

初等类的一个注记

袁江杰

摘要: 初等类是模型论的一个核心概念。对初等类有多个刻画定理, 其中一个使用“对初等等价封闭”与“对超积封闭”。《初等模型论》是新近出版的一部优秀的模型论作品, 在其中根据上述刻画定理, 给出了可数无穷步得到一个结构类的初等类闭包的“操作性”方法。这一方法颇为直观, 可以加深我们对初等类这一概念的理解, 然而由于疏忽了“共尾”现象, 这一方法或有漏洞。本文引入“取 κ 超积闭”这一概念, 首先“优化”了前述刻画定理, 然后依据这一“优化”后的结果修补了上述“操作性”方法。本文也据此初步讨论了结构类上几个性质之间的关系。

关键词: 初等类; 初等等价; 超积

中图分类号: B81

文献标识码: A

初等类是模型论中的一个核心概念。对于任意的结构类 $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ 是初等类, 当且仅当它对初等等价与超积封闭。这是关于初等类的一个基本刻画定理, 在许多模型论教材中都有介绍。国内模型论方面的专著偏少, 姚宁远的《初等模型论》是新近的一部优秀的著作, 除了对基本结果的介绍, 对 Morley 定理以及稳定理论等相对现代的内容也作了细致的梳理。《初等模型论》在介绍了关于初等类的上述基本刻画定理后, 还给出了初等类闭包的构造, 这种构造的思路清晰, 并且似乎在其他的模型论教材中未见讨论, 因此比较新颖, 也有益于初学者理解初等类这一概念; 但是书中给出的构造方法似有漏洞, 这一问题可能是作者疏忽了“共尾”现象造成的, 而一旦注意到这一点就容易对之修补。笔者在给出修补的过程中发现或许可以引入一个自然的概念“取 κ 超积闭”, 利用这个概念, 可以“优化”上述的刻画定理, 完成对构造的修补, 而且也得到了一些小的结果, 特别是对“初等等价”有了更多的认识; 在严格的意义上, 这些小结果不能算是新的, 因为利用已经有的命题可以相对直接地推出它们, 不过, 它们可能在别处未出现过¹, 因此笔者写此小文作此介绍。

本文里使用的记号与概念都取自《初等模型论》等常见的模型论作品, 不过为了完整性, 也会在合适的地方论述它们。本文的具体安排如下: 首先, 我们会

收稿日期: 2022-03-21; 修订日期: 2022-06-28

作者信息: 袁江杰 中国人民大学哲学院
qiujiangjie@163.com

¹笔者搜索了几本常见的模型论教材, 未发现有相关的讨论; 这些都是微小的结果, 不过发表出来对模型论学习者或有帮助。

重述初等类的这一刻画定理以及《初等模型论》中据此给出的对初等类闭包的构造方法,并指出该构造方法的问题;然后引入那个自然的概念,利用它进行修补;同时给出有关的几个结果。

先引入一些要用到的记号和概念。

定义 1.

- (1) 用 $\mathcal{L}$ 表示一个一阶语言;用 $\mathcal{T}$ 表示一个一致的理论,理论是对后承封闭的句子集,一致指其推不出矛盾;用 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 表示结构,相应的论域记为 M, N ;用 $\mathcal{K}$ 表示结构类。
- (2) 对于一个对象 S ,用 $|S|$ 表示它的基数,比如, $|\mathcal{L}|$ 表示的是语言 $\mathcal{L}$ 的基数,反映的是 $\mathcal{L}$ 的公式的个数。
- (3) 对于结构 $\mathcal{M}$, $|\mathcal{M}| = |M|$,即用一个结构的论域的基数来代表相应结构的大小。
- (4) 对给定的 $\mathcal{L}$ 结构类 $\mathcal{K}$,用 $Th(\mathcal{K})$ 表示 $\mathcal{K}$ 的理论,即 $Th(\mathcal{K}) = \{\varphi \text{ 为 } \mathcal{L} \text{ 句子} \mid \text{对任意的 } \mathcal{M} \in \mathcal{K}, \mathcal{M} \models \varphi\}$;当 $\mathcal{K} = \{\mathcal{M}\}$ 为单元集时,也用 $Th(\mathcal{M})$ 表示。
- (5) 对给定的 $\mathcal{L}$ 句子集 Σ ,用 $Mod(\Sigma)$ 表示 Σ 的模型类,即 $Mod(\Sigma) = \{\mathcal{M} \text{ 为 } \mathcal{L} \text{ 结构} \mid \mathcal{M} \models \Sigma\}$ 。

