

关于说谎者悖论句变元理论的几点评论

陈龙

摘 要: 说谎者悖论是最古老也最难以应付的悖论之一。本文以塔尔斯基的语言分层理论和克里普克的真值间隙理论为背景和参照点来比较文兰教授所提出的句变元理论解悖方案。文章主要从应对不同类型的说谎者悖论以及其他类似的非语义悖论（尤其是模态说谎者和认知说谎者）的角度出发，总结了句变元理论的两个独特之处。第一它揭示出自指以及真谓词在说谎者悖论中显明但不显著的作用；第二它可以应付大量结构相似的悖论并给出统一的解决方案。文章最后比较了克里普克的有根性概念和文兰的方程有解概念的异同，并提出了一些可以继续探索的相关问题。

关键词: 说谎者悖论；句变元；自指；有根性

中图分类号: B81

文献标识码: A

1 说谎者悖论的三种不同形式

考虑如下这个语句 L : L 是假的。如果 L 为真，那么它所叙述的情况成立，也就是说 L 是假的。反过来如果 L 不是真，即为假，那么它所叙述的情形的对立面成立，也即并非 L 是假的，因此 L 是真的。合起来我们就可以逻辑地推出 L 为真当且仅当 L 是假的。如果我们再假定任何语句非真即假，那么我们便可以得出 L 既为真又不真（为假）这样一个彻底的矛盾。上述推理便是经典的说谎者悖论（The Liar Paradox, 后文用 LP 指代），它所用到的推理规则只是直观上非常可信的两条：(1) 一个语句 P 为真当且仅当 P 所叙述的情形成立： $[P]$ 为真 $\iff P$ ；¹ (2) 二值原则：任何语句都要么真，要么假，而且必取其一。从看似如此简单而可信的原则却能推出彻底的矛盾，这也是说谎者语句被称为“悖论”的原因，它也是哲学史上最早出现的悖论之一²。虽然自其出现以来有诸多不同的哲学家、逻辑学家提出过大量的合理的解悖方案，但是时至今日依然没有一个方案能一致地被所有人接受，以作为 LP 的标准解答。³

收稿日期: 2021-12-09

作者信息: 陈龙 北京师范大学哲学学院
long.chen@bnu.edu.cn

基金项目: 此研究受到中央高校基本科研业务费专项资金（2019NTSS35）资助。

¹我们用 $[P]$ 表示一个可以指称 P 的名称，比如其哥德尔编码。

²最早可以追溯到公元前 5 世纪左右古希腊的欧布里德斯（Eubulides）。

³事实上，关于到底什么是 LP 的一个解答（solution）这个二阶元问题，也存在不少争议。参见 [3]，第八章。

除了经典的说谎者语句, LP 还有几种其他形式, 这些形式不仅仅有助于我们更好地看出 LP 的范围和其本质特征, 更重要的, 也是我们衡量任意一个解悖方案的力度和解释力的重要依据。比如说, 通过和一些偶然语句组合起来, 我们可以构造出如下偶然的说谎者悖论 (Contingent Liar Paradox, CLP) L : L 是假的并且外面在下雨。如果 L 为真, 那么我们可以推出 L 也为假。如果 L 为假, 那么 L 为真或者并非外面在下雨。因此, 如果外面正好不在下雨, L 本身并不会推出矛盾。 L 是否会导致悖论就取决于外面的天气这个偶然事实。类似地, 我们还可以有 L : 写在 402 教室黑板上的那句话为假。如果这个语句出现在除了 402 之外的其他教室黑板上, 那么它一般不会得出矛盾, 只有当它出现在 402 教室黑板上并且它是写在黑板上唯一的一句话时才会得出类似 LP 的推理。看上去, 一个语句是否是悖论语句取决于它所出现的地方这个偶然的事实。此外, 还有一种被称之为加强版说谎者悖论或是复仇的说谎者 (Strengthened Liar Paradox/revenge liar, SLP)。其基本想法如下: 如果你认为说谎者语句本身是成问题的 (pathological, 比如说无意义的或是有意义但缺乏真假或者缺乏根基) 并以此来构造出某个解悖理论, 那么说谎者语句总可以以某种新的形式卷土重来, 比如 L : L 是假的或是无意义的。无论假设 L 为真还是为假都会导致熟悉的矛盾, 但是任何认定 L 是无意义的理论也难逃悖论, 因为如果 L 真的是无意义的, 那么 L 就是真的 (因为这正是 L 所陈述的)。SLP 看似是一个比 LP 本身要严重得多的挑战, 它至少排除掉了诸多看似合理的一阶解悖方案。后文我们可以看出, 以何种程度来克服 SLP 是我们裁定解悖方案之可信度的重要标准。

