D = \{\bigvee_{1 \leq j \leq n} \zeta_j \mid \zeta_j \in$

C for $1 \leq j \leq n\}$, 若 $\alpha \in D$, 则称 α 为 T -析取范式。令 $\text{dj}_T(\alpha)$ 表示 α 对应的 T -析取范式。对于任意 $\alpha \in c(s(T))$, 存在唯一的 $\text{dj}_T(\alpha)$ 与之对应。令 $\text{dj}_T(c(s(T))) = \{\text{dj}_T(\alpha) \mid \alpha \in c(s(T))\}$ 。若 T 是有穷的, 根据定义6, $s(T)$ 是有穷的, 则如上构造的 T -析取范式必然是有穷的, 因此 $\text{dj}_T(c(s(T)))$ 是有穷的。

若 Γ 中出现的公式都属于 $c(s(T))$, 则称 Γ 为 $c(s(T))$ 公式结构, 记为 $\Gamma \in FS(c(s(T)))$ 。同理对于 $c(s(T))$ 语境 $\Gamma[-]$ 记为 $\Gamma[-] \in CT(c(s(T)))$ 。对矢列 $\Gamma \Rightarrow \beta$, 若 $\Gamma \in FS(c(s(T)))$ 且 $\beta \in c(s(T))$, 则称 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 为 $c(s(T))$ 矢列。若存在一个 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 在矢列演算系统 G 中的推演并且在推演中出现的矢列均为 $c(s(T))$ 矢列, 那么称 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 在 G 下 $c(s(T))$ 可证, 记为 $\vdash_G \Gamma \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。

引理 3. 如果 $\vdash_G \Gamma[\star \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 那么 $\vdash_G \Gamma[\star \star \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ ($\star \in \{\circ, \bullet, \dagger\}$)。

证明. 令 $\star = \circ$ 。施归纳假设于 $\vdash_G \Gamma[\circ \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 假设 $\vdash_G \Gamma[\circ \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 是由规则 (R) 得到的, 下面对 (R) 分情况讨论。这里仅详细证明其中 5 种典型情况, 其他情况的证明与这 5 种情况中的某一种类似。

(1) 令 (R) 是 (Cut)。假设前提是 $\vdash_G \Xi[\circ \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$ 和 $\vdash_G \Gamma'[\gamma] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。那么 $\Gamma[-] = \Gamma'[\Xi[-]]$ 。根据归纳假设有 $\vdash_G \Xi[\circ \circ \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$, 再根据 (Cut) 可得 $\vdash_G \Gamma'[\Xi[\circ \circ \Delta]] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 即 $\vdash_G \Gamma[\circ \circ \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。其他情况证明类似。

(2) 令 (R) 是 ($\wedge$ R)。假设前提是 $\vdash_G \Gamma[\circ \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta_1$ 和 $\vdash_G \Gamma[\circ \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta_2$ 。根据归纳假设可得 $\vdash_G \Gamma[\circ \circ \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta_1$ 和 $\vdash_G \Gamma[\circ \circ \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta_2$ 。再由 ($\wedge$ R) 可得, $\vdash_G \Gamma[\circ \circ \Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta_1 \wedge \beta_2$ 。

(3) 令 (R) 是 ($\diamond$ R)。假设前提是 $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \beta'$, 结论是 $\vdash_G \circ \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \diamond \beta'$ 。因为 $\diamond \beta' \in c(s(T))$, 所以 $\diamond \beta' \in T$ 。根据定义6, $\blacksquare \diamond \beta', \blacksquare \blacksquare \diamond \beta' \in c(s(T))$ 。由 ($\blacksquare$ R) 得 $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \blacksquare \diamond \beta'$, 因为 $\vdash_G \blacksquare \diamond \beta' \Rightarrow_{c(s(T))} \blacksquare \blacksquare \diamond \beta'$, 所以由 (Cut) 可得 $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \blacksquare \blacksquare \diamond \beta'$ 。易证 $\vdash_G \circ \circ \blacksquare \blacksquare \diamond \beta' \Rightarrow_{c(s(T))} \diamond \beta'$, 由 (Cut) 得 $\vdash_G \circ \circ \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \diamond \beta'$ 。其他情况则 $\circ \Delta$ 必然出现在前提中, 可直接由归纳假设得证, 证明类似于情况 (2)。

