

非直接直观：对哥德尔数学直观概念的一点议论

单芃舒

摘要：当代数学哲学文献中往往倾向于将数学直观理解为我们（从数学对象）不加中介直接获得表象的过程（或这种能力、所得结果），简称为“直接接触解读”。本文基于对哥德尔文本中数学直观概念的解读，强调对数学直观的被忽视的另一种理解，即“数学直观不必被理解为直接知识”。本文首先反思“直接接触解读”得以流行的背景；然后结合哥德尔和王浩的文本证据，将哥德尔数学认识论概念细分出三个层次，并确立对数学直观的非直接的解读。最后将以文献中“专家直观”“构成实在论”这两种背景和关切各异的数学哲学研究进路为例，说明非直接解读所蕴含的丰富的理论发展可能性及更贴合哥德尔思想的优点。

关键词：哥德尔；数学直观；非直接；专家直观；构成实在论

中图分类号：B81

文献标识码：A

1 引言

“直观”（intuition），大概是哲学文献中历史沉淀厚重，各色定义纷繁，且至今仍被大量使用的核心术语的一大代表。而在当代数学哲学的讨论中，数学直观（也即关于数学对象或命题的直观）因其至少在表面上预设了抽象（数学）对象¹的存在而常常与数学的实在论-反实在论争论关联在一起。著名逻辑学家哥德尔（K. Gödel）在上世纪以其完全性定理、不完全性定理、选择公理相对于 ZF 的一致性为代表的卓越技术贡献和坚定而充实的数学实在论立场（以及他提出的与此立场紧密相关的数学基础研究纲领）而成为了时至今日相关哲学讨论都难以绕开的作为典型数学实在论者的标杆和基点。哥德尔主张“数学概念”（即数学对象）不是由人类所任意创造的，而是客观地存在着静待数学家发现和认识，并且关于其（命题的）直观能够被数学家能获得。²

可问题是，尽管哥德尔作为数学实在论和数学直观支持者的坚定程度不曾令人怀疑，可是他的“数学直观”概念常常被过分简化（以至于在一定情景下可被

收稿日期：2021-12-20

作者信息：单芃舒 复旦大学哲学学院
doxa_ps@hotmail.com

¹抽象对象（abstract object），指不存在于特定时空中的对象，亦有别称“理念对象”（ideal object）。

²参见 [5]，第 128 页；[6]，第 258 页；以及《哥德尔文集》主编费弗曼（S. Feferman）在 [4]，第 169 页的注记。

认为是一种误解)。按照这种简化后的理解,数学直观是一种认知者**直接地**获得抽象数学对象知识的作用过程(或相应的能力)。它听起来是如此地简单直接,以至于反而显得像“第六感”般神秘而可疑。([3],第41、55页)³ 本文将此类颇有影响力的对数学直观的简化解读称之为“直接接触解读”(该称谓直接参考了[18])。本文的目的在于与之抗衡,为此将重提哥德尔的一个简洁明了却时常被忽视的论断——“数学直观无需被理解成……直接知识”⁴,并对这个要点的数学哲学意义做出说明。

接下来在第2节中我将首先指出对数学直观的直接接触解读之所以流行开来的两个背景因素。在第3节,我将会回到哥德尔的原文(以及王浩的评注)来重构出他关于数学认知论概念的三个层次(材料、感知、直观)。和流行的直接接触理解相反,本文主张哥德尔所理解的数学直观其实是三层次中最远离数学对象这一认知源头的事件。在第4节,我将以两个例子说明非直接接触解读的确在数学哲学上能产生有意义的差别,而非无关紧要的细节。第一个例子是哲学文献中存在但相对小众的关于“专家直观”(expert intuition)这一直观分支的探讨,第二个例子是近年来蒂森(R. Tietzen)融合哥德尔实在论和现象学论述所发展出的“构成实在论”(constituted platonism)立场。看似相去甚远的两条研究进路事实上都需在一定程度上超脱对数学直观的直接接触解读才能成为可能,并且这两条进路还从不同侧面重现了哥德尔所反复描绘的数学-科学平行关系(math-science analogy)。这些数学哲学理论发展的可能性例证了以对数学直观的非直接接触解读来抗衡直接接触解读的价值,并提供了沿此路线前进的一些动机。

2 背景简述:对数学直观的直接接触解读能够占据主流的部分原因

对直观的直接接触解读的传统至少可以追溯到康德。康德发展了传承自古希腊哲学的传统,将知识视为质料(matter)和形式(form)的结合,故其认识论的一大特征也常被归结为“质形论”(hylomorphism)。在他看来,正是在直观过程中,认识者才从被认识对象获得了最初的质料(或说内容),并在同一直观过程中给这些质料赋予最基本的形式(时空直观形式)。“直观”,如康德学者盖耶(P. Guyer)所总结的那样,在康德那里是“……那种通过感官的方式从特定对象那里获得**单独而直接**(particular and immediate)的表征的能力”([11],第36页)。直观所得又

