

基于广义框架的概率认知逻辑

邓美林

郭美云

摘要: 概率认知逻辑将认知和概率推理融合到同一个逻辑框架中。本文提出了一个基于广义框架的概率认知模型, 并讨论了这一模型与已有两种概率认知模型的关系。基于广义框架的概率认知模型能为任意概率认知逻辑公式指派概率, 因而是一种比较理想的概率认知逻辑语义模型。本文给出了一个可靠且完全的概率认知逻辑公理系统, 提出并证明了概率函数存在引理, 进而给出了这一逻辑的完全性证明。最后, 本文运用这一逻辑刻画了混合策略博弈的两种状态, 为进一步讨论混合策略博弈奠定了基础。

关键词: 概率认知逻辑; 广义框架; 认知逻辑; 概率逻辑; 概率指派

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 引言

概率认知逻辑最早由费金 (R. Fagin) 和哈尔彭 (J. Y. Halpern) 在 [7] 中提出, 他们将概率公理结合到认知逻辑中, 提出了概率认知逻辑的公理化系统, 讨论了完全性, 可判定性和模型的一些特殊性质。巴尔塔格 (A. Baltag)、范·本特姆 (J. van Benthem)、库伊 (B. P. Kooi) 等人分别在 [2, 3, 9] 中推进了概率认知逻辑在概率认知动态化方面的研究, 并提出了另一种概率指派方法。概率认知逻辑语义模型可以据其关于概率指派的不同方法概括为两种¹: 将概率函数建立在概率空间上的概率空间认知模型, 文献 [1, 5, 7, 11] 采用了这种方法; 将概率函数建立在每一个可能世界上的离散概率认知模型, 文献 [2, 3, 5, 9] 采用了这种方法。

收稿日期: 2022-02-31; 修订日期: 2022-05-23

作者信息: 邓美林 西南大学逻辑与智能研究中心
mldeng_phi@126.com

郭美云 西南大学逻辑与智能研究中心
guomy007@swu.edu.cn

基金项目: 国家社科基金重点项目“概率更新的动态认知逻辑研究”(21AZX013); 西南大学创新研究 2035 先导计划 (SWUPilotPlan030)。

致谢: 感谢第 15 届全国现代逻辑学术研讨会的三位评审专家提出的详细审稿意见, 感谢熊作军老师在讨论班上提供的帮助, 感谢李小五老师和王轶老师在第 15 届全国现代逻辑学术研讨会上提出的建议。

¹这两类模型分别对应于由德米 (L. Demey) 和萨科 (J. Sack) 在文献 [5] 中提出的 probabilistic relational model 和 simplified probabilistic relational model。

采用概率空间认知模型的做法无法保证所有公式都被指派概率。因而如果所有给定的命题都有概率, 概率空间认知模型就不能恰当地刻画这种情形下的概率推理。为了让模型能够为给定语言中的所有公式指派概率, 文献 [7] 定义了一个关于原子命题和三个关于概率函数的特殊性质², 前者使得所有命题逻辑公式是可测的, 后者使得认知逻辑公式和概率公式是可测的。但是就模型的可测问题而言, 这一方案中的限定过强了。文献 [5] 注意到广义框架中可允许赋值集与 σ -代数³ 的共通点, 并据这一共通点提供了一个更好的方案。但是为了解决概率公式的可测问题, 这一方案给出的定义过于繁琐, 模型构造的可操作性不强。离散概率认知模型为每个可能世界指派概率, 因而不存在概率公式的可测问题。但离散概率认知模型不能在可数无穷多个世界的情形下为所有世界指派相等的概率。⁴

文献 [4] 给出的广义框架中关于可允许赋值集的定义与概率空间中的 σ -代数的定义相似。广义框架的英文表述为 **general frame**, 可允许赋值集的英文表述为 **set of admissible valuations**。可允许赋值集对运算封闭性的要求在一定程度上可以解决 [7] 指出的公式不可测问题, 同时它又能解决离散概率认知模型面临的问题。因此, 我们尝试用广义框架代替普通框架, 并将概率指派到可允许赋值集上。我们给出了一个可靠且完全的概率认知逻辑公理系统并表明这一逻辑适用于谈论混合策略博弈。

本节以后的内容安排如下: 第二节介绍基于广义框架的概率认知逻辑的语言、语义和公理系统 PELG (Probabilistic Epistemic Logic based on General frame), 并通过模型比较, 明确了基于广义框架的概率认知模型的优势; 第三节证明 PELG 的可靠性和完全性; 第四节运用基于广义框架的概率认知模型刻画混合策略博弈的两种状态; 第五节总结本文的主要工作和一些有待研究的问题。

2 基于广义框架的概率认知逻辑 PELG

2.1 PELG 语言

定义 2.1 (形式语言 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$). 令 At 表示原子命题集, Ag 表示有穷主体集, 概率认知逻辑公式 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ 定义如下。

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \varphi) \mid K_i\varphi \mid (a_1P_i(\varphi_1) + a_2P_i(\varphi_2) + \cdots + a_nP_i(\varphi_n) \geq b)$$

其中, $a_1, \dots, a_n$ 和 b 是任意有理数, $a_1P_i(\varphi_1) + a_2P_i(\varphi_2) + \cdots + a_nP_i(\varphi_n) \geq b$

²参考文献 [7] 的引理 3.1, 其中的四个特殊性质分别为 PMEAS, CONS, OBJ 和 UNIF。

³集合 X 的 σ -代数是一个包含 X , 对补运算和可数并运算封闭的 X 的子集的集合。

⁴假设可能世界集是可数无穷的, 令主体 i 在世界 w 上给每个可能世界指派概率为 $\frac{1}{\epsilon}$, $\sum_{n=1}^{\epsilon+1} \mu_{i,w}(w_n) = 1 + \frac{1}{\epsilon}$, 而这与 $\sum_{u \in W} \mu_{i,w}(u) = 1$ 这一要求相矛盾。

是基本概率公式, 表示主体关于 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 的概率。据定义, $P_i(\varphi) \geq b$ 是概率公式, 表示在主体 i 看来, φ 的概率大于等于 b 。 $P_i(\varphi_1) \geq P_i(\varphi_2)$ 也是概率公式, 表示在主体 i 看来, φ_1 的概率大于等于 φ_2 的概率。我们称 $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k)$ 为项, 记为 t , 当括号在公式最外层时, 通常略去不写。

如下 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ 公式都可通过以上公式得到定义: $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \leftrightarrow \psi, \top, \perp, \hat{K}_i \varphi, t \leq b, t < b, t > b, t_1 \geq t_2, t_1 \leq t_2, t_1 < t_2, t_1 = t_2, t_1 > t_2$ 。

2.2 基于广义框架的概率认知模型

定义 2.2 (模型). 给定有穷主体集 Ag 和命题逻辑原子公式集 At , 一个基于广义框架的概率认知模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R_i, \mathbb{A}, \mu, V \rangle_{i \in Ag}$, 其中 W 是非空的可能世界集, R_i 是主体 i 的认知可及关系 (等价关系), $\mathbb{A} \subseteq \wp(W)$ 是可允许赋值集, 即 $\mathbb{A}$ 是非空集且满足:

1. $X \in \mathbb{A} \Rightarrow W \setminus X \in \mathbb{A}$;
2. $X_1, X_2, \dots \in \mathbb{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \in \mathbb{A}$; ⁵
3. $X \in \mathbb{A} \Rightarrow m_{K_i}(X) \in \mathbb{A}$, 其中 $m_{K_i}(X) = \{w \in W \mid R_i[w] \subseteq X\}$, 这里 $R_i[w] = \{w' \in W \mid R_i w w'\}$ 。

$V : At \rightarrow \mathbb{A}$ 是命题逻辑原子公式赋值函数, 我们称之为可允许赋值, $\mu : Ag \times W \rightarrow (\mathbb{A} \rightarrow [0, 1])$ 是概率函数, 为每一个主体 i 在每个世界 w 上给 $\mathbb{A}$ 中的每个世界集指派一个 0 到 1 区间上的有理数, 使得

1. $\mu_{i,w}(W) = 1$;
2. 对于任意 $X_1, X_2, \dots \in \mathbb{A}$, 如果对于任意 $X_j \neq X_k$, 都有 $X_j \cap X_k = \emptyset$, 那么 $\mu_{i,w}(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{i,w}(X_j)$;
3. 对于任意 $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{A}$, $\{w \in W \mid \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mu_{i,w}(X_k) \geq b\} \in \mathbb{A}$, 其中 $n \geq 1, a_k, b \in \mathbb{Q}$ 。