定义 2.

- (1) 称一个 $\mathcal{L}$ 理论 $\mathcal{T}$ 是完全的,如果对任意的 $\mathcal{L}$ 句子 φ , φ 与它的否定 $\neg\varphi$ 中恰好有一个在 $\mathcal{T}$ 中。
- (2) 设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是结构,称它们是初等等价的,记为 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$,若 $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$ 。
- (3) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类,称 $\mathcal{K}$ 为初等类,若有 $\mathcal{L}$ 句子集 Σ 使得 $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$ 。
- (4) 设 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类,称 $\mathcal{K}_2$ 为 $\mathcal{K}_1$ 的初等类闭包,若 $\mathcal{K}_2$ 是初等类, $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$ 并且对任意包含 $\mathcal{K}_1$ 的初等类 $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_3$ 。

首先可以给出一些简单的相关的结果,它们根据定义就可以得到。

命题 3.

- (1) 设 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类,并且 $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$,那么 $Th(\mathcal{K}_2) \subseteq Th(\mathcal{K}_1)$ 。
- (2) 设 Σ_1, Σ_2 为 $\mathcal{L}$ 句子集,并且 $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$,那么 $Mod(\Sigma_2) \subseteq Mod(\Sigma_1)$ 。
- (3) 设 $\mathcal{K}$ 为初等类,那么 $\mathcal{K} = Mod(Th(\mathcal{K}))$ 。

后文要用到的超积与超幂稍复杂一点,但它们也是基本的概念,一方面为了完整性,另一面为了简洁,下面不给出证明地列出后文要用到的定义与结果。

定义 4. 设 I 为一个指标集, U 为 I 上的超滤, $\mathcal{M}_i$ ($i \in I$) 为一族 $\mathcal{L}$ 结构,它们模 U 的超积,也是一个 $\mathcal{L}$ 结构,记为 $\prod_U \mathcal{M}_i$,称 $\prod_U \mathcal{M}_i$ 为这族结构的超积;当所有的结构 $\mathcal{M}_i$ 都是同一个结构 $\mathcal{M}$ 时,则记为 $\prod_U \mathcal{M}$,称 $\prod_U \mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}$ 的超幂。

命题 5.

- (1) 设 I 为一个指标集, U 为 I 上的超滤, $\mathcal{M}_i$ ($i \in I$) 为一族 $\mathcal{L}$ 结构, 那么对任意的 $\mathcal{L}$ 句子 φ , $\prod_U \mathcal{M}_i \models \varphi$, 当且仅当 $\{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi\} \in U$ 。
- (2) 设 I 为一个指标集, U 为 I 上的超滤, $\mathcal{M}$ 为结构, 那么 $\mathcal{M}$ 初等嵌入到 $\prod_U \mathcal{M}$; 进而 $\mathcal{M} \equiv \prod_U \mathcal{M}$ 。
- (3) 设 I 为一个指标集, $\Sigma \subseteq \wp(I)$, 若 Σ 对取有穷交封闭, 即对 Σ 的任意的非空有穷子集 Γ , $\bigcap \Gamma \neq \emptyset$, 那么有 I 上的超滤 U , 使得 $\Sigma \subseteq U$ 。

如果把 (是) 初等类看作为结构类的性质, 那么对照的, 还有一些自然的性质, 我们罗列在下面, 在后文中会讨论它们之间的关系。

定义 6.