2 主流理论

从现代逻辑的角度来看, 对 LP 这个语义学悖论最有影响的两种解决方案无疑是塔斯基的语言分层理论 ([10]) 以及克里普克的真值间隙理论 ([6])⁴, 他们分别是自指以及真谓词的角度来试图解决 LP。塔斯基认为由于日常语言的语义封闭特性⁵, 不一致性很难避免。要从形式上解决 LP, 我们必须严格地将包含真谓词的语句与这个语句所指涉到的语句置于不同层次, 从而就可以从语法上直接规避掉语句谈论自身真假的可能性, LP 也就随之消解。比如说, 假设 P 是对象语言 L 中的语句, 那么 “[P] 不是真的” 这一语句是与对象语言对应的不同层级的元语言中的语句。没有一个绝对的真谓词, 而只有对应于不同语言层级的带有不同下标的真谓词。虽然塔斯基的理论能很好地解决形式语言中关于真谓词的语义问题并且避免形式化的 LP, 但是他所付出了代价是禁止一切形式的自指, 这一

⁴ 还有一些逻辑理论并不将悖论视为不可接受的, 而是试图从悖论度的角度来分析 LP 以及其他相应的悖论, 这一思路也极为有趣, 但是并不在本人讨论的视角之下。参见 [4, 8, 15]。

⁵ 一个语言 L 是语义封闭的, 如果这个语言中包含足够丰富的资源来谈论这个语言自身中语句的真假。

点既违背直觉,很多时候看上去也很成问题⁶。正是出于上述考虑,克里普克提出了一个新的真理论,在这个理论中语言和真谓词都不再分层,并且语句可以一致地谈论自身的真假。⁷但是其所必须付出的理论代价便是真谓词只能是一个偏谓词 (partial predicate), 其外延 (真的语句) 和反外延 (假的语句) 不能包括所有的语句,而必须允许若干既不真也不假的语句的存在 (说谎者语句就是其中之一)。在此理论中我们要放弃经典的二值语义原则而允许“非真非假”(真值间隙, truth-gap) 语句。⁸此外,虽然经典的 LP 在这个理论中可以被避免,但是它却无法处理形如“ L : L 是假的或者 L 没有真值”的这一加强版悖论 SLP。也就是说,虽然理论中允许包含自身真谓词的语句,但是它并不能表达形如说谎者语句这类缺乏真值的语句的性质,即“ L 并不真也不假”,因而“ L 不是真的”,我们必须在另外一个更丰富的元语言中才能表达这个事实,因此,克里普克也不得不承认“塔斯基的层级幽灵依旧与我们同在”([6])。

3 文兰的“句变元理论”

上述经典理论所面临的困难似乎在警示我们,在承认自指原则以及经典逻辑和语义的前提下 LP 是不可解的,我们必须放弃一些根本原则。然后,文兰教授从代数学中的几个根本概念(变元,值,方程,解)入手,指出 LP 的本质是语言学中的代数现象,无需以禁自指或放弃经典逻辑和语义学为代价来解决 LP,解悖的关键在于区分“变元”与“值”,我们暂且将其理论称为说谎者悖论的句变元理论⁹。其精确表述如下:

说谎者悖论的解答. 说谎者悖论 L : L 为假是一个句变元问题,应该写成一个句方程 X : X 为假。说谎者悖论推出矛盾是因为隐蔽地假设了该句方程有句解,即隐蔽地假设了存在 X 的一个值 L 使得 L : L 为假。说谎者悖论的矛盾证明,不存在 X 的值 L 使得 L : L 为假。([14])

乍看上去,句变元理论是如此之简洁而直白,它既没有很多主流理论中的繁琐

⁶比如克里普克给出的著名的例子:假设琼斯断言(1)尼克松关于水门事件的大部分言论都是错的”,而恰好尼克松关于水门事件的所有其他断言正好对错各半,除了如下这句(2)琼斯关于水门事件的一切言论都是对的”。这两句话放在一起会产生矛盾,但是如果只单独考察语句(1),任何内在的无论是语义的还是语形的标准都无法诊断出其悖谬之处。([6])这和我们前文引入偶然说谎者悖论 CLP 的意图是一致的,如果悖论的产生是偶然的,那么我们不能通过任何在先的逻辑的原因将其排除掉。