(4) 令 (R) 是 ($\blacksquare$ L)。假设前提是 $\vdash_G \Gamma[\circ \blacksquare \alpha] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 且 $\Delta = \blacksquare \alpha$ 。因为 $\blacksquare \alpha \in c(s(T))$, 所以 $\blacksquare \alpha \in T$ 。假设 $\alpha \neq \blacksquare \alpha'$, 根据定义6, 有 $\blacksquare \alpha, \blacksquare \blacksquare \alpha \in c(s(T))$ 。那么由 ($\blacksquare$ L) 得 $\vdash_G \Gamma[\circ \circ \blacksquare \blacksquare \alpha] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。因为 $\vdash_G \blacksquare \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \blacksquare \blacksquare \alpha$, 由 (Cut) 得 $\vdash_G \Gamma[\circ \circ \blacksquare \alpha] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。若 $\alpha = \blacksquare \alpha'$, 则 $\vdash_G \Gamma[\circ \blacksquare \blacksquare \alpha'] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。又因为 $\blacksquare \alpha', \blacksquare \blacksquare \alpha' \in c(s(T))$, 根据公理 (4 $\blacksquare$) 有 $\vdash_G \blacksquare \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \blacksquare \blacksquare \alpha$ 。由 (Cut) 得 $\vdash_G \Gamma[\circ \blacksquare \alpha'] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 再由 ($\blacksquare$ L) 得 $\vdash_G \Gamma[\circ \circ \blacksquare \blacksquare \alpha'] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。

(5) 令 (R) 是 ($\bullet \circ$)。假设前提是 $\vdash_G \bullet^n \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \neg \beta$, 结论是 $\vdash_G \circ^n \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \neg \alpha$ 。根据归纳假设得 $\vdash_G \bullet^{(n+1)} \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \neg \beta$ 。再由 ($\bullet \circ$) 可得 $\vdash_G \circ^{(n+1)} \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \neg \alpha$ 。□

引理 4 (内插引理). 若 $\vdash_G \Gamma[\Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 则存在一个 $\gamma \in c(s(T))$, 使得 $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$ 并且 $\vdash_G \Gamma[\gamma] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$.

证明. 施归纳假设于 $\vdash_G \Gamma[\Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 的证明长度. 假设 $\vdash_G \Gamma[\Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 是由规则 (R) 得到. 易证明 (R) 是公理或 $(\neg)$ 的时候引理成立. 下面讨论 (R) 的其他情况.

令 (R) 是 (Cut). 假设 (R) 的前提是 $\vdash_G \Delta' \Rightarrow_{c(s(T))} \delta$ 和 $\vdash_G \Gamma'[\delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 若 $\Delta' = \Delta''[\Delta]$, 那么根据归纳假设, 存在 $\gamma \in c(s(T))$ 使得 (1) $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$ 且 (2) $\vdash_G \Delta''[\gamma] \Rightarrow_{c(s(T))} \delta$. 因此由 (2) 与假设经 (Cut) 得 $\vdash_G \Gamma'[\Delta''[\gamma]] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 因此 γ 是所求插值. 否则 $\Delta = \Delta''[\Delta']$, 因此 $\Gamma'[\delta] = \Gamma[\Delta''[\delta]]$. 那么根据归纳假设, 存在 $\gamma \in c(s(T))$, 使得 (3) $\vdash_G \Delta''[\delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$ 且 (4) $\vdash_G \Gamma[\gamma] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 由 (3) 和假设经 (Cut) 得 $\vdash_G \Delta''[\Delta'] \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$. 因此 γ 为所求插值.

令 (R) 是 $(\wedge L)$ 且 $\Delta = \Delta'[\alpha_1 \wedge \alpha_2]$. 假设 (R) 的前提是 $\vdash_G \Gamma[\Delta'[\alpha_1]] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 结论是 $\vdash_G \Gamma[\Delta'[\alpha_1 \wedge \alpha_2]] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 根据归纳假设, 存在 $\gamma \in c(s(T))$, 使得 (1) $\vdash_G \Delta'[\alpha_1] \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$ 且 (2) $\vdash_G \Gamma[\gamma] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 由 (1) 经 $(\wedge L)$ 得 $\vdash_G \Delta'[\alpha_1 \wedge \alpha_2] \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$. 因此 γ 是所求插值. 同理可证明 $(\vee R)$, $(T_{\hat{\Delta}})$, (D_1) , (D_2) , $(\neg \neg_1)$ 和 $(\neg \neg_2)$.

令 (R) 是 $(\wedge R)$ 且 $\beta = \beta_1 \wedge \beta_2$. 假设 (R) 的前提是 $\vdash_G \Gamma[\Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta_1$ 和 $\vdash_G \Gamma[\Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta_2$. 根据归纳假设, 存在着 $\gamma_1, \gamma_2 \in c(s(T))$, 使得 (1) $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_1$, (2) $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_2$, (3) $\vdash_G \Gamma[\gamma_1] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta_1$ 和 (4) $\vdash_G \Gamma[\gamma_2] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta_2$. 由 (1) 和 (2) 经 $(\wedge R)$ 得 $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_1 \wedge \gamma_2$, 由 (3), (4) 经过 $(\wedge L)$ 和 $(\wedge R)$ 可得 $\vdash_G \Gamma[\gamma_1 \wedge \gamma_2] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta_1 \wedge \beta_2$. 又因为 $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \in c(s(T))$, 所以 $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ 为所求插值. 当 (R) 是 $(\vee L)$ 时, 令 γ_1, γ_2 是 Δ 在 (R) 的两个前提中分别由归纳假设所得的插值. 则同理可证所求插值为 $\gamma_1 \vee \gamma_2$.