³佛利纳(J. Folina)指出,哥德尔“康托篇”中“尽管它们远离感官经验,我们关于集合论的对象也确实有着某种像是感知的东西……”的表述经常被讨论,如果脱离语境孤立地看,那么它确实很容易引起这般误解。她进一步指出,尽管就总体结论而言她判断哥德尔的实在论和其它数学实在论一样难逃贝氏问题的诘问,可是哥德尔的数学直观概念相比康德的直观概念已发生很大转变,因而其无需被理解为某种“神秘的第六感”。

⁴见第2节引文和讨论。

经思考的处理被赋予更多的形式（如形成命题并被加入知性范畴）。在康德看来，直观所带来的质料和概念所代表的形式是知识（或者更特定地说，包括数学知识在内的“先天综合知识”）不可或缺的两种组分（[11]，第155页，B34）。这一直观提供基本材料而又经思考加工的认识论描述模式时至今日依然在大多数情况下主导着哲学文献对“直观”这一术语的理解和使用。

当代哲学问题（特别是偏重分析哲学风格的部分）的探讨通常需要以基础主义的结构展开，一些（例如道德的、认识论的、数学的）哲学命题需要被当作探讨的起点而被设定。而且提出这些基础设定命题的哲学家通常都会将它们“符合直观”这一特性作为其正当性依据的重要组成部分，至少在这些命题没有遭遇到有效的合理质疑时如此（*prima facie*）。（[10]）

而在诉诸“符合直观”的特性来为基础设定命题辩护时通常意味着该命题被接受的根据要尽可能摒除个体所特有的生活经验、从业特性、文化背景、性格等外来因素的干扰，尽可能纯粹地回归到命题本身的自明性上，才可能成就相对普遍和站得住脚的依据。换言之，我们可以认为许多哲学作品都要求“直观”更贴近命题认识主体所直接“被给予的”材料，而尽可能摒除思考、经验积累这样一些（可能会因人而异的）加工过程。正是在对“直观”一词这样的理解倾向下，“直观”在当代哲学中定义虽多，却也泾渭分明地回避了被称为“专家直观”（*expert intuition*）的建立在特定专业实践经验积累之上的直观现象。我们将看到，先入为主地排除专业经验在对哥德尔数学直观解读中的效用会妨碍对它的完整理解。

二十世纪下半叶数学哲学很大程度上将一般哲学中的本体论和认识论兴趣延伸和集中到了数学对象上。这其中以贝纳塞拉夫问题（Bernaceraff's problem，以下简称“贝氏问题”）最具标志性（[1]）。该疑问由贝纳塞拉夫（P. Bernaceraff）提出，直指数学实在论的一个难以应付的弱点，大意上质疑道：抽象的（不在时空之中的）数学对象如果真的存在，那么它们又如何被具体的（时空之中的）我们（通过怎样一条时空之中的因果链条）来认识呢？不难看出回应该问题的困难主要在于说明抽象存在和具体存在这二元交界处如何开启认识的因果链条。因而，在该问题的背景下，数学哲学家自然有动机将“直观”的理解向直接接触论侧重，以期解释该认识因果链条如何开端或（站在反实在论立场）质疑这种直观的可行性与抽象数学对象的真实性。

如曼考祖（P. Mancosu，[12]，第1页）指出：贝氏问题本身的确是一个清晰且重要的哲学问题，它在数学哲学史上所带来的不足或许恰是因为它简明得太过瞩目以至于在数十年里过多地占用了数学哲学家们的注意力，继而相较之下忽视了其它有价值的议题以及无法直接回应贝氏问题素材（比如数学中的新成果、数学家当下的研究实践以及数学史）。贝氏问题所引导的数学哲学整体上自然会更

倚重以直接接触论的方式来解读“直观”概念。（又见[14]，第175页⁵）

综上，一般（分析）哲学和数学哲学中近几十年来的问题意识和惯性都更需要一类无结构无前提的直接的直观解读，而有意无意地忽视了数学实践经验等更多因素对数学直观的塑造作用。近年来数学哲学文献也时有意见意识到了之前主流趋势的局限性，并更多地探索贝氏问题相关主题之外的可能性。本文亦可被视为参与这种探索的一次尝试。接下来在第3节中，我们将，如暂时悬置贝氏问题，解读出哥德尔数学直观概念超越直接接触论解读的更多细节。

3 哥德尔的数学认识论概念的三个层次

参照哥德尔的“罗素篇”([5])“康托篇”([6])“吉布斯演讲稿”([8])⁶以及王浩在《逻辑之旅》(Logical Journey, [15])一书中所记录的他与哥德尔访谈的片段和评述，本文认为哥德尔关于数学对象的认识论思想可以被分为“材料”“感知”“直观”(data, perception, intuition)这三个递进的层次，并强调直观层次的认识并不直接。就三个层次间的边界而言，材料-感知的区别是确立无疑的；而感知-直观之间的界限则不总是分明，感知-直观之间的分别似乎直到在他晚年与王浩的访谈记录中才初步可辨别。⁷ 在一些语境下哥德尔似乎将直观视为一类更为凝练、全面的被拔高了的感知，也即直观或许也可被解读为感知的一个子类而非完全不同的一个认识论范畴。