⁷就本文目的而言,我们不需要呈现出克里普克真理论的所有技术细节,但是要想彻底理解他这个理论的独特之处,这一点是必要的,因为克里普克自己也宣称他自己理论区别于其他哲学理论的一大优势就在于给出了一个真正的形式化的理论,并且可以从逻辑上证明很多精确的哲学断言。在他发表的原文中,克里普克并没有给出所有的证明细节,完整的证明可以参见[2]。

⁸虽然最常使用的来形式化克里普克真理论的语义工具是三值逻辑(更具体地,强克里尼三值逻辑),但是克里普克坚持认为“非真非假”并不是和真假并列的第三个真值([6])。

⁹句变元理论最早出现在[11]中,后来在其书[13]中又有所扩展,前述文章包含了这个理论最精确的表述和论证。

技术构造,也不像很多哲学味浓厚的解悖方案一样充满着大量理论术语,以至于很难让人相信这会是一个有足够解释力的理论。然而,句变元理论无论从方法论还是实质的哲学论证角度来看都是一个新颖而丰富的理论。首先,通过对康托定理和理发师悖论的一个精微的对比分析,它指出几乎所有悖论的真正形式实质上是隐去了某个假设之后的反证法的翻译,这就是文兰所说的“隐蔽假设原理”([14])。应该指出,对绝大多数悖论来说,其对应的反证法不是现成的,而是在悖论被解答之后,将其隐蔽的假设写成“头尾”加上去做成的。因此对大多数悖论而言,这个原理并不能帮助解答悖论,而只是在悖论被解答后帮助理解这一解答。¹⁰ LP 却十分幸运,它与一个现成的布尔方程无解的反证法相对应。因此,依循这一原理,就发现 LP 隐蔽地假设了该句方程有句解。也就是说,这一原理虽然对解答绝大多数悖论没有什么帮助,却独独对解答 LP 起了至关重要的作用。当然布尔代数也起了重要的作用。若不是历史上先出现了布尔代数,即使知道这个隐蔽假设原理,也应无可能发现这个隐藏极深的“有解”假设。这一方法论视角是很独特的,以往的大部分理论都着重从关于真谓词的语义特征或是 LP 中所使用的逻辑推理规则进行适当的限制和修改以解决 LP。后面我们将看到,这一视角转换不仅有助于我们用一个一致的模式来审视诸多看似十足不同的悖论,同时,将 LP 视为某个反证法的主体部分,我们也能建设性地从 LP 获得一些正面结论,这是很多特设性的解悖方案所无法做到的。

与此方法论直接相关的是句变元理论对悖论的诊断,它认为“自我指涉”和“真谓词”虽然是说谎者悖论的明显特征,但却不是问题的要害,问题的要害是说谎者悖论里的一个隐蔽的假设。这和诸多传统的解悖理论¹¹更是大相径庭。通过构造出一个自制的三卡悖论([11])以及从隐蔽假设原理出发给出与之对应的解答,文兰强有力地论证了他对 LP 要害之点的诊断:三卡悖论的推理中隐蔽地假设了句变元有句解,这个在原始的 LP 中隐藏很深且几乎从来没被注意到的假设在另一个形式几乎一样的悖论中就变得很明显了。有了隐蔽假设原理方法论的指引和三卡悖论的对照之后,再结合若干代数学术语在语言学上的类比,句变元理论就是一个很自然也很严密的解悖方案了。值得注意的是,虽然借用了语言学上的一些概念,但是句变元理论不是从纯语言学的角度来解决 LP 的,它是一个逻辑的解决方案。虽然建立了“句变元”和“句解”以及“值”这样的代数概念,但是理论的哲学根基乃是未定之变元与已定之值以及二者之间微妙的“之字形”转换关系。它本质上是一个哲学的而非代数的理论。下一节作者打算从自指以及真谓词在 LP 中所起的非本质作用以及悖论中的存在性假设和克里普克的有根性概念(grounded sentence)为对照来对句变元理论做一些简单的评论。

¹⁰ 比如说导致罗素悖论的概括原则(comprehension principle):相应于每一个概念都有一个集合作为其外延。即没有罗素悖论,我们也可能有其他独立的原因去说明这个原则的非普遍有效性。

¹¹ 我们在文中主要考察了最有代表性的两种理论,其他更多的理论可以参见[1]。

4 难以捉摸的说谎者

正如克里普克已经指出过, LP 中的自指并不是其悖论之源。首先我们的语言中有很多自指但无害的语句, 而且我们还可以构造出像双卡悖论或文兰三卡悖论以及雅布罗悖论¹²等等似乎并不涉及直接自指的仿-LP 悖论。此外, 在包含一定量算术的形式系统中, 我们甚至可以通过对角线引理来严格证明自指的不可避免性, 即对系统内任意可定义的谓词 φ 一定存在一个语句 ψ , 使得 $\vdash \psi \leftrightarrow \varphi[\psi]$ 。因此塔斯基用以证明真谓词在形式系统内不可定义定理恰好可以看作是 LP 未掐头去尾的某种应用, 其隐蔽前提便是“假设形式系统 L 可以定义自己的真谓词”。