令 (R) 是 $(\Diamond R)$ 且 $\beta = \Diamond \beta'$. 假设 (R) 前提是 $\vdash_G \Gamma' \Rightarrow_{c(s(T))} \beta'$, 结论是 $\vdash_G \Diamond \Gamma' \Rightarrow_{c(s(T))} \Diamond \beta'$. 若 $\Delta = \Diamond \Gamma'$, 那么 $\Gamma[-]$ 是空的. 则 $\Diamond \beta' \in c(s(T))$ 为所求插值. 否则 $\Gamma' = \Gamma''[\Delta]$ 且 $\Gamma[-] = \Diamond \Gamma''[-]$. 根据归纳假设, 存在 $\gamma \in c(s(T))$, 使得 (1) $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$ 且 (2) $\vdash_G \Gamma''[\gamma] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta'$. 由 (2) 经 $(\Diamond R)$ 得 $\vdash_G \Diamond \Gamma''[\gamma] \Rightarrow_{c(s(T))} \Diamond \beta'$, 因此 γ 为所求插值. 同理可证 $(\Diamond L)$ 和 $(\hat{\Diamond} R)$.

令 (R) 是 $(\Box L)$. 假设 (R) 前提是 $\vdash_G \Gamma'[\alpha] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 结论是 $\vdash_G \Gamma'[\Box \alpha] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 则 $\Gamma[\Delta] = \Gamma'[\Box \alpha]$. 若 $\Delta = \Box \alpha$, 那么 $\alpha \in c(s(T))$ 为所求插值. 若 $\Delta = \Delta'[\Box \alpha]$, 则 $\Gamma'[\alpha] = \Gamma[\Delta'[\alpha]]$. 根据归纳假设, 存在 $\gamma \in c(s(T))$, 使得 (1) $\vdash_G \Delta'[\alpha] \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$ 且 (2) $\vdash_G \Gamma[\gamma] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 由 (1) 经过 $(\Box L)$ 得 $\vdash_G \Delta'[\Box \alpha] \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$. 因此 γ 为所求插值. 同理可证 $(\Box R)$ 和 $(\hat{\Box} L)$.

令 (R) 是 $(\bullet \circ)$. $\Gamma[\Delta] = \bullet^n \alpha$ 且 $\beta = \neg \beta'$. 假设前提是 $\vdash_G \circ^n(\beta') \Rightarrow_{c(s(T))} \neg \alpha$, 结论是 $\vdash_G \bullet^n(\alpha) \Rightarrow_{c(s(T))} \neg \beta'$. 令 $\Delta = \bullet^m \alpha$ ($1 \leq m \leq n$), 根据归纳假设, 存在 $\gamma \in c(s(T))$, 使得 (1) $\vdash_G \circ^{n-m}(\beta') \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$ 且 (2) $\vdash_G \circ^m(\gamma) \Rightarrow_{c(s(T))} \neg \alpha$. 因为

(3) $\vdash_G \gamma \Rightarrow_{c(s(T))} \neg\neg\gamma$, 所以由 (1), (3) 经 (Cut) 得 $\vdash_G \circ^{n-m}(\beta') \Rightarrow_{c(s(T))} \neg\neg\gamma$, 再由 $(\circ\bullet)$ 得 $\vdash_G \bullet^{n-m}(\neg\gamma) \Rightarrow_{c(s(T))} \neg\beta'$. 由 (2) 经过 $(\circ\bullet)$ 得 $\vdash_G \bullet^m(\alpha) \Rightarrow_{c(s(T))} \neg\gamma$. 因为 $\neg\gamma \in c(s(T))$, 所以 γ 为所求插值. 同理可证 $(\bullet\circ)$ 和 (B). $\square$

推论 1. 若 $\vdash_G \Gamma[\Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 则存在一个 $\gamma \in \text{dj}_T(c(s(T)))$, 使得 $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$ 并且 $\vdash_G \Gamma[\gamma] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$.

定义 7. 令 $FS(c(s(T)))$ 为所有 $c(s(T))$ 公式结构. 在 $FS(c(s(T)))$ 上定义如下的偏序关系 $\leq_T$: 对任意的 $\Delta_1, \Delta_2 \in FS(c(s(T)))$, 如果对任意的 $\Gamma[-] \in CT(c(s(T)))$ 和公式 $\beta \in c(s(T))$, 使得若 $\vdash_G \Gamma[\Delta_2] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 则有 $\vdash_G \Gamma[\Delta_1] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 那么称 $\Delta_1 \leq_T \Delta_2$. 对 $\Delta_1, \Delta_2 \in FS(c(s(T)))$ 定义关系 $\approx_T$ 为 $\Delta_1 \approx_T \Delta_2$ 当且仅当 $\Delta_1 \leq_T \Delta_2$ 且 $\Delta_2 \leq_T \Delta_1$.