$\langle W, R_i, \mathbb{A}, \mu \rangle_{i \in Ag}$ 是一个概率认知广义框架, 记为 $\mathcal{F}$, 我们称 $\langle W, \mathbb{A} \rangle$ 是一个可测空间, 称 $\langle W, \mathbb{A}, \mu \rangle$ 是一个测度空间。在以下行文中, 在不引起混淆的情况下, 概率认知模型都是指基于广义框架的概率认知模型。

关于可允许赋值集 $\mathbb{A}$ 的三个条件分别表明, 可允许赋值集关于补运算、并运算、模态运算封闭。概率函数的前两个条件是对概率的一般性要求。概率函数的第三个条件表明, 如果对于任意 W 的子集 W' , 任意 $X \in \mathbb{A}$ 和任意 $w, u \in W'$,

⁵此处定义的可允许赋值集对可数并运算封闭, 是对广义框架中的有穷并运算封闭条件的推广, 广义框架的定义可参见文献 [4] 第 29 页。如果一个集合对可数并运算封闭, 那么它一定对有限并运算封闭。

都有 $\mu_{i,w}(X) = \mu_{i,u}(X)$, 那么, $W' \in \mathbb{A}$ 。⁶ 换言之, 可允许赋值集关于概率运算也是封闭的。

定义 2.3 (语义). 给定概率认知模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R_i, \mathbb{A}, V, \mu \rangle_{i \in Ag}$, 对于任意世界 $w \in W$, $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式在点模型 $(\mathfrak{M}, w)$ 上为真记为 $\mathfrak{M}, w \models \varphi$, 定义如下。

- $\mathfrak{M}, w \models p$ 当且仅当 $w \in V(p)$;
- $\mathfrak{M}, w \models \neg \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$;
- $\mathfrak{M}, w \models \varphi \vee \psi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ 或 $\mathfrak{M}, w \models \psi$;
- $\mathfrak{M}, w \models K_i \varphi$ 当且仅当对于任意 $w' \in W$, 如果 $R_i w w'$, 那么 $\mathfrak{M}, w' \models \varphi$;
- $\mathfrak{M}, w \models \sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 当且仅当 $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \mu_{i,w}(\llbracket \varphi_k \rrbracket^{\mathfrak{M}}) \geq b$ 。

给定概率认知模型 $\mathfrak{M}$, 我们定义 φ 在模型 $\mathfrak{M}$ 中有效当且仅当对于任意 $w \in W$, $\mathfrak{M}, w \models \varphi$, 记为 $\mathfrak{M} \models \varphi$ 。给定概率认知广义框架 $\mathcal{F} = \langle W, R_i, \mathbb{A}, \mu \rangle_{i \in Ag}$, 如果对于任意 $\mathfrak{M} = \langle W, R_i, \mathbb{A}, \mu, V \rangle_{i \in Ag}$, 都有 $\mathfrak{M} \models \varphi$, 那么我们称 φ 在概率认知广义框架 $\mathcal{F}$ 上有效, 记为 $\mathcal{F} \models \varphi$ 。如果对于任意概率认知广义框架 $\mathcal{F}$, 都有 $\mathcal{F} \models \varphi$, 我们称 φ 在概率认知广义框架类上有效, 记为 $\models \varphi$ 。我们用 $\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$ 表示并非 $\mathfrak{M}, w \models \varphi$, 即 φ 在点模型 $(\mathfrak{M}, w)$ 上不为真。在概率认知模型中, 检验一个公式的概率的前提是这一公式在模型中有概率, 即公式在模型中可测 (Measurable)。

定义 2.4 (可测). 给定概率认知模型 $\mathfrak{M}$, 令 $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathfrak{M}} = \{w \mid \mathfrak{M}, w \models \varphi\}$ 表示公式 φ 的外延, 一个 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式 φ 在 $\mathfrak{M}$ 中是可测的当且仅当 $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathfrak{M}} \in \mathbb{A}$ 。

定理 2.1. 所有 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式在概率认知模型中都是可测的。

对 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式的结构进行归纳易证定理 2.1。概率认知模型定义表明, 可允许赋值集关于补运算、并运算、模态运算的封闭性要求, 分别对应于公式的否定、公式的合取以及公式的模态。命题逻辑原子公式赋值函数保证了所有给定的命题逻辑原子公式的外延都在可允许赋值集中。再据以上封闭性条件, 可得所有据给定的命题逻辑原子公式生成的 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -认知公式 (不含概率公式) 的外延都在可允许赋值集中。

可允许赋值集同时也是 σ -代数, 由可能世界集、可允许赋值集和概率函数组成一个概率测度空间 $\langle W, \mathbb{A}, \mu \rangle$ 。概率函数为 σ -代数即可允许赋值集中的每一个元素指派概率。因此, 所有给定的 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -认知公式的外延都被指派了概率。再据概率函数的第三个条件可知, 所有 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -概率公式的外延也都在可允许赋值集中, 这使得所有 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式的外延都被指派了概率, 据定义 2.4 可知, 所有 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式都是可测的。因而定义 2.3 是良定义的。

⁶如果对于任意 $w, u \in W'$, 都有 $\mu_{i,w}(X) = \mu_{i,u}(X)$, 那么, 对于任意 $a_k, b \in \mathbb{Q}$, $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \mu_{i,w}(X_k) \geq b$ 当且仅当 $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \mu_{i,u}(X_k) \geq b$, 因此, 据概率函数的第三个条件, $\{w \in W \mid w \in W'\} \in \mathbb{A}$, 即 $W' \in \mathbb{A}$ 。

[5] 提出了一个广义 σ -代数⁷, 但没有明确地定义出基于广义框架的概率认知模型。据命题 2.2 可知, 这一方案所定义的模型等价于本文定义的概率认知模型。相对而言, 本文定义的概率认知模型更为简洁、易于构造。此外, 基于广义框架的概率认知模型由于保留了概率空间的性质而能够在可能世界集是可数无穷的情况下为不同的世界子集指派均等概率。

需要指出, 本文没有对模型中的广义框架做具体限定, 且普通框架⁸是广义框架的特例。在本文的基础上, 可以定义一类具有某些特性的广义框架, 从而扩充概率认知逻辑公理系统。[4] 主要从可允许赋值集的角度定义了几类广义框架 (第 30、第 308 页), 比如限定可允许赋值集包含所有有穷集和余有穷集 (co-finite)、令可允许赋值集是可区分的 (differentiated) 等等。此外, 还可以定义一些特殊的概率函数, 进而讨论知识与概率、信念与概率的互动关系。⁹

2.3 模型的比较

[5] 比较了概率模型和离散概率模型, 并指出离散概率模型是概率模型的特例。令 $\mathfrak{M} = \langle W, \nu, V \rangle$ 是一个离散概率模型, 其中 ν 是一个概率函数, 在每个世界上为每个世界指派一个概率。令 $\{\nu^+(X) = \sum_{x \in X} \nu(x) \mid X \in \wp(W)\}$, 那么 $\mathfrak{M}^+ = \langle W, \wp(W), \nu^+, V \rangle$ 是一个由离散概率模型 $\mathfrak{M}$ 生成的概率模型。¹⁰ 同理可得, 离散概率认知模型是概率空间认知模型的特例。本文定义的概率认知模型是第三种模型, 因此有必要讨论一下三者的关系, 本文从模型等价的角度展开讨论。

定义 2.5. 任给概率认知模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -等价的, 若对于任意 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式 φ , $\mathfrak{M} \models \varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}' \models \varphi$, 记为 $\mathfrak{M} \rightsquigarrow \mathfrak{M}'$ 。

离散概率认知模型的概率指派和概率运算都比较简单。[9] 最早定义了离散概率认知模型, 用以讨论概率动态认知逻辑。¹¹ 由于离散概率认知模型的定义相对简单, 本文只给出离散概率认知模型与基于广义框架的概率认知模型的一个比较结果, 有兴趣的读者可参考文献 [3] 的定义 1、[5] 的定义 4.4 和 [9] 的定义 1。事实上, 离散概率认知模型是基于广义框架的概率认知模型的一个特例, 当可允许

⁷即 general σ -algebra, 参考文献 [5] 定义 4.6。

⁸普通框架指的是 $\langle W, R \rangle$, 当可允许赋值集 $\mathbb{A} = \wp(W)$ 时, $\langle W, R, \mathbb{A} \rangle$ 就是一个普通框架。

⁹为了刻画某种知识与概率的互动, 可以对概率函数作如下要求: 对于任意 $X \in \mathbb{A}$, $R_i[w] \subseteq X$, 当且仅当 $\mu_{i,w}(X) = 1$, 可以称这一性质为“知识-概率一致性”。

¹⁰关于概率模型与离散概率模型、概率空间认知模型和离散概率认知模型的关系的详细讨论参考文献 [5] 第 4.2.1 节和 4.5.1 节。

¹¹在动态的概率认知逻辑中通常都采用这一模型, [9] 运用这一模型讨论了三门问题¹², [2] 运用这一模型讨论了信息瀑布 (informational cascade)。信息瀑布的详细讨论参考文献 [2] 第 3 节。