以下引文可充当这数学认识论三个层次的确出现在哥德尔思想中的依据。

材料层次：

在感觉之外还有别的被直接给予的，这一点可（独立于数学地）从以下事实中得出：我们的指向物理对象的理念中包含着这样一种组分，它在性质上不同于感觉或是感觉的组合，例如，关于【物理】对象本身的理念。另一方面，我们思考过程无法创造性质上全新的要素，而只能将已得的东西加以重现和组合。显然，数学基础下的那种“被给予”和我们经验观念中所包含的这种抽象要素关联紧密……

……如康德所论断，这第二类材料(*the data of this second kind*)并不会因其不能和某种作用于我们感官的特定事物建立联系就成为某种纯然主观的东西。毋宁说它们同样也能反映着客观现实的一个方面，不过

⁵ 蒂森也不无遗憾地将“贝氏问题把因果式的关于知识的解释强加给关于数学对象的实在论立场”视为一种“左倾的时代精神的人为产物(artifact of leftwards Zeitgeist)”。其“左倾”一词明显呼应哥德尔1961年讲稿中的分类，笼统代指一类偏向唯名论、经验论等特征的哲学倾向。

⁶ “罗素篇”(常作 Russell paper)指《罗素的数理逻辑》(Russell's mathematical logic)，“康托篇”(常作 Cantor paper)指《什么是康托的连续统问题》(What is Cantor's continuum problem?)，“吉布斯演讲稿”指《一些关于数学基础的基本定理以及它们的影响》(Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications)。

⁷ 见以下引文。

和感觉相对照的是，它们之于我们的呈现也许源于我们和现实之间的另一种联系。（王浩访谈哥德尔片段，[15]，第225页）

感知层次：

在我看来，设定此类对象（指类和概念）和设定物理实体同等正当，并且我们也有同等充足的理由去相信它们的存在。它们之于一个令人满意的数学系统是必要的，在相同的意义下正如物理实体之于一个令人满意的感官知觉理论也是必要的，并且在两种情形中我们都不可能将关于这些实体的命题阐释为关于“材料”的命题，也即在后一情形中实际出现在感官知觉（中的东西）。[4]，第128页）

“但是，尽管它们远离感官经验，我们仍确实关于集合论的对象也有着某种像是感知的东西，如好像（集合论）公理迫使我们接受它们为真的事实所见证的那样。我看不出我们有任何理由应该对这种感知抱更少信心。……[4]，第268页）

直观层次：

……我看不出有任何理由需要对这种知觉，以及更普遍而言，即，对数学直观【王浩补记：哥德尔自己提议用“以及更普遍而言，即，对数学直观”更正“对数学直观”】相较感官知觉抱更少信心【王浩补记：“在更普遍的意义，也包括像从客机上观看城市景观所得的印象”——哥德尔于1975年11月增补】……

应当指出，数学直观无需被理解成一种给出关于所思虑对象的直接知识的官能。毋宁说，就像物理的经验那样，我们是在另外一些被直接给出的东西的基础之上塑造出关于对象的观念……”（哥德尔原文见[4]，第268页；方头括号“【】”中王浩补充见[15]，第226页）

直观不同于构造；它是一眼看出。（王浩访谈片段，[15]，第302页）

不同于本文第2节所描绘的一般哲学和数学哲学主流所偏重的“数学直观”的直接接触论的解读，哥德尔所谈论的数学直观和数学对象间的关系事实上在过程上并不直接。除去他如引文中直接明了地说“数学直观无需被理解成……直接知识”，以下两点思考进一步说明了哥德尔不将数学直观视为直接知识的理由。

首先，三个认知层次中最直接地接触到抽象的客观实在的层次是最基础的材料层次的（或者说“第二类材料”）而非最高层的“直观”。哥德尔并未能正面地描述材料层次的内容，而只是从侧面论证了这类非感觉材料的存在，比如吉布斯演讲稿中对“数学不是‘我们的自由创造’”这一论点的论证本质上可以被理解为对“第二类材料”存在性的论证（[7]，第314—315页）。我们甚至看不到他将材料指向任何特定的抽象对象。哥德尔关于材料层次认知内容的缄默是可以理解

的,如王浩的评论所提示([15],第226页)⁸,材料层次的认知参与构成了我们关于数学知识在内的抽象命题的知识,但它本身却太过基础而难以被进一步有意识地反思。

再者,哥德尔在谈到数学直观时首要谈到的是对于命题和事态的直观,而且只在衍生的意义上将其指向对象。哥德尔本人的文字和王浩的证言均可印证这一术语使用习惯。帕森斯(C. Parsons)广受引用的对数学直观的两种基本区分——“关于事态的”(intuition that)和“关于对象的”(intuition of)直观亦是对这一区别的表达。([13],第139页)特别地,他指出哥德尔认为“关于集合论的对象也有着某种像是感知的东西”的这关于对象的直观也是基于“如可在【集合论】公理迫使我们接受它们为真的事实所见证的那样”⁹的这关于事态的直观([13],第146页)。类似的观点也见于([17],第19页),其中里格利(W. Wrigley)认为“哥德尔的直观概念……应该纯然地作命题意义上理解(construed purely propositionally)……对象直观的概念(the notion of objectual intuition)虽然也出现在哥德尔文字中,但并不在任何清楚的方面扮演重要的哲学角色。”