定义 8. 令 $\Gamma \in FS(c(s(T)))$, 定义等价类 $|\Gamma| = \{\Delta \mid \Delta \approx_T \Gamma, \Delta \in FS(c(s(T)))\}$, 定义集合 $|c(s(T))| = \{|\alpha| \mid \alpha \in c(s(T))\}$.

由前述可知, $\text{dj}_T(c(s(T)))$ 是有穷的且 $|c(s(T))| = |\text{dj}_T(c(s(T)))|$, 因此可以得到 $|c(s(T))|$ 是有穷的.

引理 5. 对任意 $\Delta \in FS(c(s(T)))$, 存在一个 $\theta \in c(s(T))$, 使得 $\Delta \approx_T \theta$.

证明. 令 $\Delta \in FS(c(s(T)))$, 在矢列演算系统 G 中对于任意满足 $\vdash_G \Gamma[\Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 的 $\Gamma[-] \in CT(c(s(T)))$ 和公式 $\beta \in c(s(T))$, 根据内插引理的推论 1, 存在 $\gamma_i \in \text{dj}_T(c(s(T)))$, 使得 (1) $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_i$ 且 (2) $\vdash_G \Gamma[\gamma_i] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 因为 $\text{dj}_T(c(s(T)))$ 是有穷集合, 因此总共仅可取出有穷个不同的 r_i . 令 r 为所有 r_i 的合取, 记 $\theta = \text{dj}_T(r)$. 由 (1) 经过 $(\wedge R)$ 可得 $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$, 所以有 (3) $\vdash_G \Delta \Rightarrow_{c(s(T))} \theta$. 因此 $\Delta \leq_T \theta$. 令 (4) $\vdash_G \Xi[\theta] \Rightarrow_{c(s(T))} \delta$, 由 (3) 和 (4) 经过 (Cut) 可得 $\vdash_G \Xi[\Delta] \Rightarrow_{c(s(T))} \delta$. 由 (2) 经过 $(\wedge L)$ 可得 $\vdash_G \Gamma[\gamma] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 所以 $\vdash_G \Gamma[\theta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 因为 $\Gamma[-]$ 与 β 的任意性, 可得 $\theta \leq_T \Delta$. 因此 θ 为所求公式. $\square$

定义 9. 在 $|c(s(T))|$ 上定义 $\wedge', \vee', \perp', \top', \neg', \diamond', \blacklozenge', \hat{\diamond}'$ 如下:

- (1) $\top' = |\top|$; $\perp' = |\perp|$;
- (2) $|\alpha| \wedge' |\beta| = |\alpha \wedge \beta|$; $|\alpha| \vee' |\beta| = |\alpha \vee \beta|$; $\neg' |\alpha| = |\neg\alpha|$;
- (3) $\diamond' |\alpha| = |\beta|$ 使得 $\beta \approx_T \circ(\alpha)$ 且 $\beta \in c(s(T))$;
- (4) $\blacklozenge' |\alpha| = |\beta|$ 使得 $\beta \approx_T \bullet(\alpha)$ 且 $\beta \in c(s(T))$;
- (5) $\hat{\diamond}' |\alpha| = |\beta|$ 使得 $\beta \approx_T \dagger(\alpha)$ 且 $\beta \in c(s(T))$.

定义偏序关系 $\leq'_T$ 为 $|\alpha| \leq'_T |\beta|$ 当且仅当 $|\alpha| \wedge' |\beta| = |\alpha|$. 定义 9 中可以简单证明 $\wedge, \vee, \neg$ 具有良好定义性. 在 $\diamond' |\alpha|$ 定义中, 由引理 5 可得 $|\beta|$ 存在. 令 $|\alpha_1| =$

$|\alpha_2|$, 显然 $\alpha_1 \in |\alpha_1|$ 则 $\alpha_1 \in |\alpha_2|$, 因此 $\alpha_1 \approx_T \alpha_2$ 。令 $\diamond'|\alpha_1| = |\beta_1|$ 且 $\diamond'|\alpha_2| = |\beta_2|$, 对任意 $\Gamma[-] \in CT(c(s(T)))$ 和 $\delta \in c(s(T))$, 若 $\vdash_G \Gamma[\beta_2] \Rightarrow_{c(s(T))} \delta$, 则 $\vdash_G \Gamma[\circ(\alpha_2)] \Rightarrow_{c(s(T))} \delta$ 。因为 $\alpha_1 \approx_T \alpha_2$, 所以 $\vdash_G \Gamma[\circ(\alpha_1)] \Rightarrow_{c(s(T))} \delta$ 。又因为 $\beta_1 \approx_T \circ(\alpha_1)$, 所以 $\vdash_G \Gamma[\beta_1] \Rightarrow_{c(s(T))} \delta$ 。因此 $\beta_1 \leq_T \beta_2$ 。同理可证 $\beta_2 \leq_T \beta_1$ 。因此 $\diamond'|\alpha_1| = \diamond'|\alpha_2|$ 。同理可证 $\blacklozenge'|\alpha_1| = \blacklozenge'|\alpha_2|$, $\widehat{\diamond}'|\alpha_1| = \widehat{\diamond}'|\alpha_2|$ 。因此 $\diamond', \blacklozenge', \widehat{\diamond}'$ 具有良好定义性。