¹²三门问题即蒙提霍尔问题 (the Monty Hall Dilemma), 参考 [9], 6.2 节。

赋值集 $\mathbb{A} = \wp(W)$ 时, 这样的基于广义框架的概率认知模型就等价于一个离散概率认知模型。

在概率认知模型中, 我们将概率指派给可允许赋值集中的元素, 而不再为每一世界构造一个概率空间, 但是每个世界上的概率指派却可以是不同的。也就是说, 我们预设主体在每一个可能世界上都有一个相同的可测空间, 但并不预设主体在每一个可能世界上具有相同的测度空间。因此, 概率空间认知模型在每个世界上建立一个概率空间的要求实质上可以通过概率指派来实现。我们通过命题 2.2 表明, 如果所有给定命题的概率都是可测的, 那么采用基于广义框架的概率认知模型来定义语义更为简洁, 而这一模型与概率空间认知模型具有同等的刻画能力。

定义 2.6 (概率空间认知模型). 给定有穷主体集 Ag 和命题逻辑原子公式集 At , 概率空间认知模型 $\mathfrak{M}_u$ 是一个四元组 $\langle W, R_i, \mathbb{P}, V \rangle_{i \in Ag}$, 其中 W 是非空的可能世界集, R_i 是主体 i 的认知可及关系 (等价关系), $V : At \rightarrow \wp(W)$ 是命题逻辑原子公式赋值函数, $\mathbb{P}_{i,w} = \langle S_{i,w}, \mathcal{A}_{i,w}, \xi_{i,w} \rangle$ 是概率空间, 其中:

- $S_{i,w} \subseteq W$ 是主体 i 在世界 w 上的样本空间;
- $\mathcal{A}_{i,w}$ 是 $S_{i,w}$ 上的 σ -代数;
- $\xi_{i,w} : \mathcal{A}_{i,w} \rightarrow [0, 1]$ 是主体 i 在世界 w 上的概率函数, 使得 $\xi_{i,w}(S_{i,w}) = 1$, 且对于任意 $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{A}_{i,w}$, 如果对于任意 $X_i \neq X_j$, 都有 $X_i \cap X_j = \emptyset$, 那么 $\xi_{i,w}(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{i,w}(X_i)$ 。

定义 2.7. 概率空间认知模型 $\mathfrak{M}_u$ 具有可测性当且仅当存在 $\wp(W)$ 上的 σ -代数 $\mathcal{A}$, 使得 $V : At \rightarrow \mathcal{A}$, 并且对于任意 $i \in Ag$, 任意 $w \in W$,

- 如果 $X \in \mathcal{A}$, 那么 $m_{K_i}(X) \in \mathcal{A}$;
- 对于任意 $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$, $\{w \in W \mid \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mu_{i,w}(X_k \cap S_{i,w}) \geq b\} \in \mathcal{A}$, 其中 $n \geq 1$, $a_k, b \in \mathbb{Q}$;
- $\{S_{i,w} \cap X \mid X \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}_{i,w}$ 。

概率空间认知模型的可测性定义最早出现在 [5] 的定义 4.6, [5] 定义的广义 σ -代数 $\mathcal{A}$ 只能保证命题逻辑公式和认知逻辑公式是可测的, 为了使得概率公式在模型中是可测的, [5] 对概率空间 $\mathbb{P}_{i,w}$ 做了限定。与此不同, 定义 2.7 将类似的限定增加到广义 σ -代数的定义中。

我们将具有可测性的概率空间认知模型记为 $\mathfrak{M}_u^{meas}$ 。公式 φ 在 $\mathfrak{M}_u^{meas}$ 中是可测的当且仅当 $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathfrak{M}_u^{meas}} \in \mathcal{A}$, 且对于任意 $\mathcal{A}_{i,w}$, $S_{i,w} \cap \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathfrak{M}_u^{meas}} \in \mathcal{A}_{i,w}$ 。在具有可测性的概率空间认知模型中, 概率公式的语义定义如下:

$\mathfrak{M}_u^{meas}, w \models \sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 当且仅当 $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \xi_{i,w}(S_{i,w} \cap \llbracket \varphi_k \rrbracket^{\mathfrak{M}_u^{meas}}) \geq b$ 。
易证如下两个命题成立。命题 2.2 表明, 任意具有可测性的概率空间认知模型都

等价于一个基于广义框架的概率认知模型。

命题 2.1. 所有 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式在具有可测性的概率空间认知模型 $\mathfrak{M}_u^{\text{meas}}$ 中都是可测的。

命题 2.2. 任给 $\mathfrak{M}_u^{\text{meas}} = \langle W, R_i, \mathcal{A}, \mathbb{P}, V \rangle_{i \in Ag}$, 令 $\mathfrak{M}' = \langle W', R'_i, \mathbb{A}, \mu, V' \rangle_{i \in Ag}$ 是一个基于广义框架的概率认知模型, 使得 $W' = W$, $R'_i = R_i$, $\mathbb{A} = \mathcal{A}$, $V' = V$, 且对于任意 $X \in \mathbb{A}$ 和 $S_{i,w} \cap X \in \mathcal{A}_{i,w}$, $\mu_{i,w}(X) = \xi_{i,w}(S_{i,w} \cap X)$, 则 $\mathfrak{M}_u^{\text{meas}}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是等价的, 记为 $\mathfrak{M}_u^{\text{meas}} \rightsquigarrow \mathfrak{M}'$ 。

概率空间认知模型要求在每一个可能世界上为每一个主体构造一个概率空间 $\mathbb{P}_{i,w}$, 相应地, 概率公式的语义定义要求为公式 φ 的外延 $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathfrak{M}}$ 与一个样本空间 $S_{i,w}$ 构成的交集 $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathfrak{M}} \cap S_{i,w}$ 指派概率。在基于广义框架的概率认知模型中, 概率指派针对的是可允许赋值集中的元素, 因而不用考虑不同的概率空间问题, 概率被指派给每个公式的外延, 而不用再求交集。并且, 命题 2.2 表明, 如果给定命题的概率都是可测的, 那么基于广义框架的概率认知模型与概率空间认知模型具有同等的刻画能力。

2.4 PELG 公理系统

定义 2.8 (PELG 公理系统). PELG 是一个包含如下公理模式和变形规则的证明系统。

Taut 所有经典命题逻辑重言式例示

- | | | |
|-----------|--|--------|
| K1 | $K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$ | 认知分配公理 |
| K2 | $K_i\varphi \rightarrow \varphi$ | 认知真公理 |
| K3 | $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$ | 正自省公理 |
| K4 | $\neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi$ | 负自省公理 |
| I1 | $(\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b) \leftrightarrow$
$(\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) + 0 P_i(\varphi_{n+1}) \geq b)$ | 零项公理 |
| I2 | $(\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b) \rightarrow (\sum_{k=1}^n a_{j_k} P_i(\varphi_{j_k}) \geq b)$ | 排列公理 |
| I3 | $(\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b) \wedge (\sum_{k=1}^n a'_k P_i(\varphi_k) \geq b') \rightarrow$
$(\sum_{k=1}^n (a_k + a'_k) P_i(\varphi_k) \geq b + b')$ | 加项公理 |
| I4 | $(\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b) \leftrightarrow$
$(\sum_{k=1}^n d a_k P_i(\varphi_k) \geq db) (d > 0)$ | 乘法公理 |
| I5 | $(t \geq b) \vee (t \leq b)$ | 二分法公理 |
| I6 | $(t \geq b) \wedge (b \geq c) \rightarrow (t \geq c)$ | 传递性公理 |

W1	$P_i(\varphi) \geq 0$	非负性公理
W2	$P_i(\top) = 1$	规范性公理
W3	$(P_i(\varphi \wedge \psi) = 0) \rightarrow (P_i(\varphi \vee \psi) = P_i(\varphi) + P_i(\psi))$	可加性公理
MP	$\vdash \varphi \rightarrow \psi, \vdash \varphi \Rightarrow \vdash \psi$	分离规则
NK	$\vdash \varphi \Rightarrow \vdash K_i \varphi$	认知必然化规则
R1	$\vdash t = t' \Rightarrow \vdash \varphi(t) \leftrightarrow \varphi(t'/t)$	等量代换规则
R2	$\vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash P_i(\psi) \geq P_i(\varphi)$	概率蕴涵规则

本文用 $\vdash_{\text{PELG}} \varphi$ 表示 φ 在 PELG 中是可演绎的, 也称 φ 是 PELG 的定理。PELG 中 φ 的一个演绎指的是一个有穷长度的公式序列, 序列最后的公式是 φ , 序列中的任一公式或者是 PELG 的公理, 或者是运用 PELG 的某一规则从序列中前面的公式得到的。在不引起混淆的情况下, 我们都用 $\vdash$ 表示 $\vdash_{\text{PELG}}$ 。