- (1) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 称 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭, 若对任意的 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$, 如果 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, 并且 $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$, 那么 $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ 。
- (2) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 称 $\mathcal{K}$ 对超积封闭, 若对任意的指标集 I , 对 I 上任意的超积 U , 对任意的 $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{K}$, $\prod_U \mathcal{M}_i \in \mathcal{K}$ 。
- (3) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 称 $\mathcal{K}$ 对超幂封闭, 若对任意的指标集 I , 对 I 上任意的超积 U , 对任意的 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathcal{M}$, 如果 $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$, 那么 $\prod_U \mathcal{M} \in \mathcal{K}$ 。
- (4) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 称 $\mathcal{K}$ 对超幂反向封闭, 若对任意的指标集 I , 对 I 上任意的超积 U , 对任意的 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathcal{M}$, 如果 $\prod_U \mathcal{M} \in \mathcal{K}$, 那么 $\mathcal{M}$ 也在 $\mathcal{K}$ 中。
- (5) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 称 $\mathcal{K}$ 对同构封闭, 若对任意的 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$, 如果 $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, 并且 $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$, 那么 $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ 。
- (6) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 称 $\mathcal{K}$ 对子结构封闭, 若对任意的 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{M}$ 的所有子结构也都在 $\mathcal{K}$ 中。

可以从蕴含关系来看这些结构类上的性质之间的关系, 那么, 对初等等价封闭是相对强的性质。

命题 7.

- (1) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 如果 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭, 那么 $\mathcal{K}$ 对同构封闭。
- (2) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 如果 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭, 那么 $\mathcal{K}$ 对超幂封闭。
- (3) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 如果 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭, 那么 $\mathcal{K}$ 对超幂反向封闭。

关于初等类, 有一个基本的刻画定理, 它相当于说, (是) 初等类是结构类上强的性质, 我们也不给证明地给出它的表述。

命题 8 ([4], 引理 2.3.1).

设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 那么 $\mathcal{K}$ 为初等类, 当且仅当 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭并且 $\mathcal{K}$ 对超积封闭。

推论 9.

- (1) 设 $\mathcal{K}$ 为初等类, 那么 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭。
- (2) 设 $\mathcal{K}$ 为初等类, 那么 $\mathcal{K}$ 对超积封闭。
- (3) 设 $\mathcal{K}$ 为初等类, 那么 $\mathcal{K}$ 对同构封闭。
- (4) 设 $\mathcal{K}$ 为初等类, 那么 $\mathcal{K}$ 对超幂封闭。
- (5) 设 $\mathcal{K}$ 为初等类, 那么 $\mathcal{K}$ 对超幂反向封闭。

给定任意的结构类 $\mathcal{K}$, 一定有它的初等类闭包。

命题 10 ([2], 第 12 页). 设 $\mathcal{K}$ 为结构类, 那么 $Mod(Th(\mathcal{K}))$ 是 $\mathcal{K}$ 的初等类闭包。

利用命题 3 容易证明这个命题。首先, $Mod(Th(\mathcal{K}))$ 是包含 $\mathcal{K}$ 的初等类; 其次, 假设 Θ 也是包含 $\mathcal{K}$ 的初等类, 那么据命题 3(1) 有 $Th(\Theta) \subseteq Th(\mathcal{K})$, 再据命题 3(2) 有 $Mod(Th(\mathcal{K})) \subseteq Mod(Th(\Theta))$, 而 Θ 为初等类, 因此 $Mod(Th(\Theta)) = \Theta$, 这样保证 $Mod(Th(\mathcal{K})) \subseteq \Theta$ 。