小结一下,直接接触论的数学直观解读是对哥德尔实际的数学认识论观点的简化和压缩。前者一个过程所具备的功能其实原本分散在后者的三个层次中。与抽象现实直接作用的获得性功能发生在材料层面;抽象对象的设定发生在感知层面;而临场不经思虑直接获得事态的整体性洞见则是直观层面的展现。直接接触论的压缩简化将这些功能全都装入了一个统一的“直观”的名目中。这样的简化是否恰当取决于我们的目的和关切的中心问题是什么。对于回应贝氏问题,这样的简化能够突出抽象-具体二元交界如何作用这一难点所在,因而很大程度上是恰当的。不过倘若我们的目的在于较重视地再现哥德尔的数学直观观,特别是想要理解他心目中的数学直观为什么可以被提升发展,我们就不能满足于该简化版本的理解。

显然,哥德尔认为我们的数学直观既是可错的也是可以被提升的。我们现在所讨论的数学对象,在哥德尔口中被称为“数学概念”,它被设定为独立于人类心灵的创造,等待着数学家的发现而非发明的客观实在。与此文字相近但实质相对立的表述是“直观概念”(intuitive concept),哥德尔用它指我们用数学直观所获得关于数学概念的主观认识。哥德尔提到过许多事例来说明数学直观可能犯错并产生有瑕疵的直观概念。比如,历史上困扰素朴集合论的罗素悖论、看似违反物质守恒的巴拿赫-塔斯基分球佯谬都被哥德尔归结于直观概念的偏差,而非数学概念本身的矛盾。而换一个角度来看,这些事例所带来的挑战在数学史上的成

⁸王浩将第二类材料和我们在处理研究项目时的无意识思考联系在一起。

⁹见本文上文的“感知层次”的哥德尔引文。如之前所说,感知层次和直观层次之间的区分并不显著,数学直观亦常在文献中被理解为感知的子集。

功解决也例证了数学直观（或说作为其产物的直观概念）一时的谬误可以被驱散，对哥德尔而言，这意味着数学直观更清晰和准确地反映了客观的数学概念。此外，我们还可以看到他的更多有关数学直观（以及数学概念感知的）可提升性的表述。一方面，他将数学概念感知类比于物理感知，暗示类似于天文观测活动中可借助望远镜将遥远的恒星分辨得更清晰，数学概念考察活动或许也可借助合适的某种意义上的工具将概念的性质分辨得更明晰。另一方面，他还明确地强调**数学直观的应用需要深厚的（数学实践）经验作指引**。否则不加约束的滥用将有损于数学直观作为我们探索数学概念的工具的可靠性。

将哥德尔的三个数学认知层次压缩简化为一的直接接触论解读难以很好地兼顾上述数学直观的可错性和可提升性，特别是难以解释经验为何会影响数学直观的应用是否合理和成功。直接接触论解读这一缺陷的论证如下：第一，倘若我们将简化压缩后的数学直观视为更接近于第一层次的认识过程，那么直观所得的结果即是材料。那么数学直观就根本没有可错性和可提升性可言，因为材料本身无所谓对错。就好像实验仪器产生的不加解释的数据¹⁰本身无所谓对错，科学家基于这些材料综合理论分析（包括考虑“实验仪器有多可靠”“这些数据所用以描述的物理对象是什么”等问题）所做的判断才有对错可言。第二，就算我们将简化压缩后的数学直观理解为更接近第二层或第三层的认识过程，因而可被认为设定了直观的客观对象（或命题）以使直观概念的真假能被谈论；我们也仍然需要让数学直观能力的先决因素足够灵活才跟得上个体数学家数学实践经验的飞速成长。而如果像直接接触论那样倾向于认为数学直观（即便存在）也只取决于某些必须显现于群体的、器质性的、变动相对缓慢的要素，那么这样压缩简化的数学直观恐怕还是很难像哥德尔所期待的那样可以并需要受到经验的引导。

4 以非直接解读为基础的两例数学哲学研究进路

我们在第3节试着与一度流行的数学直观的直接接触论解读作对抗，将哥德尔的数学概念认识论重构出三个层次，并将数学直观列为容许数学实践经验要素参与的第三层次。本节我们将看到这种认识论层次上的膨胀和复杂化并非不必要的吹毛求疵，而是的确可以至少在数学哲学上产生后果。为此，本节将以专家直观和构成实在论这两个看起来截然不同的数学哲学进路为例解释它们如何与三层次的数学概念认识论相容。实际上，这两例进路也都从各自的角度支持了数学-科学平行论。