易证如下命题:

命题 2.3. PELG 定理和导出规则:

1. $P_i(\perp) = 0$;
2. $P_i(\neg\varphi) = 1 - P_i(\varphi)$;
3. $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \vdash P_i(\varphi) = P_i(\psi)$ 。

3 可靠性和完全性

定理 3.1 (可靠性). 对于任意 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式 φ , $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$ 。

据语义定义, 可证所有 PELG-公理在任意概率认知模型 $\mathfrak{M}$ 中是有效的, 所有 PELG-规则在概率认知模型 $\mathfrak{M}$ 中保持有效性。¹³ 可参考 [6–8] 中的相关证明, 由于篇幅所限, 这里略去证明。

定义 3.1 (闭包). 任给 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式 φ , φ 的闭包 $cl(\varphi)$ 指的是使得 $\varphi \in cl(\varphi)$ 且满足如下条件的最小公式集:

- 如果 $\psi \in cl(\varphi)$, 那么 $Sub(\psi) \in cl(\varphi)$; ¹⁴
- 如果 $\psi \in cl(\varphi)$ 并且 ψ 不是一个形如 $\neg\varphi$ 的公式, 那么 $\neg\psi \in cl(\varphi)$ 。

定义 3.2 (Φ 的极大一致集). 令 Φ 为某 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式的闭包, Γ 是 Φ 的极大一致集当且仅当 $\Gamma \subseteq \Phi$, $\Gamma \not\vdash \perp$, 且如果 $\Gamma' \subseteq \Phi$ 且 $\Gamma \subset \Gamma'$, 那么 $\Gamma' \vdash \perp$ 。

¹³一个规则保持有效性当且仅当据这一规则从有效式只能推出有效式。

¹⁴ $Sub(\varphi)$ 表示 φ 的所有子公式的集合。

定义 3.3 (典范模型). 令 Φ 为任意 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式的闭包, Φ 的典范模型 $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, R_i^c, \mathbb{A}^c, \mu^c, V^c \rangle_{i \in Ag}$, 满足

- $W^c = \{w_c \mid w_c \text{ 是 } \Phi \text{ 的极大一致集}\};$
- $R_i^c w_c u_c$ 当且仅当 $\{K_i \varphi \mid K_i \varphi \in w_c\} = \{K_i \varphi \mid K_i \varphi \in u_c\};$
- $\mathbb{A}^c = \wp(W^c);$ ¹⁵
- $\mu^c : Ag \rightarrow (W^c \rightarrow (\mathbb{A}^c \rightarrow [0, 1]))$, 使得 $\mu_{i, w_c}^c(W^c) = 1$, 且满足
 1. 对于任意 $X_1, X_2, \dots \in \mathbb{A}^c$, 如果对于任意 $X_j \neq X_k$, $X_j \cap X_k = \emptyset$, 那么 $\mu_{i, w_c}^c(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{i, w_c}^c(X_j);$
 2. 对于任意 $X_k \in \mathbb{A}^c$, 如果 $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{A}^c$, 那么 $\{w_c \in W^c \mid \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mu_{i, w_c}^c(X_k) \geq b\} \in \mathbb{A}^c$, 其中 $n \geq 1$, $a_k, b \in \mathbb{Q};$
 3. 对于 Φ 中公式 $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b$, 如果 $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \in w_c$, 则令 $\sum_{w'_c \in W^c} c_{w'_c} \mu_{i, w_c}(\{w'_c\}) \geq b$; 如果 $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) < b \in w_c$, 则令 $\sum_{w'_c \in W^c} c_{w'_c} \mu_{i, w_c}(\{w'_c\}) < b$, 其中 $c_{w'_c}$ 是一个系数。
- $V^c(p) = \{w_c \in W^c \mid p \in w_c\}.$

引理 3.1 (林登鲍姆 (Lindenbaum) 引理). 令 Φ 为任意一个 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式的闭包, 任意 Φ 的一致子集都可以生成一个 Φ 的极大一致集。

证明与经典认知逻辑相似, 参考 [6], 此处略去证明。

命题 3.1. 令 Φ 为某 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式的闭包, $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, R_i^c, \mathbb{A}^c, \mu^c, V^c \rangle_{i \in Ag}$ 为 Φ 的典范模型, w_c, u_c 是 W^c 中的极大一致集, 以下命题均成立:

1. w_c 是演绎封闭的: 对于任意 $\varphi \in \Phi$, 如果 $\vdash w_c \rightarrow \varphi$, 那么 $\varphi \in w_c$;
2. 如果 $\varphi \in \Phi$, 那么 $\varphi \in w_c$ 当且仅当 $\neg \varphi \notin w_c$;
3. 如果 $\varphi \vee \psi \in \Phi$, 那么, $\varphi \vee \psi \in w_c$ 当且仅当 $\varphi \in w_c$ 或 $\psi \in w_c$;
4. 如果 $K_i \psi \in \Phi$, 那么 $\{K_i \varphi \mid K_i \varphi \in w_c\} \vdash \psi$ 当且仅当 $\{K_i \varphi \mid K_i \varphi \in w_c\} \vdash K_i \psi$;
5. 令 $\bigwedge w_c, \bigwedge u_c$ 分别为 w_c, u_c 中所有公式的合取, 如果 $w_c \neq u_c$, 那么 $\vdash \bigwedge w_c \rightarrow \neg \bigwedge u_c$;
6. 令 $\bigwedge w_c$ 为 w_c 中所有公式的合取, 对于任意一致的 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式 $\psi \in \Phi$, $\vdash \psi \leftrightarrow \bigvee_{\{w_c \in W^c \mid \psi \in w_c\}} \bigwedge w_c$;
7. 任给一致的 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式 $\psi \in \Phi$, $\vdash P_i(\psi) = \sum_{\{w_c \in W^c \mid \psi \in w_c\}} P_i(\bigwedge w_c)$ 。
8. 如果 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi$ 都是一致的, 那么存在 $c_{w'_c}$, 使得 $\vdash \sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \leftrightarrow \sum_{w'_c \in W^c} c_{w'_c} P_i(\bigwedge w'_c) \geq b$ 。