引理 6. $\alpha \leq_T \beta$ 当且仅当 $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。

证明. 假设 (1) $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。对任意 $\Gamma[-] \in CT(c(s(T)))$, $\gamma \in c(s(T))$ 若 (2) $\vdash_G \Gamma[\beta] \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$, 则由 (1), (2) 经过 (Cut) 可得 $\vdash_G \Gamma[\alpha] \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma$ 。因此 $\alpha \leq_T \beta$ 。反之假设 $\alpha \leq_T \beta$ 。因为 $\vdash_G \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 所以 $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。□

引理 7. $|\alpha| \leq'_T |\beta|$ 当且仅当 $\alpha \leq_T \beta$ 。

证明. 令 $|\alpha| \leq'_T |\beta|$, 即 $|\alpha \wedge \beta| = |\alpha|$ 。因此 $\alpha \wedge \beta \approx_T \alpha$ 。根据引理6有 $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \alpha \wedge \beta$, 并且因为 $\vdash_G \alpha \wedge \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 由 (Cut) 可得 $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。再根据引理6, 有 $\alpha \leq_T \beta$ 。反之假设 $\alpha \leq_T \beta$, 根据引理6可得 $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 又因为 $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \alpha$ 。由 ($\wedge R$) 可得 $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \alpha \wedge \beta$ 。因此由引理6, 可得 $\alpha \leq_T \alpha \wedge \beta$, 同时因为 $\vdash_G \alpha \wedge \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \alpha$, 由引理6, 可得 $\alpha \wedge \beta \leq_T \alpha$ 。□

推论 2. $|\alpha| \leq'_T |\beta|$ 当且仅当 $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 。

引理 8. 代数结构 $\mathcal{A} = (|c(s(T))|, \wedge', \vee', \neg', \diamond', \blacklozenge', \widehat{\diamond}', \perp', \top')$ 满足以下条件:

- (1) $|\alpha| \leq'_T |\beta| \wedge' |\gamma|$ 当且仅当 $|\alpha| \leq'_T |\beta|$ 且 $|\alpha| \leq'_T |\gamma|$;
- (2) $|\alpha| \vee' |\beta| \leq'_T |\gamma|$ 当且仅当 $|\alpha| \leq'_T |\gamma|$ 且 $|\beta| \leq'_T |\gamma|$;
- (3) $|\alpha| \wedge' (|\beta| \vee' |\gamma|) = (|\alpha| \wedge' |\beta|) \vee' (|\alpha| \wedge' |\gamma|)$;
- (4) 若 $|\alpha| \leq'_T |\beta|$, 则 $\neg'|\beta| \leq'_T \neg'|\alpha|$;
- (5) $\neg'\neg'|\alpha| = |\alpha|$;
- (6) $|\alpha| \wedge' \neg'|\alpha| = |\perp|$;
- (7) $\diamond'(|\alpha| \vee' |\beta|) = \diamond'|\alpha| \vee' \diamond'|\beta|$, $\blacklozenge'(|\alpha| \vee' |\beta|) = \blacklozenge'|\alpha| \vee' \blacklozenge'|\beta|$ 且 $\widehat{\diamond}'(|\alpha| \vee' |\beta|) = \widehat{\diamond}'|\alpha| \vee' \widehat{\diamond}'|\beta|$;
- (8) $\diamond'|\perp| = |\perp|$, $\blacklozenge'|\perp| = |\perp|$ 且 $\widehat{\diamond}'|\perp| = |\perp|$;
- (9) 若 $(\diamond')^n |\alpha| \leq'_T \neg'|\beta|$, 则 $(\blacklozenge')^n |\beta| \leq'_T \neg'|\alpha|$;
- (10) 若 $(\blacklozenge')^n |\alpha| \leq'_T \neg'|\beta|$, 则 $(\diamond')^n |\beta| \leq'_T \neg'|\alpha|$;
- (11) 若 $(\widehat{\diamond}')^n |\alpha| \leq'_T \neg'|\beta|$, 则 $(\widehat{\diamond}')^n |\beta| \leq'_T \neg'|\alpha|$ 。