¹⁰ “材料”和“数据”英文皆是 data，后者亦可被理解为在一定格式限定下的材料。

4.1 专家直观

首先我们以查德诺夫 (E. Chudnoff) 的论文 ([2]) 为例来描述“专家直观”(expert intuition) 这一被当代一般哲学和数学哲学主流有意或无意地忽视¹¹的理解数学直观的进路是怎么样, 以及它如何与我们所重构的哥德尔的三层次的数学认识论相关。查德诺夫题为《探寻直观》的论文所探寻的“直观”并不限定于数学直观, 而是希望将包括物理学、鸟类学等自然科学实践中的直观都包含进的专家直观的范畴加以探讨。不过从他所引证的例子便可以看出, 数学直观不仅被他包含在内, 而且充当了他的整套专家直观系统的原型与核心。统观查德诺夫的论文, 他对专家直观的主干由现象(学)¹²以及结构两个方面构成。

现象学层面即专业直观向我们呈现出来的一些表现方式上的特征。具体而言, 他首先给出了三种专家直观的表现方式: 历难而得(hard-won)、可提升(improved)、专家指引而得(expertly-guided)。([2], 第3页) 所谓“历难而得”即专家直观所提供给我们的结果未见得必须要像主流观点所认为的那样可以被未经训练过的头脑也一眼看出, 而是也可以经过一定推导和努力之后才显得直观。对此, 查德诺夫援引了数学家克莱因 (F. Klein) 的文字, 主张对数学对象直观式通透的理解应该是艰辛的数学研究所追寻的目标而非仅是起点。¹³ “可提升”意味着专家直观的能力可经训练而获得提升。对此, 他援引数学家曼德博 (B. Mandelbrot) 关于填满空间的皮亚诺曲线是否符合直观与他人论辩的观点, 主张皮亚诺曲线初始显得违背直观并不能彻底否定数学直观的可靠性, 反而说明了数学直观需经训练的提升来看懂更多数学事实。“专家指引而得”则意味着未经历练的特定领域入门者也可以在专家的帮助指点下通过直观看到相应结果。对此, 他以观鸟者可借专家指导成功感知到之前被忽视的特定鸟类的特征而成功辨别其种类为例来说明。查德诺夫认为直观的这三种现象学表现相互关联, 并且其实例也往往重合在一起。除了这三个被单独列出的, 更偏重“专家”这一定语的专家直观的现象学表现, 查德诺夫还从相关文献中提取出了更多偏向“直观”的我们所熟悉的现象学特征。比如, 直观结果对我们所呈现出的“被给予的”(given) 特征, 以及(援引自哥德尔的) 直观结果“迫使我们接受它为真”(forceful or pushy)。正是在“现象学”的层面上, 查德诺夫主张直观与(感官) 知觉(perception) 的相似性; 与这相似的两相对立, 推理(reasoning) 这一认知方式所呈现的“现象学”(phenomenological)

¹¹ 如本文第2节所提到的。

¹² 查德诺夫所说的“现象学”并不专指本文4.2小节所探讨的胡塞尔现象学, 而只是泛指“感官感知”“直观”所向我们呈现出的表面的现象特征。本文在且仅在4.1小节的所有“现象学”均属此列, 以下不再专门注明。

¹³ 在具体例子上, 查德诺夫则以不等式运算举例: 如 $a < b, b < c \Rightarrow a < c$ 的推导乍看就显得直观上自明。而 $a < 1 \Rightarrow 2 - 2a > 0$ 的推导虽然也不难, 并且也显得直观上自明, 但其自明性的显现所要求的基础就稍微更多一些。

特征则是被推出的命题附带着一条支撑它的命题串。换句话说,他将数学-科学平行论的原点放在现象层面上。

现象学之下,查德诺夫还试图为专家直观的内在结构提供一定框架性说明,特别是在此框架上为其中可提升的直观提供说明。查德诺夫延续了上世纪70年代以来(哲学中小众却一直存在着的)专家直观研究进路的传统,将专家直观解释为一种在复杂的问题求解(problem-solving)情景下(在问题空间中)一眼看出可行解的能力。举例而言,我们可以将其理解为在汉诺塔谜题(的可做操作)中快速“看出”求解路径、围棋对弈(的可落子方式)中快速看出致胜策略的能力。对于这样一些问题求解情形,查德诺夫汇总了三种理解专家直观作用的方式。第一种方式将专家直观的作用理解为狭义地¹⁴改善搜寻解的策略。第二种方式将专家直观的作用理解成为所面对的问题配置一个方便索引的知识库,从而在面对待解问题时能够更快地比对已知的相似情景实现求解。第三种方式则将专家直观的作用理解为重构整个待搜寻的解空间。

正是按照这第三种方式的理解,查德诺夫说明了(刚刚提及的)专家直观在曼德博主张的提升后的直观可以接纳(填满平面的)皮亚诺曲线这一个例中的运作方式。在经受专业训练洗礼前的心灵所依靠的直观倾向于在视觉想象中追踪一个点的运动轨迹来确定一条曲线,这种被局限住的探寻曲线(的问题空间)的方式无疑将能够填满平面的曲线解排除在外;而经受过训练的心灵则会将探寻空间扩大到对能够视觉想象的一系列曲线求极限的结果,从而将皮亚诺曲线纳入求解范围,并在看到它(的描述)时直观地一眼确定它就是一则可解。