文献 [4] 利用命题 8, 试图给出求取一个结构类的初等类闭包的“构造性”的方法, 这一构造进路基于一种一般性的思路, 概言之, 它们有着这样的统一架构: 对于具有某种特征的结构类 (在这里是初等类), 先确定可以进行构造“操作”的作为必要条件的特征 (在这里是对初等等价封闭以及对超积封闭, 当然还有别的, 比如对取同构封闭等), 然后确定其中的一些必要条件组合起来可以构成充分条件 (在这里是, 对初等等价封闭以及对超积封闭这两个必要条件组合起来构成了 (是) 初等类的充分条件)。最后, 利用这种组合确定相应的, 获得该特征的闭包的“构造性”的方法 (这里是初等类闭包), 它们通常是分解为若干个步骤实施的, 在每一步“部分”落实某个必要条件, 对几个组合成为充分条件的必要条件, 进行交替的“部分”落实, 最后综合起来, 使得所有的必要条件最终都被落实, 从而完成工作。

这种架构与思路具有方法论的意趣, 因此它们本身就有着被独立探讨的意义, 那么就本文的主题, 初等类与初等类闭包而言, 尽管我们已经有命题 10 这一结果, 但是, 基于命题 8, 在这种架构与思路下发展相应的“构造性”的方法, 仍然是值得讨论的。

文献 [4] 中给出了如下的求取一个结构类的初等类闭包的“构造性”的方法。

注记 11 ([4], 注 2.3.1).

设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 如下构造一个结构类的序列 $\mathcal{K}_i$, $i \in \mathbb{N}$:

- (1) $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$;

- (2) 若 i 为奇数 $2n+1$, 那么使 $\mathcal{K}_i = \{\mathcal{N} \text{ 是 } \mathcal{L} \text{ 结构} \mid \text{有 } \mathcal{L} \text{ 结构 } \mathcal{M} \in \mathcal{K}_{2n} \text{ 使得 } \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}\}$;
- (3) 若 i 为偶数 $2n+2$, 那么使 $\mathcal{K}_i = \{\mathcal{N} \text{ 是 } \mathcal{L} \text{ 结构} \mid \mathcal{N} \text{ 是 } \mathcal{K}_{2n+1} \text{ 中一族结构的超积}\}$;
- 最后令 $\bar{\mathcal{K}} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_i$, 文献 [4] 称这样构造得到的结构类 $\bar{\mathcal{K}}$ 是 $\mathcal{K}$ 的初等类闭包。

首先需要说明, 这一构造方法在一些情况下是有效的。

注记 12. 当 $\mathcal{K} = \{\mathcal{M}\}$ 为单元集时, 据命题 10, $\mathcal{K}$ 的初等类闭包为 $\text{Mod}(\text{Th}(\mathcal{M})) = \{\mathcal{N} \mid \mathcal{N} \equiv \mathcal{M}\}$, 这意味着注记 11 中的构造只需要走一步就可以了, 因此这时注记 11 的方法无问题。

受到注记 12 的启发, 我们可以确定一类特殊的结构类, 它们作为初等类的充分条件。

命题 13. 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 并且 $\text{Th}(\mathcal{K})$ 是完全的, 如果它对初等等价封闭, 那么它是初等类。

证明是简单的, 设 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭且 $\text{Th}(\mathcal{K})$ 完全, 任取 $\mathcal{M} \in \text{Mod}(\text{Th}(\mathcal{K}))$, 取一个结构 $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$, 那么由于它们都是 $\text{Th}(\mathcal{K})$ 的模型, 并且由于 $\text{Th}(\mathcal{K})$ 的完全性, $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, 进而由 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭得 $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$, 因此 $\mathcal{K} = \text{Mod}(\text{Th}(\mathcal{K}))$ 。

注记 14. 与注记 12 中的理由一样, 对于给定的结构类 $\mathcal{K}$, 如果 $\text{Th}(\mathcal{K})$ 是完全的, 那么注记 11 的方法对获得 $\mathcal{K}$ 的初等类闭包也是有效的, 并且同样只需要实施一步即可。

与命题 13 对偶的, 也可以考虑另外一边, 对超积封闭, 是否有类似的结果。

问题 15. 是否可以确定一类特殊的结构类, 使得对超积封闭是它们是初等类的充分条件?