¹⁵满足这一条件的广义框架就是 [4] 中定义的满 (full) 的广义框架。

证明. 易证 1, 2, 3, 4 成立, 可参考 [6]。

5. 设 $w_c \neq u_c$, 据极大一致集定义, 存在 $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \Phi$ 使得 $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in w_c$ 且 $\varphi_1, \dots, \varphi_m \notin u_c$, 据命题 3.1.2, 则 $\neg\varphi_1, \dots, \neg\varphi_m \in u_c$, 令 $w_c \cap u_c = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ 。据命题逻辑可得, $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_m \vee \neg(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n)$, 再据命题逻辑可得, $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \rightarrow \neg(\neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_m \wedge (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n))$, 因此, $\vdash \bigwedge w_c \rightarrow \neg \bigwedge u_c$ 。
6. 任给一致的 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式 ψ , 令 $\Gamma = \{\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ 为 ψ 的所有子公式组成的公式集。首先证明 $\vdash \psi \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \vee (\psi \wedge \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n) \vee \dots \vee (\psi \wedge \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n)$ 。对其长度进行归纳, 归纳基础, 当 $n = 1$ 时, 据命题逻辑, $\psi \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi_1) \vee (\psi \wedge \neg\varphi_1)$ 。归纳假设, 当 $n = k$ 时, 设 $\psi \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) \vee \dots \vee (\psi \wedge \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_k)$, 据命题逻辑, $\varphi_k \leftrightarrow (\varphi_k \wedge \varphi_{k+1}) \vee (\varphi_k \wedge \neg\varphi_{k+1})$, $\neg\varphi_k \leftrightarrow (\neg\varphi_k \wedge \varphi_{k+1}) \vee (\neg\varphi_k \wedge \neg\varphi_{k+1})$ 。据命题逻辑等值替换规则, $\psi \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge ((\varphi_k \wedge \varphi_{k+1}) \vee (\varphi_k \wedge \neg\varphi_{k+1}))) \vee \dots \vee (\psi \wedge \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge ((\neg\varphi_k \wedge \varphi_{k+1}) \vee (\neg\varphi_k \wedge \neg\varphi_{k+1})))$ 。据命题逻辑重言式 $(\varphi \wedge (\psi \vee \lambda)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \lambda))$ 和 MP, $\psi \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{k+1}) \vee \dots \vee (\psi \wedge \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_{k+1})$ 。因此, $\vdash \psi \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \vee \dots \vee (\psi \wedge \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n)$ 。设 $(\psi \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \vee \dots \vee (\psi \wedge \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n)$ 中有 k 个析取支是矛盾式, 分别记矛盾式合取支和非矛盾式合取支为 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ 和 $\Delta_1, \dots, \Delta_m$, 其中 $k \geq 0$, $m \geq 1$, 则 $\psi \leftrightarrow (\Gamma_1 \vee \dots \vee \Gamma_k) \vee (\Delta_1 \vee \dots \vee \Delta_m)$ 。再据命题逻辑重言式 $\varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \perp)$, $\psi \leftrightarrow (\Delta_1 \vee \dots \vee \Delta_m)$, 即 $\psi \leftrightarrow \bigvee_{\{w_c \in W^c \mid \psi \in w_c\}} \bigwedge w_c$ 。因此, $\vdash \psi \leftrightarrow \bigvee_{\{w_c \in W^c \mid \psi \in w_c\}} \bigwedge w_c$ 。
7. 据命题 3.1.6 和 2.3.3 得, $P_i(\psi) = P_i(\bigvee_{\{w_c \in W^c \mid \psi \in w_c\}} \bigwedge w_c)$ 。据命题 3.1.5 和命题逻辑, 对于任意 $w_c, u_c \in W^c$, 如果 $w_c \neq u_c$, 那么 $(\bigwedge w_c) \wedge (\bigwedge u_c) \leftrightarrow \perp$ 。则据命题 2.3.1, 对于任意 $w_c, u_c \in W^c$, 如果 $w_c \neq u_c$, 那么 $P_i((\bigwedge w_c) \wedge (\bigwedge u_c)) = 0$ 。多次运用可加性公理和等量代换规则得, $P_i(\psi) = \sum_{\{w_c \in W^c \mid \psi \in w_c\}} P_i(\bigwedge w_c)$ 。
8. 设 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 都是一致的。令 $w_c^{1,1}, \dots, w_c^{1,k_1}, \dots, w_c^{n,1}, \dots, w_c^{n,k_n}$ 分别为包含 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 的 W^c 中的极大一致集, 令 $w_c^{1,k_1+1}, \dots, w_c^{1,k_1+l_1}, \dots, w_c^{n,k_n+1}, \dots, w_c^{n,k_n+l_n}$ 分别为不包含 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 的 W^c 中的极大一致集。据命题 3.1.7, $a_1 P_i(\varphi_1) = a_1 P_i(\bigwedge w_c^{1,1}) + \dots + a_1 P_i(\bigwedge w_c^{1,k_1}), \dots, a_n P_i(\varphi_n) = a_n P_i(\bigwedge w_c^{n,1}) + \dots + a_n P_i(\bigwedge w_c^{n,k_n})$ 。据等量代换规则, $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \leftrightarrow a_1 P_i(\bigwedge w_c^{1,1}) + \dots + a_1 P_i(\bigwedge w_c^{1,k_1}) + \dots + a_n P_i(\bigwedge w_c^{n,1}) + \dots + a_n P_i(\bigwedge w_c^{n,k_n}) \geq b$ 。据代数合并同类项运算和排列公理, 存在 $c_1, \dots, c_k$ 和 $w_c^1, \dots, w_c^k$, 使得 $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \leftrightarrow c_1 P_i(\bigwedge w_c^1) + \dots + c_k P_i(\bigwedge w_c^k)$ 。令 $(w_c^{k+1} \cup \dots \cup w_c^{k+l}) \cap \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} =$

$\emptyset$,¹⁶ 据零项公理, $c_1 P_i(\bigwedge w_c^1) + \cdots + c_k P_i(\bigwedge w_c^k) \geq b \leftrightarrow c_1 P_i(\bigwedge w_c^1) + \cdots + c_k P_i(\bigwedge w_c^k) + 0(P_i(\bigwedge w_c^{k+1}) + \cdots + P_i(\bigwedge w_c^{k+l})) \geq b$ 。据命题逻辑, $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \leftrightarrow c_1 P_i(\bigwedge w_c^1) + \cdots + c_k P_i(\bigwedge w_c^k) + 0(P_i(\bigwedge w_c^{k+1}) + \cdots + P_i(\bigwedge w_c^{k+l})) \geq b$ 。再据排列公理, 存在 $c_{w'_c}, w'_c$, 使得 $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \leftrightarrow \sum_{w'_c \in W^c} c_{w'_c} P_i(\bigwedge w'_c) \geq b$ 。□

命题 3.1.6、3.1.7 和 3.1.8 要求公式是一致的, 原因在于 w_c 是极大一致集, 对于任意不一致的公式 ψ , $\{w_c \in W^c \mid \psi \in w_c\} = \emptyset$ 。因而不存在 $\bigvee_{\{w_c \in W^c \mid \psi \in w_c\}} \bigwedge w_c$, 使得 $\vdash \psi \leftrightarrow \bigvee_{\{w_c \in W^c \mid \psi \in w_c\}} \bigwedge w_c$ 。至此我们已经为证明真值引理做好了准备; 但是还需要证明典范模型中定义的概率函数确实是存在的。对于闭包中的公式 φ 和 ψ , 如果 $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, 那么据概率蕴涵规则, $P_i(\psi) \geq P_i(\varphi)$; 如果 $\not\vdash \varphi \rightarrow \psi$, 那么 $P_i(\varphi) = a$ 且 $P_i(\psi) = b$, 其中 $a, b \in \mathbb{Q}$ 是任意的。证明典范模型中定义的概率函数确实存在其实是证明典范概率函数能满足概率公式之间的这两种不同的关联。

推论 3.1. 令 $\mathfrak{M}^c$ 是 Φ 的典范模型, 对于任意一致的公式 $\varphi, \psi \in \Phi$, 如果 $\not\vdash \varphi \rightarrow \psi$, 那么, 存在 $w_c \in W^c$, 使得 $\varphi \in w_c$ 且 $\psi \notin w_c$ 。

证明. 给定 $\varphi, \psi \in \Phi$, 令 φ 和 ψ 都是一致的, 设 $\not\vdash \varphi \rightarrow \psi$, 据命题逻辑, $\{\varphi, \neg\psi\}$ 是一致的, 据引理 3.1, $\{\varphi, \neg\psi\}$ 将生成一个 Φ 的极大一致集 Γ 。据定义 3.3, 存在 $w_c \in W^c$, 使得 $\Gamma = w_c$ 。据命题 3.1.2, $\psi \notin w_c$ 。□

推论 3.2. 令 $\mathfrak{M}^c$ 是 Φ 的典范模型, 令 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi$ 都是一致的, 且对于任意 $\varphi_i, \varphi_j \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $\not\vdash \varphi_i \rightarrow \varphi_j$, 那么, 对于任意 $\varphi_k \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, 都存在 $w_c \in W^c$, 使得 $\varphi_k \in w_c$ 且对于任意 $\varphi_l \neq \varphi_k$, $\varphi_l \notin w_c$ 。

证明. 令 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi$ 都是一致的, 设对于任意 $\varphi_i, \varphi_j \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $\not\vdash \varphi_i \rightarrow \varphi_j$, 给定 $\varphi_k \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, 令 $\varphi_l \neq \varphi_k$, 据题设, $\not\vdash \varphi_k \rightarrow \varphi_l$ 。据推论 3.1, 存在 $w_c \in W^c$, 使得 $\varphi_k \in w_c$ 且 $\varphi_l \notin w_c$ 。□

定义 3.4. 令 Φ 是一公式的闭包, 对于任意概率公式 $\sum_{k=1}^m a_k P_i(\varphi_k) \geq b, \sum_{k=1}^n a_k P_i(\psi_k) \geq c \in \Phi$, $\sum_{k=1}^m a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 和 $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\psi_k) \geq c \in \Phi$ 是概率独立的当且仅当对任意 $\chi_j, \chi_k \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_1, \dots, \psi_n\}$, $\not\vdash \chi_j \rightarrow \chi_k$; $\sum_{k=1}^m a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 和 $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\psi_k) \geq c \in \Phi$ 是概率关联的当且仅当存在 $\chi_j, \chi_k \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_1, \dots, \psi_n\}$, $\vdash \chi_j \rightarrow \chi_k$ 。

引理 3.2 (概率函数存在引理). 令 Φ 为某一公式的闭包, $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, R_i^c, \mathbb{A}^c, \mu^c, V^c \rangle_{i \in Ag}$ 是 Φ 的典范模型, 对于任意概率公式 $\sum_{k=1}^m a_k P_i(\varphi_k) \geq b, \sum_{k=1}^n a_k P_i(\psi_k)$

¹⁶ 即 $w_c^{k+1}, \dots, w_c^{k+l}$ 都不包含 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ 中的任何一个公式。