综上,本文认为查德诺夫所述的包括专家直观在内的直观在数学领域的限制很有希望成功地贴合作为(第3节所述的)哥德尔的第三数学认知层次的数学直观。这一进路的一个重要优点¹⁵在于它为数学实践经验明确地安排了一个位置,解释了经验如何通过专家直观的形式使得数学直观得到提升,这与哥德尔所支持的数学直观的可提升性相符。同时,一个相对次要的优点是这一进路支持并丰富了数学直观和感官认知在“现象学”方面的相似性(特别是对专家直观的说明事实上既适用于数学也适用于自然科学领域),从一个侧面巩固了哥德尔主张的数学-科学平行论。要说到潜在的不足之处,其一或许在于专家直观被解释为一种帮助快速问题求解的能力与哥德尔的关于数学命题(并在衍生意义下关乎数学对象)的数学直观仍有一定空隙,因为后者并没有明显地预设任何有待解决的问题。

不过,我们仍有希望填补这一不足,可以想见,一个数学家群体若能凭借专家直观迅速地解决一个个证明的问题,则他们对于什么样的公理能够避免(已知的)矛盾、具备符合直观的等价表述、推导出重要的数学定理等事项都能轻易地

¹⁴即不像第三种方式那样彻底地重构问题空间,而只是在固定空间的前提下优化策略。

¹⁵至少对发展哥德尔思想而言。

做出判断。换句话说,发达的专家直观或许将同时有助于数学家认识到某条公理的有效性的内在辩护和外在辩护,继而在直观上接受这则公理,拓宽对该公理所描述的数学对象的直观认识。由此与哥德尔所说的关乎命题和数学概念的数学直观更紧密地关联在一起。考虑数学公理辩护已是题外话,我们点到即止。

4.2 蒂森以现象学论述为基础发展哥德尔实在论所得的构成实在论

哥德尔对胡塞尔(E. Husserl)现象学¹⁶的浓厚兴趣是一个确定且一段时间以来广受讨论的事实(比如[19],第34页)。据王浩回忆,哥德尔至少从1959年开始曾倾注可观的精力阅读现象学著作,并曾推荐他阅读胡塞尔的《观念》(Ideas)和《笛卡尔式沉思》(Cartesian Meditations)等著作([15],第164页)。现象学研究的痕迹集中地体现在哥德尔的1961年讲稿《从哲学角度看数学基础的现代发展》(The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy)中(如[9],第371页)。遗憾的是,哥德尔的在现象学上的特殊兴趣和所投入精力落于文字的体现也仅限于他这篇生前未曾发表或宣讲的讲稿,未得进一步展开。蒂森(R. Tieszen)近年在《追随哥德尔》一书中以填补这个遗憾为任,“基于他(哥德尔)自己的哲学观点,以及特别是他如何运用胡塞尔的先验现象学,来给出一套支持关于逻辑和数学的实在论和莱布尼兹式理性主义的一般框架”,从而达到了一种他称之为“构成实在论”(constituted platonism)的主张。([14],第v、139页)他宣称这是一种既在最大限度上忠于哥德尔,又能站得住脚(特别是经受贝氏问题诘问)的实在论立场。

在本文的视野下,蒂森的构成实在论可以说是贯彻哥德尔的分层级的数学认识论的绝佳数学哲学实例。他的构成实在论不仅明确地将数学直观确认为一种非直接的高层级的认知行为,而且切实地在(胡塞尔)现象学的意义上支持了数学-科学平行论。在此,我将不得不在最低限度上描述我所关注和理解的构成实在论的主要论点,因为完整而准确地展开其构成实在论(如他著作所示)需要大量铺垫解释现象学那自成一套且望而生畏的术语体系并结合例子在这套体系内重构出哥德尔的思想,以至于至少需额外花费数篇文章的篇幅。因此还是建议感兴趣的读者自行参阅相关原著。

相较于经典的数学实在论-反实在论语境下争论数学对象是否(像物理对象那样)独立于人的心灵而存在从而静待我们去发现和认识,是否不随主观意愿而可被任意塑造,是否不随人类心灵的生灭而生灭,蒂森的构造实在论反转了对对象到现象的优先顺序,以向心灵¹⁷呈现的现象和它的思想行为为本位,把包括物

¹⁶本文4.2小节中出现的“现象学”一词与4.1小节中同一词语意味不同,见4.1小节开头的注释12。

¹⁷在此忽略现象学术语中一些关于“单子”“先验主体”等更精细的代指主体的术语而笼统地以“心灵”作主语。

理对象和数学对象在内的所有对象都视为因这些现象和行为（本身的指向性或说意向性）（intentionality）而被（有意识或无意识地）设定的产物。（比如见 [14], 第 97–98 页）

在构成实在论的立场下，尽管数学对象无法像经典的实在论所主张的那样被断定彻底脱离心灵而存在（蒂森称之为不能断定“心灵独立性₁”）。但相应地，该立场亦认为包括物理对象在内的其它所有对象也都被认为无法被断定可以彻底脱离心灵而存在，从而令数学对象和物理对象仍像经典实在论中那样具备同等程度的实在性。此外，虽然从根本上放弃了论证数学对象具备“心灵独立性₁”的可能性，蒂森认为我们仍能为它退守住“心灵独立性₂”，该性质大体上意味着围绕这些“独立的₂”对象的现象或说思想行为不能被任意地操纵而只能在很大程度上如其所是地被心灵所接受。（比如见 [14], 第 103、155–156 页）