我们稍偏题对这个问题作一点初步的讨论。

首先, 最平凡的一个答案是命题 8 的一个变体: 所有对初等等价封闭的结构类都如此; 那么有意思的是本身无法推出对初等等价封闭的性质, 下面的命题给出我们一个回答。

命题 16 ([1], 推论 6.1.16). 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 如果 $\mathcal{K}$ 对超积封闭、 $\mathcal{K}$ 对超幂反向封闭并且 $\mathcal{K}$ 对同构封闭, 那么 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭, 从而 $\mathcal{K}$ 是初等类。

这个命题的证明依赖于所谓的 Keisler–Shelah 同构定理：对于任意的 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ 当且仅当存在指标集 I , 存在 I 上的超滤 U 使得 $\prod_U \mathcal{M} \cong \prod_U \mathcal{N}$ 。对同构定理感兴趣的读者可以参看文献 [3] 第 13 章。

命题 16 给出了对问题 15 的一个回答；利用它所依赖的同构定理还可以得到对问题 15 的一个回答。

命题 17. 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, $\mathcal{K}$ 对同构封闭并且 $\mathcal{K}$ 对子结构封闭, 那么对超积封闭是它们是初等类的充分条件。

证明是简单的, 只需要说明这时 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭; 任意取相互初等等价的 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$, 设 $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$, 那么据同构定理取到两个同构的 $\mathcal{L}$ 结构 $\prod_U \mathcal{M}$ 与 $\prod_U \mathcal{N}$; $\mathcal{K}$ 对超积封闭, 那么 $\prod_U \mathcal{M} \in \mathcal{K}$; $\mathcal{K}$ 对同构封闭, 那么 $\prod_U \mathcal{N} \in \mathcal{K}$; 而 $\mathcal{N}$ 初等嵌入到 $\prod_U \mathcal{N}$, 那么 $\mathcal{N}$ 与 $\prod_U \mathcal{N}$ 的一个子结构同构, 最终由 $\mathcal{K}$ 对同构封闭以及它对子结构封闭得到 $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ 。

注意, 单单“子结构封闭 + 同构封闭”与“超幂反向封闭 + 同构封闭”这两个条件是不同的。² 另外, 仅凭对“同构封闭”以及对“子结构封闭”不能推出对“初等等价封闭”, 例如, 令 $\mathcal{K} = \{\mathcal{M} \text{ 是群结构} \mid |\mathcal{M}| \leq 2^{\aleph_0}\}$, 那么 $\mathcal{K}$ 对同构封闭并且对子结构封闭, 但是 $\mathcal{K}$ 不对初等等价封闭, 自然 $\mathcal{K}$ 也不是初等类。

我们再回到注记 11 上来。假若按照注记 11 中的方法, 得到的序列 $\mathcal{K}_i$ ($i \in \mathbb{N}$) 满足如下的条件: 对任意非零的自然数 n , $\mathcal{K}_{2n} \setminus \mathcal{K}_{2n-1} \neq \emptyset$, 那么这一构造则可能会失效。

对每个零自然数的 n , 取 $\mathcal{M}_{n-1} \in \mathcal{K}_{2n} \setminus \mathcal{K}_{2n-1}$ 。那么 $\mathcal{M}_i$ ($i \in \mathbb{N}$) 为 $\bar{\mathcal{K}}$ 中的一族结构, 取 U 为 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤, 那么 $\prod_U \mathcal{M}_i$ 不能保证一定在 $\bar{\mathcal{K}}$ 中, 因此不能保证 $\bar{\mathcal{K}}$ 是初等类, 这时注记 11 中的方法失效。

问题 18. 有具体的结构类, 使得注记 11 的方法 (即进行可数无穷步构造) 对它获得初等类闭包失效?