证明. (1)-(6) 易证, 下面证明 (7)-(11)。

(7) 令 $\diamond'|\alpha| = |\gamma_1|$, $\diamond'|\beta| = |\gamma_2|$ 且 $\diamond'|\alpha \vee \beta| = |\gamma_3|$, 则 $\gamma_1 \approx_T \circ\alpha$, $\gamma_2 \approx_T \circ\beta$ 且 $\gamma_3 \approx_T \circ(\alpha \vee \beta)$ 。要证明 $\diamond'(|\alpha| \vee' |\beta|) = \diamond'|\alpha| \vee' \diamond'|\beta|$ 只需证明 $\gamma_3 \approx_T \gamma_1 \vee \gamma_2$ 。

首先证明 $\gamma_3 \leq_T \gamma_1 \vee \gamma_2$, 根据引理, 只需证明 $\vdash_G \gamma_3 \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_1 \vee \gamma_2$. 因为 $\vdash_G \gamma_1 \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_1 \vee \gamma_2$ 且 $\vdash_G \gamma_2 \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_1 \vee \gamma_2$, 所以 $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_1 \vee \gamma_2$ 且 $\vdash_G \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_1 \vee \gamma_2$. 由 (VL) 可得, $\vdash_G \alpha \vee \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_1 \vee \gamma_2$. 因为 $\alpha \vee \beta \approx_T \gamma_3$, 所以 $\vdash_G \gamma_3 \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_1 \vee \gamma_2$.

其次证明 $\gamma_1 \vee \gamma_2 \leq_T \gamma_3$. 根据引理, 只需证明 $\vdash_G \gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_3$. 因为 $\vdash_G \gamma_3 \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_3$, 所以 $\vdash_G \alpha \vee \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_3$. 因为 $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \alpha \vee \beta$ 且 $\vdash_G \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \alpha \vee \beta$, 由 (Cut) 可得 $\vdash_G \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_3$ 且 $\vdash_G \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_3$. 因此 $\vdash_G \gamma_1 \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_3$ 且 $\vdash_G \gamma_2 \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_3$. 由 (VL) 可得 $\vdash_G \gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow_{c(s(T))} \gamma_3$. 同理可证 $\Diamond'(|\alpha| \vee |\beta|) = \Diamond'|\alpha| \vee \Diamond'|\beta|$, $\widehat{\Diamond}'(|\alpha| \vee |\beta|) = \widehat{\Diamond}'|\alpha| \vee \widehat{\Diamond}'|\beta|$.

(8) 令 $\Diamond'|\perp| = |\gamma|$, 则 $\gamma \approx_T \alpha \vee \beta$. 因为对任意的 $\Gamma[-] \in CT(c(s(T)))$, $\beta \in c(s(T))$, $\vdash_G \Gamma[\alpha \vee \beta] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 且 $\vdash_G \Gamma[\perp] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 因此 $\vdash_G \Gamma[\gamma] \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 所以 $\gamma \approx_T \perp$, 即 $\Diamond'|\perp| = |\perp|$. 同理可证 $\Diamond'|\perp| = |\perp|$, $\widehat{\Diamond}'|\perp| = |\perp|$.

(9) 令 $(\Diamond')^n|\alpha| = |\gamma|$ 且 $(\Diamond')^n|\beta| = |\delta|$, 则 $\gamma \approx_T \alpha \vee \beta$ 且 $\delta \approx_T \alpha \vee \beta$. 若 $(\Diamond')^n|\alpha| \leq'_T \neg|\beta|$, 根据引理, $\vdash_G \gamma \Rightarrow_{c(s(T))} \neg\beta$. 因此有 $\vdash_G \alpha \vee \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \neg\beta$, 由 $(\alpha \vee \beta)$ 得 $\vdash_G \alpha \vee \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \neg\alpha$. 因此有 $\vdash_G \delta \Rightarrow_{c(s(T))} \neg\alpha$. 根据引理得 $|\delta| \leq'_T \neg|\alpha|$. 因此有 $(\Diamond')^n|\beta| \leq'_T \neg|\alpha|$. 同理可证 (10) 和 (11). $\square$

推论 3. 令 T 为一有穷公式集, 代数结构 $\mathcal{A} = (|c(s(T))|, \wedge', \vee', \neg', \Diamond', \Diamond, \widehat{\Diamond}', \perp', \top')$ 是一有穷的 **K4.t** $\times$ **S5** 代数.

证明. 由引理8, 可得, $\mathcal{A} = (|c(s(T))|, \wedge', \vee', \neg', \Diamond', \Diamond, \widehat{\Diamond}', \perp', \top')$ 是一 **K4.t** $\times$ **S5** 代数. 又因为 T 是有穷的, 所以 $|c(s(T))|$ 也是有穷的, 因此 $\mathcal{A}$ 是有穷的. $\square$

引理 9. 假如 $\Diamond\alpha, \Diamond\alpha, \widehat{\Diamond}\alpha \in T$, 那么 $\Diamond'|\alpha| = |\Diamond\alpha|$, $\Diamond'|\alpha| = |\Diamond\alpha|$, 且 $\widehat{\Diamond}'|\alpha| = |\widehat{\Diamond}\alpha|$.