那么数学直观在构成实在论的理论中又扮演什么角色呢？蒂森沿用胡塞尔的定义将直观理解为“意向（或说意图）的满足”（fulfillment of intention）。（[14], 第 100、157 页）我们刚刚提到构成实在论认为包括数学对象在内的所有对象都是现象和思想行为内在的“意向性”的设定。用胡塞尔经典的“曲绳”例子来解释，当我们看到一段弯曲的绳状物体时，我们便接收到了该现象，并开始了解释它的思想行为。我们或许会产生“这是一条蛇”的想法。该想法具有意向性，因而它能（设定并）指向某个对象。在此例，它特别地指向了“蛇”这一对象，也即它具备的是“指向蛇”这一意向。如果我们走近一步，从而更仔细地观看该绳状物体，我们所接收的更多现象或许会揭示它的确如我们之前所料是一条蛇，或许揭示它只是一段像蛇的麻绳。在前一种可能中，初始的“这是一条蛇”的意向便被做实或说“满足”了，而在后一种可能中，它便“落空”了，并很快被我们抛诸脑后。有关数学对象的直观亦然，并且来自直观的支撑对于围绕某对象展开的科学研究意义重大。（[14], 第 100 页）蒂森以 ZFC 集合论公理系统为例说明，倘若没有“层垒的集合观念”（the conception of iterative set）为该公理系统做直观上的支撑，那么该公理系统或许就只能沦为空洞的符号串演算并很快淡出数学研究实践的视野。（[14], 第 164 页）而且，蒂森延续了我们所强调的哥德尔分层级的数学认识论观点，把直观视为一种非直接的、高于材料层次的思想行为，即是说直观是“被奠基的”（founded）。（[14], 第 170 页）正如刚刚提到的“曲绳”一例那样，最终或验证或否决“这是一条蛇”的意向的直观实际上不同于混沌无定型的原始（感官）现象材料的输入，而是奠基于这些（“低层认知活动”）之上的高层思想行为。蒂森主张数学直观也应被理解作为一种奠基在更低层认知活动之上的思想行为（无论它所依赖的材料究竟是什么）。

最后，考虑到数学–科学平行论，经过以上介绍我们不难看出有关数学对象和

物理对象在对象设定本身（其存在依据）、心灵独立性₂、直观的作用方式上都是镜像般相似的。毫不意外的是，该平行论在蒂森著作中可以继续延伸到本文所没触及的对科学和数学的现象学分析的方方面面。（[14]，第170–171页）可以说，蒂森的现象学导向的构成实在论，以悬置整个旧有本体论框架的方式，悬置了（原版）贝氏问题中物理对象凭借实体和认知者间的相对明晰的因果关联所建立的相对于数学对象的优势，让物理对象和数学对象回到了被现象和思想行为意向性同时设定的同一起跑线。既然数学对象和物理对象都是被心灵（不完全自觉地）非任意地设定的对象，那么它们和心灵之间似乎也就不存在什么不可逾越的障碍了。

5 结语

在本文中我们分三阶段来抗衡本文称之为“直接接触论”的对于数学直观的流行解读，重新强调了哥德尔认为数学直观并非必须被理解为一种“直接”知识的重要观点。第一阶段，我们简要回顾了“直接接触论”之所以占据主流的一些背景。第二阶段，我们参考哥德尔原文说明他的数学对象认识论概念事实上可以被分为“材料”“感知”“直观”三个层次，其中“直观”是最高最不直接的一个层次。第三阶段，我们以专家直观、构成实在论这两个近年来的数学哲学研究主题为例展示了坚持哥德尔的非直接的数学直观理解在哲学上丰富的发展空间，从而证实坚持这一区分事实上是有意义的。

最后还应补充的是，本文意在抗衡“直接接触论”而非直接否定这种解读，或者更主要的是否定这种解读背后的关于想要探求我们如何获得数学知识的哲学和科学问题的合理性和可行性。就像哥德尔也曾对“我们如何接收或产生支撑数学的基本材料”感到好奇，并猜测我们或许有专门的官能承担这一功能并且和处理语言的官能紧密联系在一起。本文所倾向的态度或许更接近于王浩抗衡归约主义（reductionist）的想法：尽管我们对数学对象（甚至物理对象也是）的认识过程的底层机制的知识还远不足以将这些过程归约为一些物理–化学过程，从而对该认识过程的真实性、可靠性给出公允的评判（[16]，第3–4页），可是我们也应当看到，至少在不那么基础的层次，在我们能意识到的现象范围内，数学和自然科学有着包括客观性在内的颇多无法否认的相似性。而在数学实践已展现出来的现象层面倾注更多精力，用理解关于某客观对象的自然科学的方式来理解数学，或有望能在一般的数学哲学或更特定的公理辩护问题上产生出不少洞见。哪怕有朝一日，认知科学的进展真能（像反实在论者所期望的那样）完全令人信服地否定包括数学直观在内的所有抽象直观的真实性，我想这些数学–科学之间现象层面的类比研究所观察出的模式以及总结出的方法论也不至于轰然倒塌，正如牛顿力学