注记 11 中方法可能失效的问题出在构造的“步数”太少了, 使得无法保证一定能对取超积封闭, 另一面, 如果可以允许取任意“多”的结构进行超积构造的话, 那么, 不管构造的“步数”放多少长, 都会遇到同样的问题, 因此修补的关键在于, 是否可以在命题 8 中放松对超积构造的“规模”, 由此自然引出如下概念。

定义 19. 设 κ 是一个基数, $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 称 $\mathcal{K}$ 是取 κ 超积闭的, 如果, 对任意的 $\lambda \leq \kappa$, 对任意的基数为 λ 的指标集 I , 对 I 上任意的超积 U , 对任意的 $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{K}$, $\prod_U \mathcal{M}_i \in \mathcal{K}$ 。

²感谢匿名审稿专家指出这一点。

依据这一定义，立即可以得到下面命题。

命题 20.

- (1) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 若 $\mathcal{K}$ 对超积封闭, 则对任意的基数 κ , $\mathcal{K}$ 是取 κ 超积闭的。
- (2) 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 若 $\mathcal{K}$ 是取 κ 超积闭的, 那么对任意的基数 $\lambda \leq \kappa$, $\mathcal{K}$ 是取 λ 超积闭的。

另一面, 我们或许会怀疑, 依基数的大小, 取不同规模的对超积封闭, 是否无法造成真正的差别? 下面的例子表明, 确实是有真正的差别的。

例 21. 令 $\mathcal{K} = \{\mathcal{M} \text{ 是群结构} \mid |\mathcal{M}| \leq 2^{\aleph_0}\}$, 则 $\mathcal{K}$ 是取 $\aleph_0$ 超积闭的, 但是不对取 $(2^{\aleph_0})^+$ 超积闭。

注意 $\mathcal{K}$ 是真类。

前者成立是因为 $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, 那么, 可数多个基数不超过 $2^{\aleph_0}$ 的群结构的超积的基数仍然不超过 $2^{\aleph_0}$, 自然该超积仍然是群结构。

另一面, 取基数为 $(2^{\aleph_0})^+$ 的指标集 I , 取 $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{K}$, 使得其中每个结构的基数为 $2^{\aleph_0}$, 取 I 上 $(2^{\aleph_0})^+$ 不完全超滤 U , 则 $\prod_U \mathcal{M}_i$ 的基数将超过 $2^{\aleph_0}$, 那么 $\prod_U \mathcal{M}_i \notin \mathcal{K}$ 。

易见这个例子里的 $\mathcal{K}$ 不是初等类, 并且也不对初等等价封闭, 不过如前面看到的, 它对同构封闭, 也对子结构封闭。

利用取 κ 超积封闭这个概念, 首先可以“优化”命题 8。

命题 22. 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 那么 $\mathcal{K}$ 为初等类, 当且仅当 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭并且 $\mathcal{K}$ 对 $|\mathcal{L}|$ 超积封闭。

证明实质上与命题 8 的证明是一样的, 不过为了完整性, 我们在这里再“复述”一遍。只需说明, 从右到左也成立。

设 $|\mathcal{L}| = \kappa$, 设 $\mathcal{L}$ 结构类 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭并且 $\mathcal{K}$ 对 κ 超积封闭。

记 $\mathcal{T} = Th(\mathcal{K})$, 只需要说明 $\mathcal{K} = Mod(\mathcal{T})$ 。 $\mathcal{K} \subseteq Mod(\mathcal{T})$ 平凡成立, 因此只需说明 $\mathcal{K} \supseteq Mod(\mathcal{T})$ 。

任取结构 $\mathcal{M} \in Mod(\mathcal{T})$, 记 I 是由 $Th(\mathcal{M})$ 的所有的非空有穷子集组成的集合, 注意这时有 $|I| = |Th(\mathcal{M})| = |\mathcal{L}| = \kappa$ 。

子命题. 对任意的 $i \in I$, 存在 $\mathcal{M}_i \in \mathcal{K}$, 使得 $\mathcal{M}_i \models i$ 。