与自指相类似的是真谓词在 LP 中所起的非本质作用 (red herring)。为了更好地看出真谓词在 LP 中所扮演的角色, 我们可以考虑其他从形式规则上而言和真谓词拥有相似结构的其他非语义学概念, 比如形而上学必然性概念与认识论意义上的可知性概念 (或者说是非形式化的可证性/informal provability)。我们用 $\varphi[x]$ 来表示 x 是必然的。而且我们还假定 φ 拥有一些直观上必须被接受的推理规则, 最重要的便是 (1) 如果一个语句是逻辑可证的, 那么它是必然的, 即 $\vdash P \Rightarrow \varphi([P])$; (2) 如果一个语句是必然的, 那么它所叙述的情形成立, 即 $\varphi([P]) \Rightarrow P$ 。由此我们便可以构造出一个“模态说谎者”语句 N : N 不是必然的。如果 N 为假, 那么 N 所叙述的情形不成立, 即并非 N 不是必然的, 也就是说 L 是必然的, 那么 L 所叙述的情形成立, 由此 N 便是真的, 与 N 为假矛盾。于是我们便可以从逻辑上证明 N 为真, N 便是必然的。 N 是必然的, 而且 N 不是必然的。¹³

类似地, 如果我们将上述 φ 解释为绝对可知性 (absolute knowability) 并且假定绝对可知性这个概念也满足上述两条素朴的推理规则, 那么我们便可以构造出一个“认知说谎者”语句 K : K 是不可知的。如果 K 为假, 那么并非 K 是不可知的, 即 K 是可知的, 因此 K 为真, 矛盾。所以 K 为真, 并且由于我们是通过逻辑推导得出这个 K 为真, 我们也知道它, 所以 K 是可知的, 并且 K 是不可知的。¹⁴

如果只是从真谓词的语义特征着手去解决 LP, 那么很难看出那样的解悖方案如何应对上述非语义的模态或是认识论意义上的 LP。从“悖论乃是反证法之掐头去尾”的视角我们便可以得出必然性或是绝对可知性概念不能被当成谓词来处理¹⁵。或者, 从句变元理论的视角, 我们可以说上述 N 和 K 都只是未知句, 并没有满足它们的值存在。并不是必然性或是可知性概念的特征导致了悖论的存在, 而是同样的逻辑的原因导致了 L , N 和 K 的无解, 正如理发师悖论中的理发师不能存

¹²雅布罗悖论 ([12]) 是说假设存在一个无穷的语句序列, 其中每一个都只需要宣称在它之后的所有语句都为假, 很容易通过类似 LP 的推理得出其悖谬。

¹³将必然性作为一个谓词而非一个语句算子便会导致如上困难, 至少在足够丰富的语言系统内如此, 上述矛盾最早是由 Montague 发现的。关于这个现象是否证明了模态算子不能被当做谓词来处理的讨论, 参见 [9]。