所描述的现象的规律并未被相对论彻底摧毁，而是更多被更精确地再解释。¹⁸也正如王浩所言，“上层建筑”（super structure）自有相对于多种可能的下层基础的稳定性。

参考文献

- [1] P. Benacerraf, 1983, “Mathematical truth”, in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.), *Interpreting Gödel: Critical Essays*, pp. 403–420, New York: Cambridge University Press.
- [2] E. Chudnoff, 2019, “In search of intuition”, *Australasian Journal of Philosophy*, **98**(3): 465–480.
- [3] J. Folina, 2014, “Gödel on how to have your mathematics and know it too”, in J. Kennedy (ed.), *Interpreting Gödel: Critical Essays*, pp. 32–56, Cambridge: Cambridge University Press.
- [4] K. Gödel, 1990, *Kurt Gödel, Collected Works Volume II: Publications 1938–1974*, New York: Oxford University Press.
- [5] K. Gödel, 1990, “Russell’s mathematical logic (1944)”, in J. W. Dawson, S. C. Kleene *et al.* (eds.), *Kurt Gödel, Collected Works Volume II: Publications 1938–1974*, pp. 119–143, New York: Oxford University Press.
- [6] K. Gödel, 1990, “What is Cantor’s continuum problem? (1947/1964)”, in J. W. Dawson, S. C. Kleene *et al.* (eds.), *Kurt Gödel, Collected Works Volume II: Publications 1938–1974*, pp. 176–188, 254–270, New York: Oxford University Press.
- [7] K. Gödel, 1995, *Kurt Gödel, Collected Works Volume III: Unpublished Essays and Lectures*, New York: Oxford University Press.
- [8] K. Gödel, 1995, “Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”, in S. Feferman *et al.* (eds.), *Kurt Gödel, Collected Works Volume III: Unpublished Essays and Lectures*, pp. 304–323, New York: Oxford University Press.
- [9] K. Gödel, 1995, “The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy”, in S. Feferman *et al.* (eds.), *Kurt Gödel, Collected Works Volume III: Unpublished Essays and Lectures*, pp. 374–387, New York: Oxford University Press.
- [10] J. Hawthorne, 2021, “Inductive logic”, in E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2021 Edition), <https://plato.stanford.edu/archives/spr2021/entries/logic-inductive/>, Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- [11] I. Kant, 1998, *Critique of Pure Reason*, in P. Guyer and A. W. Wood (trans. & eds.), Cambridge: Cambridge University Press.
- [12] P. Mancosu, 2008, “Introduction”, in P. Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, pp. 1–20, New York: Oxford University Press.

¹⁸此外，即便反实在论如数学虚构主义（fictionalism of mathematics），也无法否认数学对象“有用”以及“可被设定为科学对象加以研究”的现象层面事实。比如见〔20〕，第2页。

-
- [13] C. Parsons, 2008, *Mathematical Thought and Its Objects*, New York: Oxford University Press.
- [14] R. Tieszen, 2011, *After Gödel: Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic*, New York: Oxford University Press.
- [15] H. Wang, 2011, *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, Cambridge, MA: MIT Press.
- [16] H. Wang, 2016, *From Mathematics to Philosophy*, New York: Routledge.
- [17] W. Wrigley, 2021, “Gödelian platonism and mathematical intuition”, *European Journal of Philosophy*, **30(2)**: 578–600.
- [18] 高坤, “数学柏拉图主义的认识论问题”, 自然辩证法研究, 2021 年第 8 期, 第 109–114 页。
- [19] 郝兆宽, “重审哥德尔思想”, 科学·经济·社会, 2021 年第 2 期, 第 32–38 页。
- [20] 叶峰, “数学理论与虚构作品”, 科学技术哲学研究, 2020 年第 3 期, 第 1–6 页。

(责任编辑: 映之)

Mediated Intuition: On Gödel's Concept of “Mathematical Intuition”

Pengshu Shan

Abstract

In contemporary philosophy of mathematics literature, “mathematical intuition” is quite often construed as an process to receive appearance immediately (or an ability to do so, or resultant of it), which I call “immediate contact view”. In this article, I aim to emphasis another neglected way for understanding the concept “mathematical intuition” based on a close reading of works by K. Gödel and Hao Wang, i.e. “mathematical intuition needs not to be understood as an immediate knowledge”. Firstly I reflects on a few factors leading to the actual prevalence of “immediate contact view”. Then I analyse Gödel's epistemology on mathematical object roughly into a three-strata structure, with evidence from original texts by Gödel and testimony from Hao Wang, and so argues for the mediated interpretation of mathematical intuition. Futhermore I take “expert intuition” and “constituted platonism” as two examples, two recent approaches with varied origins and concerns in philosophy of mathematics, so as to show that the mediated interpretation contains rich potential for further theoretical development and allows a arguably more faithful reading on Gödel's thoughts.