证明. 令 $\Diamond'|\alpha| = |\beta|$, 则 $\beta \approx_T \alpha \vee \alpha$. 欲证 $\Diamond'|\alpha| = |\Diamond\alpha|$, 只需证明 $\beta \approx_T \Diamond\alpha$. 因为 $\vdash_G \alpha \vee \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \Diamond\alpha$, 所以 $\vdash_G \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \Diamond\alpha$. 根据引理6, $\beta \leq_T \Diamond\alpha$. 又因为 $\vdash_G \beta \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 所以 $\vdash_G \alpha \vee \alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 由 $(\Diamond L)$ 得 $\vdash_G \Diamond\alpha \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$. 根据引理6, $\Diamond\alpha \leq_T \beta$. 因此 $\Diamond'|\alpha| = |\Diamond\alpha|$, 同理可证 $\Diamond'|\alpha| = |\Diamond\alpha|$ 且 $\widehat{\Diamond}'|\alpha| = |\widehat{\Diamond}\alpha|$. $\square$

定理 2. 令 T 为一个有穷公式集, 如果 $\not\vdash_G \Gamma \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 那么存在一个有穷 **K4.t** $\times$ **S5** 代数 $\mathcal{A}$, 使得 $\not\vdash_{\mathcal{A}} \Gamma \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$.

证明. 如上构造有穷 **K4.t** $\times$ **S5** 代数 $\mathcal{A} = (|c(s(T))|, \wedge', \vee', \neg', \Diamond', \Diamond, \widehat{\Diamond}', \perp', \top')$, 定义赋值 $\sigma : c(s(T)) \mapsto |c(s(T))|$ 使得 $\sigma(p) = |p|$. 施归纳于公式的复杂度, 根据定义8和引理9, 易证对于任意 $\alpha \in T$, $\sigma(\alpha) = |\alpha|$. 假设 $\not\vdash_G \Gamma \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$ 但 $\vdash_{\mathcal{A}} \Gamma \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 则 $|f(\Gamma)| \leq'_T |\beta|$, 根据推论2有 $\vdash_G f(\Gamma) \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 易得 $\vdash_G \Gamma \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 与假设矛盾因此定理得证. $\square$

定理 3. G 具有有穷模型性.

定理 4. 逻辑 $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 具有有穷模型性。

推论 4. 逻辑 $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 是可判定的。

由有穷模型性证明, 我们还可以得到下面的一般化子公式性质。

推论 5. 如果 $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \beta$, 则 $\vdash_G \Gamma \Rightarrow_{c(s(T))} \beta$, 其中 T 为 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 所有公式的集和。

由上面的推论可得:

推论 6. $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 是 $\mathbf{K4.t}$ 和 $\mathbf{S5}$ 的保真扩充。

在上面 $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 的有穷模型性证明中, 各定理中关于 $\hat{\Diamond}$ 的 $T, 4, B$ 情况的证明均具有独立性, 如在内插定理中证明 $(T_{\hat{\Diamond}})$ 时是不需要用到 $\hat{\Diamond}$ 的 4 和 B 规则的。并且虽然引理 3 仅对包含有 4 公理性质的混合逻辑成立, 但其仅用于引理 8 中, 证明所构造的代数具有 4 公理性质。因此只需要删除上面 $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 证明中 $T, 4, B$ 性质相应的规则和证明即可得到其他混合模态逻辑的有穷模型性证明。如删除 $\Diamond, \blacklozenge$ 的 4 和 $\hat{\Diamond}$ 的 (B), 那么我们得到的是 $\mathbf{K.t} \times \mathbf{S4}$ 的有穷模型性证明。

同理也可以在 $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 上增加一些规则及相应的证明可以得到其他一些混合逻辑的有穷模型性如在 $\mathbf{K4.t}$ 上增加下面 D 规则

$$\frac{\Gamma[\circ T] \Rightarrow \beta}{\Gamma[T] \Rightarrow \beta} (D_{\hat{\Diamond}}) \quad \frac{\Gamma[\bullet T] \Rightarrow \beta}{\Gamma[T] \Rightarrow \beta} (D_{\blacklozenge})$$