反证, 假设有 $i \in I$, 使得对任意的 $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$, 都有 $\mathcal{N} \models \neg(\wedge i)$, 那么 $\neg(\wedge i) \in \mathcal{T}$, 而 $\mathcal{T} \subseteq Th(\mathcal{M})$, 这将得 $\neg(\wedge i) \in Th(\mathcal{M})$, 矛盾。

对每个 $\varphi \in Th(\mathcal{M})$, 令 $A_\varphi = \{i \in I \mid \varphi \in i\}$; 记 $\Sigma = \{A_\varphi \mid \varphi \in Th(\mathcal{M})\}$, 易见 Σ 对取有穷交封闭, 因此有 I 上的超滤 U , 使得 $\Sigma \subseteq U$ 。

由于 $\mathcal{K}$ 对 κ 超积封闭, 因此 $\prod_U \mathcal{M}_i \in \mathcal{K}$ 。

对每个 $\varphi \in Th(\mathcal{M})$, $A_\varphi \subseteq \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi\}$, 那么后者也在 U 中, 进而 $\prod_U \mathcal{M}_i \models \varphi$, 因此 $\prod_U \mathcal{M}_i$ 与 $\mathcal{M}$ 初等等价, 最后由 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭得 $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ 。

利用这个改造过的刻画定理就可以修补注记 11 中的构造方法了。

注记 23. 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 如下构造一个结构类的序列 $\mathcal{K}_\alpha$, $\alpha < (|\mathcal{L}|)^+$ 。

(1) $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$;

(2) α 是非零极限序数时, 令 $\mathcal{K}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{K}_\beta$;

(3) α 是后继序数, 并且 $\alpha = \beta + 2n + 1$, 其中 β 为极限序数时,

令 $\mathcal{K}_\alpha = \{\mathcal{N} \text{ 是 } \mathcal{L} \text{ 结构} \mid \text{有 } \mathcal{L} \text{ 结构 } \mathcal{M} \in \mathcal{K}_{\beta+2n} \text{ 使得 } \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}\}$;

(4) α 是后继序数, 并且 $\alpha = \beta + 2n + 2$, 其中 β 为极限序数时,

令 $\mathcal{K}_\alpha = \{\mathcal{N} \text{ 是 } \mathcal{L} \text{ 结构} \mid \text{有指标集 } I, |I| \leq |\mathcal{L}|, \text{ 有 } I \text{ 上的超滤 } U, \text{ 有 } \mathcal{M}_i (i \in I) \text{ 为 } \mathcal{K}_{\beta+2n+1} \text{ 中的结构, 使得 } \mathcal{N} = \prod_U \mathcal{M}_i\}$ 。

最后令 $\bar{\mathcal{K}} = \bigcup_{\alpha < (|\mathcal{L}|)^+} \mathcal{K}_\alpha$, 易见 $\bar{\mathcal{K}}$ 对初等等价封闭, 又由于 $(|\mathcal{L}|)^+$ 是正则基数, 可以保证在 $\bar{\mathcal{K}}$ 中任取的小于等于 $|\mathcal{L}|$ 个结构, 都不会与序列 $\mathcal{K}_\alpha$ ($\alpha < (|\mathcal{L}|)^+$) “共尾”。因此一定可以找到一个小于 $(|\mathcal{L}|)^+$ 的序数 $\beta + 2n + 1$, 其中 β 为极限序数, 使得这些结构都已经在 $\mathcal{K}_{\beta+2n+1}$ 中出现, 那么据构造, 这些结构的超积会在 $\mathcal{K}_{\beta+2n+2}$ 中, 从而在 $\bar{\mathcal{K}}$ 中, 因此 $\bar{\mathcal{K}}$ 对 $|\mathcal{L}|$ 超积封闭, 因此据命题 22, 可以保证 $\bar{\mathcal{K}}$ 是初等类。