$\geq c \in \Phi$, 如果二者是概率独立的, 那么对于任意 $(\mathfrak{M}^c, w_c)$, $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{k=1}^m a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 且 $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{k=1}^n a_k P_i(\psi_k) \geq c$, 且不存在一个确定的数 k , 使得 $b = k \cdot c$; 如果二者是概率关联的, 那么存在一个确定的数 k , 使得 $b = k \cdot c$ 。

证明. 任给公式 φ 及其闭包 Φ . 令 $\sum_{k=1}^m a_k P_i(\varphi_k) \geq b, \sum_{k=1}^n a_k P_i(\psi_k) \geq c \in \Phi$. 设二者是概率独立的, 即对于任意 $\chi_j, \chi_k \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_1, \dots, \psi_n\}, \not\models \chi_j \rightarrow \chi_k$. 据推论 3.2, 存在 $w_c \in W^c$, 使得 $\chi_j \in w_c$ 且 $\chi_k \notin w_c$, 且存在 $u_c \in W^c$, 使得 $\chi_j \in u_c$ 且 $\chi_k \notin u_c$. 令 $\Delta = \{w_c \in W^c \mid \chi_j, \chi_k \in w_c\}$, 即 $\Delta \subset W^c$ 是同时包含 χ_j, χ_k 的极大一致集集合. 据命题 3.1.7, $P_i(\chi_j) = \sum_{w'_c \in \Delta} P_i(\wedge w'_c) + P_i(\wedge w_c)$, $P_i(\chi_k) = \sum_{w'_c \in \Delta} P_i(\wedge w'_c) + P_i(\wedge u_c)$. 据语义定义, $\mathfrak{M}^c, v_c \models \sum_{w'_c \in \Delta} P_i(\wedge w'_c) + P_i(\wedge w_c) \geq m$ 当且仅当 $\sum_{w'_c \in \Delta} \mu_{i,v_c}^c(w'_c) + \mu_{i,v_c}^c(w_c) \geq m$, $\mathfrak{M}^c, v_c \models \sum_{w'_c \in \Delta} P_i(\wedge w'_c) + P_i(\wedge u_c) \geq n$ 当且仅当 $\sum_{w'_c \in \Delta} \mu_{i,v_c}^c(w'_c) + \mu_{i,v_c}^c(u_c) \geq n$, 由于 $\mu_{i,v_c}^c(w_c)$ 和 $\mu_{i,v_c}^c(u_c)$ 二者在概率赋值上互不相干, 因此 m, n 是任意的. 进而对任意 $(\mathfrak{M}^c, w_c)$, $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{k=1}^m a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 且 $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{k=1}^n a_k P_i(\psi_k) \geq c$, 且不存在一个确定的数 k , 使得 $b = k \cdot c$ 。

设二者是概率关联的, 即存在 $\chi_j, \chi_k \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_1, \dots, \psi_n\}$, 使得 $\vdash \chi_j \rightarrow \chi_k$, 据 R2, $\vdash P_i(\chi_k) \geq P_i(\chi_j)$. 在这一前提下, 据定理 3.1, 应当有对于任意 $(\mathfrak{M}^c, v_c)$, $\mathfrak{M}^c, v_c \models P_i(\chi_k) \geq P_i(\chi_j)$. 据命题 3.1.7、等量代换规则和语义定义, $\mathfrak{M}^c, v_c \models \sum_{\{w'_c \in W^c \mid \chi_k \in w'_c\}} P_i(\wedge w'_c) \geq \sum_{\{u'_c \in W^c \mid \chi_j \in u'_c\}} P_i(\wedge u'_c)$, 据语义定义, $\mathfrak{M}^c, v_c \models \sum_{\{w'_c \in W^c \mid \chi_k \in w'_c\}} P_i(\wedge w'_c) \geq \sum_{\{u'_c \in W^c \mid \chi_j \in u'_c\}} P_i(\wedge u'_c)$ 当且仅当

$$\sum_{\{w'_c \in W^c \mid \chi_k \in w'_c\}} \mu_{i,v_c}^c(w'_c) \geq \sum_{\{u'_c \in W^c \mid \chi_j \in u'_c\}} \mu_{i,v_c}^c(u'_c).$$

据题设可知, $\{w'_c \in W^c \mid \chi_k \in w'_c\} \supseteq \{u'_c \in W^c \mid \chi_j \in u'_c\}$, 因此,

$$\sum_{\{w'_c \in W^c \mid \chi_k \in w'_c\}} \mu_{i,v_c}^c(w'_c) \geq \sum_{\{u'_c \in W^c \mid \chi_j \in u'_c\}} \mu_{i,v_c}^c(u'_c).$$

据语义定义, $\mathfrak{M}^c, v_c \models \sum_{\{w'_c \in W^c \mid \chi_k \in w'_c\}} \mu_{i,v_c}^c(w'_c) \geq \sum_{\{u'_c \in W^c \mid \chi_j \in u'_c\}} \mu_{i,v_c}^c(u'_c)$, 即 $\mathfrak{M}^c, v_c \models P_i(\chi_k) \geq P_i(\chi_j)$. 因此, 对于任意 $(\mathfrak{M}^c, w_c)$, $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{k=1}^m a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 且 $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{k=1}^n a_k P_i(\psi_k) \geq c$, 其中 b, c 具有某种代数运算关系, 即存在确定的数 k , 使得 $b = k \cdot c$. $\square$

将典范模型限制在公式的闭包上, 是因为公式闭包中的公式是有穷多的. 引理 3.2 表明, 对于任意有穷且一致的公式集, 一定存在满足典范要求的概率函数. 然而, 针对一个无穷且一致的公式集, 可能不存在这样的概率函数. 比如, 没有概率函数能够满足公式集 $\{P_i(p) < 1\} \cup \{P_i(p) \geq r \mid r < 1\}$. 由此可知, PELG 相对于概率认知模型没有紧致性, 进而 PELG 没有强完全性。

引理 3.3 (典范性). 令 Φ 是某 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式的闭包, Φ 的典范模型 $\mathfrak{M}^c$ 是一个概率认知模型。

证明. 易证 R_i^c 是等价关系, 据典范模型定义, μ^c 是一个概率函数, 据引理 3.2, 满足典范要求的 μ^c 是存在的, 其余显然满足概率认知模型定义。□

引理 3.4 (真值引理). 令 Φ 为某 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式的闭包, 令 $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, R_i^c, \mathbb{A}^c, \mu^c, V^c \rangle_{i \in Ag}$ 是 Φ 的典范模型。对于任意 $w_c \in W^c$, 任意公式 $\varphi \in \Phi$: $\varphi \in w_c$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^c, w_c \models \varphi$ 。

证明. 对公式 $\varphi \in \Phi$ 的结构进行归纳证明。归纳基础: 设 $\varphi = p$, 据典范模型的定义, $p \in w_c$ 当且仅当 $w_c \in v_c(p)$, 即 $\mathfrak{M}^c, w_c \models p$ 。归纳步骤:

- 当 φ 为 $\neg\psi$ 、 $\psi \wedge \chi$ 、 $K_i\psi$ 时, 证明可参考 [4, 6]。
- 当 $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 时。分两种情况: 其一, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 都是一致的; 其二, 存在 φ_i 是不一致的。如果 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 都是一致的, 据定理 3.1、命题 3.1.8 和语义定义, 对于任意型 $\mathfrak{M}^c, w_c$, $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{w'_c \in W^c} c_{w'_c} P_i(\bigwedge w'_c) \geq b$ 。据语义定义, $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{w'_c \in W^c} c_{w'_c} P_i(\bigwedge w'_c) \geq b$ 当且仅当 $\sum_{w'_c \in W^c} c_{w'_c} \mu_{i, w_c}(\llbracket \bigwedge w'_c \rrbracket^{\mathfrak{M}}) \geq b$, 当且仅当, $\sum_{w'_c \in W^c} c_{w'_c} \mu_{i, w_c}(\{w'_c\}) \geq b$, 据典范模型关于概率函数的第 3 个条件, 当且仅当, $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \in w_c$ 。因此, 如果 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 都是一致的, 那么, $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 当且仅当 $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \in w_c$ 。