则可得到混合逻辑 $\mathbf{KD4.t} \times \mathbf{S5}$, 由于在上面有穷模型性的证明中 D 的证明类似于 T 的证明, 因此易得到 $\mathbf{KD4.t} \times \mathbf{S5}$ 的有穷模型性。另在时态上考虑 B 的扩张, 则有 $\Diamond = \blacklozenge$, 那么可以得到相应模态混合扩张的有穷模型性。如在 $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{S5}$ 增加 $\mathbf{K4.t}$ 的 B 性质及相关证明, 那么可以得到 $\mathbf{K4} \times \mathbf{S5}$ 的有穷模型性证明。同样考虑两时态逻辑混合只需要重复时态部分的证明即可得到相应的混合逻辑的有穷模型性证明, 如 $\mathbf{K4.t} \times \mathbf{K4.t}$ 。综上所述通过该方法我们可以得到当 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 是经典时态逻辑 $\mathbf{K.t}$ 或经典模态逻辑 $\mathbf{K}$ 上的 $D, T, B, 4$ 组合扩张时, $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 的混合逻辑同样具有有穷模型性。

4 结论

本文证明了时态逻辑 $\mathbf{K4.t}$ 和模态逻辑 $\mathbf{S5}$ 的混合逻辑具有有穷模型性, 并且该结果可延伸为一般性的结果: 当 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 是经典时态逻辑 $\mathbf{K.t}$ 或经典模态逻辑 $\mathbf{K}$ 上的 $D, T, B, 4$ 组合扩张时, $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 的混合逻辑同样具有有穷模型性。

本文建立一种证明混合时态逻辑和混合模态逻辑的有穷模型性的一般证明方法。该方法也可以被用来证明常见的正规模态或时态逻辑的有穷模型性。本文的证明方法基于代数证明论, 其关键是证明混合的两个单维时态或模态逻辑存在满

足内插引理性质的矢列演算系统。在未来的研究中我们将尝试给出存在内插引理性质的矢列演算系统的时态或模态逻辑的代数条件,以期将本证明拓展为更一般的结果。

参考文献

- [1] W. Buszkowski, 2011, “Interpolation and FEP for logics of residuated algebras”, *Logic Journal of IGPL*, **19(3)**: 437–454.
- [2] M. Farulewski, 2008, “Finite embeddability property for residuated groupoids”, *Logic Journal of IGPL*, **22(3)**: 25–42.
- [3] K. Fine and G. Schurz, 1996, “Transfer theorems for multimodal logics”, in B. Copeland (ed.), *Logic and Reality*, pp. 169–213, Oxford: Clarendon Press.
- [4] D. M. Gabbay, 1972, “A general filtration method for modal logics”, *Journal of Philosophical Logic*, **1(1)**: 29–34.
- [5] M. Kracht and F. Wolter, 1991, “Properties of independently axiomatizable bimodal logics”, *The Journal of Symbolic Logic*, **56(4)**: 1469–1485.
- [6] D. Lemmon and D. Scott, 1966, *Intensional Logics*, Redwood City, CA: Stanford University Press.
- [7] Z. Lin, 2014, “Non-associative lambek calculus with modalities: Interpolation, complexity and FEP”, *Reports on Mathematical Logic*, **22(3)**: 494–512.
- [8] Z. Lin, M. K. Chakraborty and M. Ma, 2021, “Residuated algebraic structures in the vicinity of pre-rough algebra and decidability”, *Fundam Informaticae*, **179(3)**: 239–274.
- [9] M. Pentus, 1993, “Lambek grammars are context free”, *Proceedings Eighth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 429–433, Los Alamitos, CA: IEEE.
- [10] J. Reif and A. Sista, 1985, “A multiprocess network logic with temporal and spatial modalities”, *Journal of Computer and System Sciences*, **30(1)**: 41–53.
- [11] M. Reynolds, 1997, “A decidable temporal logic of parallelism”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **38(3)**: 419–437.
- [12] K. Segerberg, 1979, “Modal logic with linear alternative relations”, *Theoria*, **36(3)**: 301–322.
- [13] R. Thomason, 1984, “Combinations of tense and modality”, in D. Gabbay and F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical logic, Vol. 2: Extension of Classical Logic*, pp. 135–165, Dordrecht: Reidel.
- [14] F. Wolter, 1995, “The finite model property in tense logic”, *The Journal of Symbolic Logic*, **60(3)**: 757–774.
- [15] M. Zakharyashev, 1992, “Canonical formulas for **K4**, Part I: Basic results”, *Journal of Symbolic Logic*, **57(4)**: 1377–1402.
- [16] M. Zakharyashev, 1996, “Canonical formulas for **K4**, Part II: Cofinal subframe logics”, *Journal of Symbolic Logic*, **61(2)**: 421–449.

(责任编辑: 袁之)

On the Finite Model Property of Fusions of Modal Logics

Yu Peng Zhe Lin[✉]

Abstract

In this paper we study the finite model property of fusion of classical tense and modal logics. We introduce an algebraic proof theory method and prove the fusion of tense logic **K4.t** and modal logic **S5** has the finite model property, which yields the decidability of this fusion logic. This result can be extended to some other fusions of normal modal and tense logics.

Yu Peng Department of philosophy, Xiamen University
amberlogos@163.com

Zhe Lin[✉] Department of Philosophy, Xiamen University
pennyshaq@163.com