¹⁴上述“认知者悖论”最早是由 D. Kaplan 和 R. Montague ([5]) 以及 J. Myhill ([7]) 发现的。

¹⁵或者要以某种类似塔斯基分层的方式来处理。

在的根源在于逻辑,而非性别或是其他因素。由此,我们便可以给各种悖论一个真正的统一(uniform)解决,不管它是语义的,认知的还是形而上的。

除了从技术上构造不动点模型来证明我们可以一致地添加语言自身的真谓词之外,克里普克还以“有根性”概念给(最小)不动点做出了哲学辩护。在此不动点中,一切在真谓词正外延和负外延中的语句都是有根的,其真假最终可以由不包含真谓词的原子语句的真假来断定,而诸如说谎者语句之类的无根语句却不行。有根性这个概念有很强的直觉意涵,而且和句变元理论中的“有满足方程的值”这个概念有些天然的相似性。然而,一方面,克里普克的“有根性”概念依赖于赋值模式,不同的赋值模式下会产生不同的“有根性”概念¹⁶,因而这个概念必然是相对的。此外,虽然从理论内部来看,诸如说谎者之类的语句既不真也不假因而缺乏真值,但是从元理论或者外部理论来看我们却可以断言说它不是真的,也就会导致我们之前提到过的克里普克的理论无法处理“ L : L 不是真的”这一SLP。与之相对,从句变元理论的视角出发我们并不需要提前给定语言中一个类似不动点的模型而限定可解方程的范围,并且由于不需要放弃经典的二值语义它并不会面临类似的SLP问题。如果说克里普克的有根性概念是一种从下往上(bottom-up)的理解真谓词的模式的话,从“句变元-值”的角度就是一种从上往下(top-down)的方式。最后,从形式上来看,虽然有一些遗留问题,但是克里普克真理论通过不动点的构造确实给出了类似说谎者语句区别于一般语句的非常符合直觉的说明,句变元理论视角下的有解句方程和无解句方程由于其非构造性并没有类似的直观,也许在将此理论形式化之后可以得出更多的洞见和结果。不管怎样,句变元理论是对LP的一个自洽的、简洁且有解释力的方案,是对说谎者悖论以及更宽泛的逻辑悖论研究文献的一个重大补充,也提供了若干可供继续探索的问题。¹⁷

参考文献

- [1] J. Beall, M. Glanzberg and D. Ripley, 2020, “Liar Paradox”, in E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/liar-paradox/>.
- [2] M. Fitting, 1986, “Notes on the mathematical aspects of Kripke’s theory of truth”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **27(1)**: 75–88.
- [3] S. Haack, 1978, *Philosophy of Logics*, Cambridge: Cambridge University Press.

¹⁶比如,一个真语句和一个无根语句的析取“ $\varphi \vee \lambda$ ”在强克里尼三值逻辑中为真,因而有根,但是在弱克里尼赋值中取真假之外的第三值,因而无根。此外,如果采用超赋值主义(super-valuationism),由两个无根语句组成的析取“ $\lambda \vee \neg \lambda$ ”却是真的,因而有根。

¹⁷比如,从变元(variable)和值(value)以及任意对象(arbitrary object)之间的形而上的和语义学的关系,这些也许会构成句变元理论的必要补充,但是这超出了本文的范围。

- [4] M. Hsiung, 2009, “Jump liars and Jourdain’s card via the relativized T-scheme”, *Studia Logica*, **91(2)**: 239–271.
- [5] D. Kaplan and R. Montague, 1960, “A paradox regained”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **1(3)**: 79–90.
- [6] S. Kripke, 1975, “Outline of a theory of truth”, *The Journal of Philosophy*, **72(19)**: 690–716.
- [7] J. Myhill, 1960, “Some remarks on the notion of proof”, *The Journal of Philosophy*, **57(14)**: 461–471.
- [8] G. Priest, 1979, “The logic of paradox”, *Journal of Philosophical Logic*, **8(1)**: 219–241.
- [9] J. Stern, 2013, “Montague’s theorem and modal logic”, *Erkenntnis*, **79(3)**: 551–570.
- [10] A. Tarski, 1944, “The semantic conception of truth and the foundations of semantics”, *Philosophy and Phenomenological Research*, **4(3)**: 341–376.
- [11] L. Wen, 2001, “Semantic paradoxes as equations”, *The Mathematical Intelligencer*, **23(1)**: 43–48.
- [12] S. Yablo, 1993, “Paradox without self-reference”, *Analysis*, **53(4)**: 251–252.
- [13] 文兰, 悖论的消解 (第二版), 2019 年, 北京: 科学出版社。
- [14] 文兰, “说谎者悖论的隐蔽的假设”, 逻辑学研究, 2022 年第 2 期, 第 1–20 页。
- [15] 熊明, “说谎者悖论的恶性循环”, 哲学研究, 2008 年第 11 期, 第 109–115 页。

(责任编辑: 袁之)

Remarks on the “Theory of Sentence Variable” for the Liar Paradox

Long Chen

Abstract

The Liar Paradox is one of the oldest and most recalcitrant paradoxes. This paper investigates a new theory, the “theory of sentence variable” proposed by Lan Wen for the solution of the Liar, in comparison with previous famous solutions, such as Tarski’s hierarchy-of-language theory and Kripke’s truth-gap theory. By focusing on the perspective of dealing with different types of the Liar and other related non-semantic paradoxes (especially the modal Liar and the epistemic Liar), the paper summarizes two characteristics of the new theory. Firstly, it reveals the manifest but not salient role of self-reference and the truth predicate in the generation of the Liar; secondly, the new theory can accommodate a large class of paradoxes with similar structure and provide a uniform solution. The paper concludes with a tentative comparison between Kripke’s idea of “groundedness” and Wen’s “existence of a solution for the equation”, and hints at some problems worth further researching.