如果存在 φ_i 是不一致的, 据排列公理, $\vdash \sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \leftrightarrow \sum_{y=1}^u a_y P_i(\varphi_y) + \sum_{z=u+1}^v a_z P_i(\varphi_z) \geq b$, 其中, $v > u$, $\varphi_{u+1}, \dots, \varphi_v$ 是不一致的。据命题逻辑, 对于任意 $\varphi_j \in \{\varphi_{u+1}, \dots, \varphi_v\}$, $\vdash \varphi_j \leftrightarrow \perp$ 。据命题 2.3.3, 对于任意 $\varphi_j \in \{\varphi_{u+1}, \dots, \varphi_v\}$, $P_i(\varphi_j) = P_i(\perp)$ 。据命题 2.3.1, $P_i(\varphi_j) = 0$ 。据加法公理, $\sum_{z=u+1}^v a_z P_i(\varphi_z) = 0 \sum_{z=u+1}^v a_z P_i(\varphi_z)$ 。据等量代换规则, $\vdash \sum_{y=1}^u a_y P_i(\varphi_y) + \sum_{z=u+1}^v a_z P_i(\varphi_z) \geq b \leftrightarrow \sum_{y=1}^u a_y P_i(\varphi_y) + 0 \sum_{z=u+1}^v a_z P_i(\varphi_z) \geq b$ 。据零项公理, $\vdash \sum_{y=1}^u a_y P_i(\varphi_y) + 0 \sum_{z=u+1}^v a_z P_i(\varphi_z) \geq b \leftrightarrow \sum_{y=1}^u a_y P_i(\varphi_y) \geq b$ 。据命题逻辑, $\vdash \sum_{y=1}^u a_y P_i(\varphi_y) + \sum_{z=u+1}^v a_z P_i(\varphi_z) \geq b \leftrightarrow \sum_{y=1}^u a_y P_i(\varphi_y) \geq b$ 。再据命题逻辑, $\vdash \sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \leftrightarrow \sum_{y=1}^u a_y P_i(\varphi_y) \geq b$ 。其中, $\varphi_1, \dots, \varphi_u$ 都是一致的。据定理 3.1 和语义定义, 对于任意典范模型 $\mathfrak{M}^c, w_c$, $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 当且仅当, $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{y=1}^u a_y P_i(\varphi_y) \geq b$ 。据前面的证明, $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{y=1}^u a_y P_i(\varphi_y) \geq b$ 当且仅当, $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \in w_c$ 。因此, $\mathfrak{M}^c, w_c \models \sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b$ 当且仅当, $\sum_{k=1}^n a_k P_i(\varphi_k) \geq b \in w_c$ 。□

[7]提出了一种证明概率认知逻辑完全性的方法,这一方法的核心思想仍然是构造一个真值引理,使得任意概率认知逻辑公式在一个极大一致集中当且仅当这一公式在这一极大一致集上可满足。在[7]的基础上,我们定义了一个典范的概率认知模型,命题3.1.8表明,对于满足一定条件的概率公式,我们可以将这一公式的概率分配到闭包中的所有极大一致集上。而在真值引理的证明中,我们根据零项公理将这一结论推广到任意概率公式。进而根据概率公式在极大一致集中出现与否,典范的概率函数为闭包中的所有极大一致集指派概率,闭包中的任意概率公式就与典范的概率函数联系了起来。为了证明典范的概率函数是存在的,我们提出并证明了概率函数存在引理,同时表明典范概率认知模型是良定义的。

定理 3.2 (弱完全性). 概率认知逻辑 PELG 相对于概率认知广义框架类是弱完全的: 对于任意 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式 φ , $\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$ 。

证明. 任给 $\mathcal{L}_{\text{PELG}}$ -公式 φ , 令 $\not\models \varphi$, 那么 $\{\neg\varphi\}$ 是一致的, 令 Φ 为 $\{\neg\varphi\}$ 的闭包, 据林登鲍姆引理, $\{\neg\varphi\}$ 是 Φ 的某个极大一致集 Γ 的子集, 再据真值引理, 存在 Φ 的典范模型 $\mathfrak{M}^c$, 使得 $\mathfrak{M}^c, \Gamma \models \neg\varphi$ 。据引理 3.3, $\mathfrak{M}^c$ 是一个概率认知模型, 因此, $\not\models \varphi$ 。 $\square$

4 应用

在一些策略式博弈中, 没有纯策略纳什均衡或多个纯策略纳什均衡, 但存在唯一的混合策略纳什均衡。我们用概率认知逻辑为如下协同博弈 (Coordination Game) 的混合策略提供一个逻辑解释。

例 1 (协同博弈). 一对情侣打算安排他们的娱乐活动, 或者听音乐会, 或者看电影。女士偏好音乐会, 男士偏好电影, 但他们都宁愿在一起而不愿分开。假设支付矩阵如图 1。

这一博弈有两个纯策略纳什均衡, 分别是两人都选择听音乐会和两人都选择看电影。在这种情形下, 如果有一人先进行公开决策, 则另一个人选择跟随是占优策略。而如果两人同时决策, 那么这里得到的纳什均衡并没有提供采取占优决策的依据。如果主体都考虑了策略的概率指派, 则双方就采取了混合策略。¹⁷ 下面我们使用概率认知模型来描述协同博弈的混合策略及主体的认知状态。

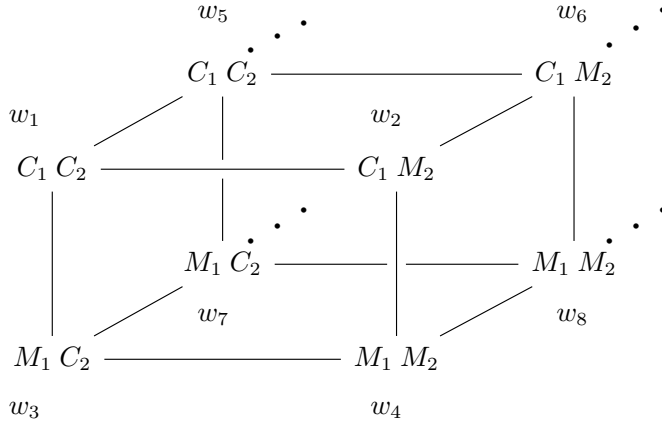
首先构造一个概率认知模型: 给定主体集 $Ag = \{1, 2\}$ 和命题逻辑原子公式集 $At = \{C_1, C_2, M_1, M_2\}$, 依次表示主体 1 选择听音乐会, 主体 2 选择听音乐会, 主

¹⁷混合策略的严格定义及详细讨论可参考 [10]。

		女士	
		电影	音乐会
男士	电影	2, 1	0, 0
	音乐会	0, 0	1, 2

图 1: 协同博弈支付矩阵

体 1 选择看电影, 主体 2 选择看电影。这里我们用主体 1 表示男士, 用主体 2 表示女士。令 $W = \{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $R_1 = R_2 = W^2$, 令 $W_{4k+1} = \{w_{4k+1} \in W \mid k \in \mathbb{N}\}$, $W_{4k+2} = \{w_{4k+2} \in W \mid k \in \mathbb{N}\}$, $W_{4k+3} = \{w_{4k+3} \in W \mid k \in \mathbb{N}\}$, $W_{4k+4} = \{w_{4k+4} \in W \mid k \in \mathbb{N}\}$ 。令 $\mathbb{A}$ 是基于 $\{W_{4k+1}, W_{4k+2}, W_{4k+3}, W_{4k+4}\}$ 据可允许赋值集运算封闭性要求构造而成的一个可允许赋值集, 使得 $\{W_{4k+1}, W_{4k+2}, W_{4k+3}, W_{4k+4}\} \subseteq \mathbb{A}$ 。对于任意 $X \in \mathbb{A}$, 任意 $s, t \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\mu_{i, w_{4k+s}}(X) = \mu_{i, w_{4k+t}}(X)$ 。且对于任意 $X \in \mathbb{A}$, 存在 $w \in W$, 使得对于任意 $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, 都有 $\mu_{i, w}(X) = q$ 。 $V(C_1) = W_{4k+1} \cup W_{4k+2}$, $V(M_1) = W_{4k+3} \cup W_{4k+4}$, $V(C_2) = W_{4k+1} \cup W_{4k+3}$, $V(M_2) = W_{4k+2} \cup W_{4k+4}$ 。 $\mathfrak{M} = \langle W, R_i, \mathbb{A}, \mu, V \rangle_{i \in Ag}$, 其认知关系如图 2 (省略了自反和传递关系箭头)。

图 2: 概率认知模型 $\mathfrak{M}$ 中的认知关系

在没有达到混合策略纳什均衡之前, 主体关于自己和对方的策略的概率是不确定的。这一点在模型中被描述为: 对于任意主体 $i, j \in Ag$, 任意 $c \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, 都存在 $w \in W$ 使得 $\mathfrak{M}, w \models (P_j(C_i) = c) \wedge (P_j(M_i) = 1 - c)$ 。关于主体的认知

状态, 易证, $\mathfrak{M} \models \bigwedge_{l \in Ag} \left(K_l \bigwedge_{j \in Ag} \left(\bigwedge_{i \in Ag} (P_j(C_i) \geq 0) \right) \right)$ 。这表明, 在这一博弈中, 博弈双方都知道自己采取了混合策略, 也知道对方采取了混合策略。