另一面, 假设有初等类 Θ 使得 $\mathcal{K} \subseteq \Theta$, 那么使用归纳法可证, 对任意的 $\alpha < (|\mathcal{L}|)^+$, $\mathcal{K}_\alpha \subseteq \Theta$, 这样就得 $\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{K}_\beta = \bar{\mathcal{K}} \subseteq \Theta$, 这就保证了 $\bar{\mathcal{K}}$ 是 $\mathcal{K}$ 的初等类闭包。

至此, 已经完成我们的主要任务。接下来, 稍展开一点, 初步了解一下相关的结果, 它们可以理解为对“对初等等价封闭”这个结构类上的性质的一些“面貌”的反映。

据例子 21 可知, 对于一个给定的结构类, 当它对小的基数 κ , 对 κ 超积封闭时, 对大的基数 $\lambda > \kappa$, 未必会是对 λ 超积封闭的; 而推论 9 与命题 22 一道则使我们可以得到一个可以向上提升的充分条件。

命题 24. 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类, 并且 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭, 若 $\mathcal{K}$ 对 $|\mathcal{L}|$ 超积封闭, 则对任意的 $\lambda > |\mathcal{L}|$, $\mathcal{K}$ 对 λ 超积封闭。

这个结果由推论 9 与命题 22 直接可以推得: 首先, 据命题 22, 可得 $\mathcal{K}$ 是初等类, 然后据推论 9, $\mathcal{K}$ 对超积封闭。

就如前面所言, 某种意义上, 这反映了“对初等等价封闭”是一个结构类上强的性质。

一个自然的想法是，是否可以结合命题 16、命题 17 也得到这样的充分条件？

似乎是不可行的，其原因是这两个命题都实质性地使用了 Keisler–Shelah 同构定理，这会使得对超幂，进而对超积无上界“多”的结构族的构造；与命题 24 相对照，这也从另外一个侧面反映了初等等价的“力量”。

同样的道理，无法“优化”命题 16，把其中的对超积封闭“降”为对 $|\mathcal{L}|$ 超积封闭。

不过使用 Keisler–Shelah 同构定理，可以得到“对初等等价封闭”的一个刻画。

命题 25. 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 结构类，那么 $\mathcal{K}$ 对初等等价封闭，当且仅当 $\mathcal{K}$ 对超幂封闭，对超幂反向封闭，并且对同构封闭。

最后留一个问题。

问题 26. 是否有自然的性质，使得对任意的 $\mathcal{L}$ 结构类 $\mathcal{K}$ ，只要 $\mathcal{K}$ 具有这种性质，则 $\mathcal{K}$ 可以把对 $|\mathcal{L}|$ 超积封闭提升为对超积封闭？

参考文献

- [1] C. C. Chang and H. J. Keisler, 1990, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 73: Model Theory*, Amsterdam: North-Holland.
- [2] G. F. McNulty, 2016, *Elementary Model Theory*, <https://people.math.sc.edu/mcnulty/762/modeltheory.pdf>.
- [3] 王世强，模型论基础，1987 年，北京：科学出版社。
- [4] 姚宁远，初等模型论，2018 年，上海：复旦大学出版社。

（责任编辑：袁之）

A Note on Elementary Class

Jiangjie Qiu

Abstract

Elementary class is a core concept of model theory. There are several characterization theorems for elementary class, one of which uses “closed under elementary equivalence” and “closed under ultraproducts”. Elementary model theory is an excellent newly published textbook, in which, based on the above characterization theorem, provide a method, which could be used to form the elementary closure of a given class of structures in countably infinite steps. This method is intuitive, can deepen our understanding of the concept of elementary class. Due to the neglect of the “cofinality” problem, however, this method may have loopholes. In this paper, we introduced the concept of “closed under κ -ultraproducts” firstly, and improved the above characterization theorem, and perfected the above method finally. This paper also discusses the relationship among some properties of classes of structures.