令主体 1 选择听音乐会的概率为 a , 主体 2 选择听音乐会的概率为 b 。在混合策略纳什均衡中, 主体 2 的混合策略满足等式 $1 \cdot (1 - a) + 0 \cdot a = 0 \cdot (1 - a) + 2 \cdot a$, 主体 1 的混合策略满足等式 $2 \cdot (1 - b) + 0 \cdot b = 0 \cdot (1 - b) + 1 \cdot b$ 。可表示为公式:

$$\bigwedge_{i \in Ag} \left(\begin{array}{l} (1 - P_i(C_1) + 0P_i(C_1) = 0P_i(C_1) + 2P_i(C_1)) \wedge \\ (2 - 2P_i(C_2) + 0P_i(C_2) = 0P_i(C_2) + P_i(C_2)) \end{array} \right), \text{ 即} \\ \bigwedge_{i \in Ag} ((P_i(C_1) = 1/3) \wedge (P_i(C_2) = 2/3))。$$

混合策略纳什均衡以及其中主体的认知关系同样可以通过概率认知模型得到刻画。令 Ag 和 At 的设定与 $\mathfrak{M}$ 相同, $W_E = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $(R_E)_1 = (R_E)_2 = W^2$, 令可允许赋值集 $\mathbb{A}_E = \wp(W_E)$, 且对于任意 $w, u \in W_E$ 、任意 $p \in At$ 以及任意 $i, j \in Ag$, 都有 $(\mu_E)_{i,w}(\llbracket p \rrbracket^{\mathfrak{M}_E}) = (\mu_E)_{j,u}(\llbracket p \rrbracket^{\mathfrak{M}_E})$, $V_E(C_1) = \{w_1, w_2\}$, $V_E(M_1) = \{w_3, w_4\}$, $V_E(C_2) = \{w_1, w_3\}$, $V_E(M_2) = \{w_2, w_4\}$ 。 $\mathfrak{M}^E = \langle W_E, (R_E)_i, \mathbb{A}_E, (\mu_E), V_E \rangle_{i \in Ag}$, 如图 3。

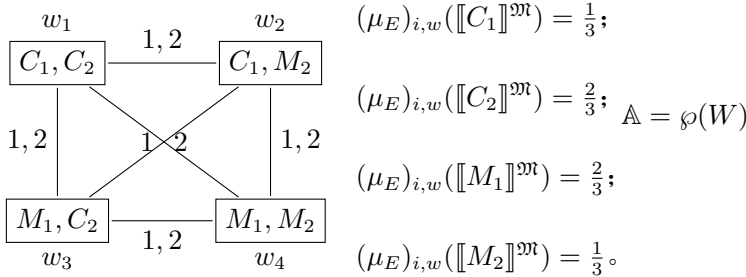


图 3: 协同博弈纳什均衡的概率认知模型 $\mathfrak{M}^E$

易证, $\mathfrak{M}^E \models \left(\bigwedge_{i \in Ag} (P_i(C_1) = 1/3) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in Ag} (P_i(C_2) = 2/3) \right)$, 且 $\mathfrak{M}^E \models \bigwedge_{j \in Ag} K_j \left(\left(\bigwedge_{i \in Ag} (P_i(C_1) = 1/3) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in Ag} (P_i(C_2) = 2/3) \right) \right)$ 。

由此可知, 在模型 $\mathfrak{M}^E$ 的任意可能世界上, 任一策略的概率是确定的, 也就是说, 协同博弈有且仅有一个混合策略纳什均衡。同时, 模型 $\mathfrak{M}^E$ 还表明, 这个唯一的纳什均衡是两个主体的普遍知识。例 1 还表明, 概率认知模型可以借用认知算子和概率算子的叠加刻画主体对一个事件的概率不确定性。

5 结论与展望

本文在 [4] 和 [7] 的基础上提出了一个将概率函数建立在可允许赋值集上的概率认知模型, 它为概率认知模型的可测问题提供了一种解决方案。这是继概率

空间认知模型和离散概率认知模型后的第三种概率认知模型。本文比较了三种模型并指出, 如果所有给定命题的概率都是可测的, 与概率空间认知模型和离散概率认知模型相比, 基于广义框架的概率认知模型在模型构造和语义定义上具有一定优势。

本文给出了一个基本的概率认知逻辑公理系统 PELG, 在未来的研究中可以考虑对 PELG 进行扩张。文献 [4] 指出某些特殊的模态逻辑公式在一类特殊的广义框架上是有效的, 文献 [7] 定义了一些特殊的概率函数并讨论了一些特殊的概率认知公理, 这些在基于广义框架的概率认知逻辑中同样可以实现。本文在 [7] 和 [8] 的基础上, 定义了一个典范概率认知模型, 提出并证明了概率函数存在引理。存在引理是重要的, 它保证了典范的概率函数是良定义的, 但这一引理在已有文献中没有被提及, 更没有得到严格的证明。本文采用典范模型的方法证明了 PELG 相对于概率认知广义框架类是可靠且完全的。

最后, 本文运用基于广义框架的概率认知模型刻画了混合策略博弈的初始状态和混合策略博弈纳什均衡。通过分析可知, 基于广义框架的概率认知模型可以描述混合策略博弈初始状态中主体的认知状态和概率的不确定性, 也能够描述混合策略博弈纳什均衡状态下主体的普遍知识和概率的确定性。这为进一步运用概率认知逻辑研究混合策略博弈的认知变化和概率更新奠定了基础。

本文仅仅是基于广义框架的概率认知逻辑研究的一个初步尝试和开端, 在这方面还有许多问题有待研究。在基础研究方面, 未来的工作包括但不限于研究基于特殊广义框架的概率认知逻辑、基于邻域语义广义框架的概率认知逻辑、动态的基于广义框架的概率认知逻辑以及概率认知逻辑中公共知识的作用。在运用研究方面, 可以运用这一逻辑讨论混合策略博弈如何从初始状态达成混合策略纳什均衡、讨论概率悖论和贝叶斯决策问题等等。

参考文献

- [1] L. Aceto, W. van der Hoek, A. Ingolfssdottir and J. Sack, 2011, "Sigma algebras in probabilistic epistemic dynamics", *Proceedings of the 13th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*, pp. 191–199, New York: ACM.
- [2] A. Achimescu, A. Baltag and J. Sack, 2016, "The probabilistic logic of communication and change", *Journal of Logic and Computation*, **29(7)**: 1015–1040.
- [3] J. van Benthem, J. Gerbrandy and B. Kooi, 2009, "Dynamic update with probabilities", *Studia Logica*, **93(1)**: 67–96.
- [4] P. Blackburn., M. de Rijke and Y. Venema, 2002, *Modal Logic*, Amsterdam: Cambridge University Press.

- [5] L. Demey and J. Sack, 2015, “Epistemic probabilistic logic”, in H. van Ditmarsch, J. Y. Halpern, W. van der Hoek and B. Kooi (eds.), *Handbook of Epistemic Logic*, pp. 147–202, London: College Publications.
- [6] H. van Ditmarsch, W. van der Hoek and B. Kooi, 2008, *Dynamic Epistemic Logic*, Dordrecht: Springer.
- [7] R. Fagin and J. Y. Halpern, 1994, “Reasoning about knowledge and probability”, *Journal of the ACM*, **41(2)**: 340–367.
- [8] R. Fagin, J. Y. Halpern and N. Megiddo, 1990, “A logic for reasoning about probabilities”, *Journal of the ACM*, **87(1–2)**: 78–128.
- [9] B. P. Kooi, 2003, “Probabilistic dynamic epistemic logic”, *Journal of Logic, Language and Information*, **12(4)**: 381–408.
- [10] M. J. Osborne and A. Rubinstein, 1994, *A Course in Game Theory*, Cambridge, MA: The MIT Press.
- [11] J. Sack, 2009, “Extending probabilistic dynamic epistemic logic”, *Synthese*, **169(2)**: 241–257.

（责任编辑：袁之）

Probabilistic Epistemic Logic Based on General Frame

Meilin Deng Meiyun Guo

Abstract

Probabilistic epistemic logic integrates knowledge and probabilistic reasoning into the same logical framework. In order to solve the problem of probability assignment in probabilistic epistemic model, we provide a probabilistic epistemic model based on general frame, and discusses the relationship between this model and two existing probabilistic epistemic models. Probabilistic epistemic model based on general framework can assign probability to any formula in the language defined in this paper, so it is an ideal semantic model for probabilistic epistemic logic. We present a sound and complete proof system of probabilistic epistemic logic. The existence lemma of probability function is proposed and proved, as well as the completeness of this logic is proved. Finally, two states of a mixed strategy game are described by this logic, which lays a foundation for further discussion of mixed strategy game.

Meilin Deng Institute of Logic and Intelligence, Southwest University
mldeng_phi@126.com

Meiyun Guo Institute of Logic and Intelligence, Southwest University
guomy007@swu.edu.cn